

パラメトリック最適化を用いた張力・ルーパ系のオフライン設計

諸岡 伸幸*・児島 晃*

Off-line Controller Design for a Tension and Looper System via Multi-parametric Programming

Nobuyuki MOROOKA and Akira KOJIMA

Synopsis : An off-line controller design method of a tension and looper system is derived based on hybrid systems approach. By employing a multi-parametric programming method, a nonlinear feedback control law, which is equivalent to the model predictive control, is constructively given. The feature of resulting control system is illustrated with numerical example.

Key words : tension and looper system; model predictive control; multi-parametric programming; LQ control.

1. はじめに

熱延仕上ミル張力・ルーパ系¹⁾は、ワークロールとルーパにより圧延材のうねりを抑制し、圧延材を均一な厚さに調整するシステムである。そして起動時から定常状態へとダイナミクスが切り替わる複雑な動特性を持っている。最近では、起動時と定常状態に至る一連の制御問題に対してハイブリッドシステム制御に基づくアプローチが提案され、文献²⁾ではモデル予測制御を適用したオンライン制御法が提案されている。このようなハイブリッドシステムモデルに対してモデル予測制御を適用する場合には、コストが最小となる切り替わり時刻を決定することが必要になり、オンライン計算に大きな負荷がかかる。本稿では、張力・ルーパ系に対するモデル予測制御問題を考察し、同一の制御則が非線形状態フィードバック則により直接与えられることを明らかにする。

以下では、はじめにFig. 1のような張力・ルーパ系をモデル化し(2章)、つぎにモデル予測制御問題を定める(3章)。そしてモデル予測制御を適用することと等価な非線形状態フィードバック則が、マルチパラメトリック2次計画法²⁾を介して求められることを明らかにする(4章)。最後にシミュレーション結果により本手法の有効性を確認する(5章)。

2. モデルの導出

Fig. 1のような張力・ルーパ系に着目し、(a)から(b)に至る一連の制御問題を考える。このとき、(a)と(b)の2つの

ダイナミクスを同時に考えることが必要である。以下では、接触時、非接触時をそれぞれC-mode、N-modeと呼ぶことにし、文献³⁾に基づいてモデルを整理する。

接触時(C-mode) : Fig. 1(b)の張力・ルーパ系の運動方程式はつぎのように導かれる。

$$J\ddot{\theta} = T_{Lref} - K_1(\theta)\sigma - K_2(\theta) - K_3(\theta) - D\dot{\theta} \dots\dots\dots (1)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{E}{2l} \left\{ (1+f(\sigma))V_R + \frac{\partial L}{\partial \theta} \dot{\theta} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$$\dot{V}_R = -\frac{1}{T_{ASR}} (V_R - V_{Rref}) \dots\dots\dots (3)$$

$$\begin{cases} K_1(\theta) = 2Hbr \cos\theta \sin\beta \\ K_2(\theta) = 2pHbgr \cos\theta / \cos\beta \\ K_3(\theta) = W_L gr_L \cos(\theta + \theta_G) \end{cases}$$

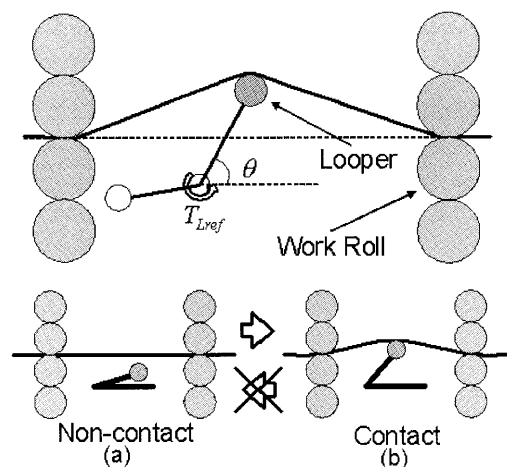


Fig. 1. Looper system.

Table 1. Plant parameter.

Sign	Value	Unit	Description
J	2.16×10^3	[Nm ²]	Looper inertia
H	3.1×10^{-3}	[m]	Strip thickness
b	1.0	[m]	Strip width
p	7.85×10^3	[kg/m ³]	Strip density
r	0.6	[m]	Looper arm length
W_L	2.5×10^3	[kg]	Looper weight
l	2.8	[m]	Half of length between stands
r_L	0.125	[m]	Distance between looper axis and center of gravity of looper
D	49.0	[Nms]	Looper damping factor
θ_G	5.0	[deg]	Offset angle between looper angle and center of gravity of looper
β	1.16	[deg]	Strip angle with passline
g	9.8	[m/s ²]	Acceleration of gravity
$f(\sigma)$	0.2154		Forward slip
E	1.96	[GPa]	Young's modulus of strip
L	23.448	[m]	Interstand strip length
T_{ASR}	0.2	[s]	WorkRoll time constant

ここで、(1)式はループ系の運動方程式であり K_1, K_2, K_3 はそれぞれ張力によるトルク、板重によるトルク、ループの自重によるトルクを表している。またループ駆動部のトルク時定数は十分に小さいとし、本稿ではループ駆動トルク (T_{Lref}) を入力とした簡略モデルを用いることにする。(2), (3)式は張力系の運動方程式であり、それぞれ張力、ワークロール速度を表したものである。このとき(2)式の $(1+f(\sigma))V_R$ はスタンド間速度差を表し、 $\partial L/\partial \theta$ はループによるスタンド間の圧延材の微小変化を表している。系(1)~(3)に対して、制御入力ループ駆動トルク T_{Lref} [N m] とワークロールに与えられる速度指令値 V_{Rref} [m/s] であり、観測量はループ角度 θ [rad]、ループ角速度 $\dot{\theta}$ [rad/s]、張力 σ [MPa]、ワークロール速度 V_R [m/s] である。

非接触時 (N-mode) : Fig. 1(a) のループ系の運動方程式は、つぎのように導かれる。

$$J\ddot{\theta} = T_{Lref} - K_3(\theta) - D\dot{\theta} \dots \dots \dots (4)$$

(4)式は、(1)式から張力系の影響(右辺第2項、第3項)を除くことにより導かれる。また張力は通常、ループと圧延材が接触したときに観測されるので非接触時には考慮しない。系(4)に対して、制御入力ループ駆動トルク T_{Lref} [N m] であり、観測量はループ角度 θ [rad]、ループ角速度 $\dot{\theta}$ [rad/s] である。

以下では、ループを起動時の角度 $\theta_n = 0$ [rad] からパスライン $\theta_{nc} = 10\pi/180$ [rad] (=10 [deg]) を通過させ、接触後の定

常状態 $\theta_c = 20\pi/180$ [rad] (=20 [deg]) に遷移させる制御問題を考える。

つぎに系(1)~(4)に対して、文献¹⁾で導出された離散時間区分的アファイン系を導く方法をまとめる。文献¹⁾と本論文で考察するモデルの違いは、ループ駆動部の時定数を0と近似したことである。系(1)~(4)から離散時間区分的アファイン系を導く過程は、つぎのようにまとめられる。

[1] 接触モード (C-mode) の線形化 : 系(1)~(3)の動作代表点 ($\theta_c, \sigma_c, V_{Rc}, T_{Lrefc}, V_{Rrefc}$) からの偏差を $\bar{\theta} = \theta - \theta_c, \bar{\sigma} = \sigma - \sigma_c, \bar{V}_R = V_R - V_{Rc}, \bar{T}_{Lref} = T_{Lref} - T_{Lrefc}, \bar{V}_{Rref} = V_{Rref} - V_{Rrefc}$ と表わし、動作代表点はつぎの関係が成り立つように定める。

$$T_{Lrefc} = K_1(\theta_c)\sigma_c + K_2(\theta_c) + K_3(\theta_c) \dots \dots \dots (5)$$

$$V_{Rrefc} = V_{Rc} \dots \dots \dots (6)$$

そして文献¹⁾に沿って、条件(5), (6)式を満たす動作代表点を、 $\theta_c = 20\pi/180$ [rad] = 20 [deg], $\sigma_c = 9.8$ [MPa], $T_{Lrefc} = 4.20 \times 10^3$ [N·m], $V_{Rc} = 9.29$ [m/s] と与え、線形近似を行なうとつぎの形の線形系が求められる。

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_c^c \hat{x}(t) + B_c^c \hat{u}(t) \dots \dots \dots (7)$$

$$\hat{x} = [\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}, \bar{\sigma}, \bar{V}_R]^T, \quad \hat{u} = [\bar{T}_{Lref}, \bar{V}_{Rref}]^T$$

[2] 非接触モード (N-mode) の線形化 : 系(4)の動作代表点 (θ_n, T_{Lrefn}) からの偏差を、 $\bar{\theta} = \theta - \theta_n, \bar{T}_{Lref} = T_{Lref} - T_{Lrefn}$ と表わし、動作代表点はつぎの関係が成り立つように定める。

$$T_{Lrefn} = K_3(\theta_n) \dots \dots \dots (8)$$

そして文献¹⁾に沿って、条件(8)式を満たす動作代表点を、 $\theta_n = 10\pi/180$ [rad] = 10 [deg] と与え、線形近似を行なうとつぎの形の線形系が求められる。

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_n^c \hat{x}(t) + B_n^c \hat{u}(t) \dots \dots \dots (9)$$

$$\hat{x} = [\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}]^T, \quad \hat{u} = \bar{T}_{Lref}$$

さらに接触モード (C-mode) で定めた座標系を用いると、 $\bar{\theta} = \bar{\theta} + (\theta_c - \theta_n), \bar{T}_{Lref} = \bar{T}_{Lref} + (T_{Lrefc} - T_{Lrefn})$ が成り立つので、アファイン系

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_n^c \hat{x}(t) + B_n^c \hat{u}(t) + a_n^c \dots \dots \dots (10)$$

$$\hat{x} = [\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}]^T, \quad \hat{u} = \bar{T}_{Lref}$$

が求められる。

[3] 離散時間区分的アファイン系の導出 : 接触モード (C-mode), 非接触モード (N-mode) で得られた系(7), (10) を、サンプル時間 h [s] で離散化し、それぞれの状態をつぎのように表わす。

$$x_k = [\bar{\theta}(kh), \dot{\bar{\theta}}(kh)]^T \dots\dots\dots(11)$$

$$\tilde{x}_k = [\bar{\theta}(kh), \dot{\bar{\theta}}(kh), \bar{\sigma}(kh), \bar{V}_R(kh)]^T \dots\dots\dots(12)$$

(k=0, 1, \dots)

そして、モード遷移を考慮すると、つぎの離散時間区分的アファイン系が求められる。

$$\begin{cases} \text{N-mode} & \begin{cases} x_{k+1} = A_n x_k + B_n u_k + a_n \\ I_{k+1} = I_k \\ \text{if } Cx_k + c \leq 0, I_k = 0 \end{cases} \\ \text{NC-mode} & \begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = A_c \tilde{x}_k + B_c u_k, \\ \tilde{x}_k = E_{nc} x_k + e_{nc} \\ I_{k+1} = 1 \\ \text{if } Cx_k + c > 0, I_k = 0 \end{cases} \dots\dots\dots(13) \\ \text{C-mode} & \begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = A_c \tilde{x}_k + B_c \tilde{u}_k \\ I_{k+1} = I_k \\ \text{if } \tilde{C}\tilde{x}_k + c > 0, I_k = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{21} \end{bmatrix}, \quad a_n = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0],$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}' & 0 \\ 0 & a_{32}' & a_{33}' & a_{34}' \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}' \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{21}' & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{42}' \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$$E_{nc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{nc} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \theta_c - \theta_{nc}$$

$$A_n = e^{A_n h}, \quad B_n = \int_0^h e^{A_n \tau} d\tau B_n^c, \quad a_n = \int_0^h e^{A_n \tau} d\tau a_n^c$$

$$A_c = e^{A_c h}, \quad B_c = \int_0^h e^{A_c \tau} d\tau B_c^c$$

各行列において、 $a_{ij}, a'_{ij}, b_{ij}, b'_{ij}, f$ は、文献¹⁾のパラメータを簡略モデルに適用させたものであり、 C, \tilde{C}, c はルーパが圧延材に接触する条件を表すために用いている。そしてN-mode, C-modeを区別するために、離散変数 $I \in \{0, 1\}$ を導入し、0, 1をそれぞれN-mode, C-modeに対応させている。NC-modeは、N-mode(2次元)からC-mode(4次元)にはじめて遷移するとき、初期状態を定義する必要があるため、技巧的に導入したモードである。

以下の章では、系(13)に基づいてモデル予測制御問題を考える。またN-modeの状態をC-modeの記述に対応させるときには、つぎのように表わすことにする。

$$\tilde{x}k = [x_k^T, 0, 0]^T, \quad \tilde{u} = [u, 0]^T \dots\dots\dots(14)$$

3. モデル予測制御問題

系(13)に対して、つぎのモデル予測制御問題

$$\min_U J, \quad J := \sum_{i=k}^{\infty} \{ \tilde{x}_{i|k}^T \tilde{Q} \tilde{x}_{i|k} + \tilde{u}_{i|k}^T \tilde{R} \tilde{u}_{i|k} \} \dots\dots\dots(15)$$

$$U = \{ \tilde{u}_{k|k}, \tilde{u}_{k+1|k}, \dots \}, \quad \tilde{Q} > 0, \tilde{R} > 0$$

s.t. (13)式

を定める。C-modeにおいてモデル予測制御問題(15)はLQ制御に一致し、応答がC-modeにとどまるならば制御則がつぎのように与えられる。

$$\tilde{u}_k = K_{LQ} \tilde{x}_k, \quad K_{LQ} = -(\tilde{R} + B_c^T P B_c)^{-1} B_c^T P A_c \dots\dots\dots(16)$$

ここで $P > 0$ は離散時間Riccati方程式

$$P = \tilde{Q} + A_c^T P A_c - A_c^T P B_c (\tilde{R} + B_c^T P B_c)^{-1} B_c^T P A_c \dots\dots\dots(17)$$

の解である。

以下ではつぎの仮定を設け、モデル予測制御問題(15)の解法を考察する。

仮定1: 制御則(16)を施したとき、C-modeの領域

$$\mathcal{C} = \{ \tilde{v} \in R^4 | \tilde{C}\tilde{v} + c > 0 \} \dots\dots\dots(18)$$

は不変である。

仮定1が成り立つとき、評価関数(15)がつぎのように書き換えられる³⁾。

$$J_N := \sum_{i=k}^{k+N_s-1} \{ x_{i|k}^T Q x_{i|k} + u_{i|k}^T R u_{i|k} \} + (E_{nc} x_{k+N_s|k} + e_{nc})^T P (E_{nc} x_{k+N_s|k} + e_{nc}) \dots\dots\dots(19)$$

$$Q = [I_2 \ 0_{2 \times 2}] \tilde{Q} [I_2 \ 0_{2 \times 2}]^T > 0, \quad R = [1 \ 0] \tilde{R} [1 \ 0]^T > 0$$

ここで N_s はNC-modeが発生した時刻であり、 Q, R は(14)式の記述に合わせて重み行列を書き換えたものである。そして仮定1が成り立つとき、C-modeの制御はLQ制御(16)により与えられるので、(15)式のモデル予測制御問題は、(19)式を用いたつぎのモデル予測制御問題に帰着される。

$$\min_U J_{N_s}, \quad U = \{ \tilde{u}_{k|k}, \tilde{u}_{k+1|k}, \dots, \tilde{u}_{k+N_s-1|k} \}, \dots\dots\dots(20)$$

s.t. (13)式

したがって原理的には、状態 x_k が観測される度に(20)式の最適化計算を行えば、評価関数(19)に対する最適制御を達成することができる。しかしながら、モード遷移を伴う系を扱う場合には、制御則のオンライン計算は単純ではなく、制御入力を印加した結果発生するモード遷移を予め想定しながら、最適化計算を行わなければならない。そして、区分的アファイン系(13)に対するモデル予測制御問題(20)を解く場合には、各サンプル時間でつぎの計算が必要

になり、多大な計算が必要になることが観察される。

モデル予測制御問題(20)の計算手順：

(手順1) サンプル時刻 k において観測された状態 \tilde{x}_k に対して、(手順2)、(手順3) の計算を実行する。

(手順2) $N_s = 1, 2, \dots, \bar{N}_s$ (\bar{N}_s : モード遷移が発生し得る十分に大きな数) に対して、つぎの最適化計算を行なう。

$$\min_U J_{N_s}, \quad U = \{\tilde{u}_{kk}, \tilde{u}_{k+1k}, \dots, \tilde{u}_{k+N_s-1k}\} \dots\dots\dots(21)$$

s.t. (13)式, $\tilde{x}_{k+N_s-1k} \notin \mathcal{C}, \tilde{x}_{k+N_s, k} \in \mathcal{C}$

(手順3) (手順2) で得られた(複数の)解の中から、評価関数 J_{N_s} が最小になった切り替わり時間 N_s を採用し、得られた制御入力 u_0 の初期値を印加する。

(手順4) サンプル時刻 $k+1$ で観測された状態が N-mode に属するならば、時刻を k と置き換え、(手順2)、(手順3) を実行する。

(手順1)~(手順4) に述べた計算は、状態が観測されてから開始するため、オンライン計算を前提とした制御系の構成が必要になる。しかしながら、想定される全ての状態に対して、必要な入力をオフライン計算で済ませることができれば、制御則を容易に実装することが可能になる。

次節では、モデル予測制御問題(20)から得られる制御則が、非線形状態フィードバック則により直接与えられることを明らかにする。

4. 非線形ゲインの構成

本節では、マルチパラメトリック2次計画法を介して等価な非線形状態フィードバック則を導く方法を示す。マルチパラメトリック2次計画法とは制御則をパラメータ化するひとつの方法であり、離散時間系、連続時間系のモデル予測制御に適用されている^{2,4)}。そして、これらの手法を用いるとモデル予測制御を実施して得られていた制御信号を、非線形状態フィードバック則により直接与えることが可能になる。マルチパラメトリック2次計画法に関する基本的な結果は、つぎの補題にまとめられる。

[補題1] (文献2)、定理2) : 2次計画問題を

$$\min_z \frac{1}{2} \{z^T H z + N z\} \dots\dots\dots(22)$$

s.t. $Gz \leq W + Sx_0$

とし($\tilde{G}, \tilde{W}, \tilde{S}$)を初期状態 $x_0 = x_0^*$ を与えたとき有効な制約とする。このとき、 $x_0 = x_0^*$ を含む領域

$$GH^{-1}\{\tilde{G}^T(\tilde{G}H^{-1}\tilde{G}^T)\}^{-1}(\tilde{G}H^{-1}N + \tilde{W} + \tilde{S}x_0) - N \leq W + Sx_0 \dots\dots\dots(23)$$

$$-(\tilde{G}H^{-1}\tilde{G}^T)^{-1}(\tilde{G}H^{-1}N + \tilde{W} + \tilde{S}x_0) \geq 0 \dots\dots\dots(24)$$

で、2次計画問題の最適解はつぎのように表される。

$$z = H^{-1}\{\tilde{G}^T(\tilde{G}H^{-1}\tilde{G}^T)^{-1}(\tilde{G}H^{-1}N + \tilde{W} + \tilde{S}x_0) - N\} \dots\dots\dots(25)$$

□

(19)、(20)により定めたモデル予測制御問題 (再掲)

$$\min_U J_{N_s}, \quad J_{N_s} := \sum_{i=k}^{k+N_s-1} \{x_{ik}^T Q x_{ik} + u_{ik}^T R u_{ik}\} + (E_{nc}x_{k+N_s, k} + e_{nc})^T P (E_{nc}x_{k+N_s, k} + e_{nc}) \dots\dots\dots(26)$$

$$U = \{\tilde{u}_{kk}, \tilde{u}_{i+1k}, \dots, \tilde{u}_{k+N_s-1k}\}, \quad Q > 0, R > 0$$

s.t. (13)式

に注目し、以下の手順で等価な非線形ゲインを構成する。

- [1] $N_s = 1$ と定めたモデル予測制御問題(26)を解き、(最適入力を印加したとき) 実際に $N_s = 1$ ステップでモード遷移を起こす初期状態と最適入力 u_0 の関係を整理する。
- [2] $N_s = k$ ($k = 2, 3, \dots$) と定めたモデル予測制御問題(26)を解き、(最適な入力列を印加したとき) 実際に $N_s = k$ ステップでモード遷移を起こす初期状態と制御入力 u_0 の関係を整理する。
- [3] そして、[2]の手順を、十分な状態領域で制御則が明らかになるまで繰り返す。

つぎに、C-modeの領域を(18)式、N-modeの領域を

$$\mathcal{N} = \{v \in R^2 | Cv + c \leq 0\} \dots\dots\dots(27)$$

により定め、具体的な計算手順を説明する。

(手順[1]) モデル予測制御問題(26)に対して $N_s = 1$ と定め、状態と入力の関係を求める。このとき最適化問題は

$$\min_{u_0} J, \quad J := x_0^T Q x_0 + u_0^T R u_0 + (E_{nc}x_1 + e_{nc})^T P (E_{nc}x_1 + e_{nc}) \dots\dots\dots(28)$$

$$\text{s.t. } x_{k+1} = A_n x_k + B_n u_k + a_n$$

となり、ある $x_0 \in \mathcal{N}$ に対して補題1を適用すると、最適制御入力は全領域で

$$u_0 = F_1 x_0 + f_1, \quad x_0 \in \mathcal{N} \dots\dots\dots(29)$$

のように与えられる (Fig. 2(A))。そして制御入力(29)を印加したときに1ステップでモード遷移を起こす状態は

$$x_1 = A_n x_0 + B_n (F_1 x_0 + f_1) + a_n = C_1 x_0 + g_1 \in \mathcal{C} \dots\dots\dots(30)$$

のように表現できる。すなわち、 $N_s = 1$ ステップでモード遷移を起こす状態領域は、

$$\mathcal{V}_1 = \{x_0 : x_1 = G_1 x_0 + g_1 \in \mathcal{C}\} \dots\dots\dots(31)$$

であり、制御入力は(29)により与えられる (Fig. 2(B))。

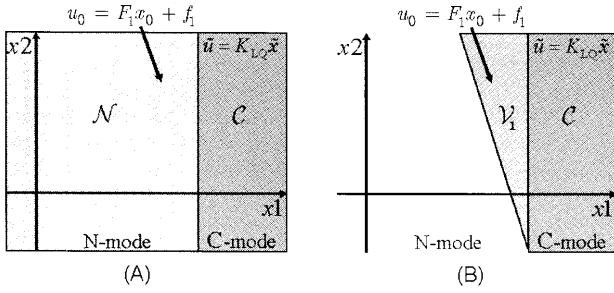


Fig. 2. Partition of region \mathcal{N} ($N_s=1$).

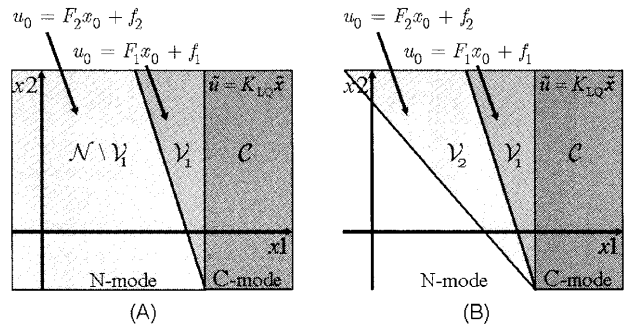


Fig. 3. Partition of region \mathcal{N} ($N_s=2$).

(手順[2]) モデル予測制御問題(26)に対して $N_s=2$ と定め、状態と入力の関係を求める。このとき最適化問題は

$$\begin{aligned} \min_{u_n, u_i} J, \quad J := & \sum_{i=0}^1 \{x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i\} \\ & + (E_{nc} x_2 + e_{nc})^T P (E_{nc} x_2 + e_{nc}) \dots\dots\dots(32) \\ \text{s.t. } x_{k+1} = & A_n x_k + B_n u_k + a_n \end{aligned}$$

となり、ある $x_0 \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{V}_1$ に対して補題1を適用すると、最適制御入力の初期値は

$$u_0 = F_2 x_0 + f_2, \quad x_0 \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{V}_1 \dots\dots\dots(33)$$

のように与えられる (Fig. 3(A))。ここで $\mathcal{N} \setminus \mathcal{V}_1$ は、 \mathcal{N} に対する \mathcal{V}_1 の差集合であり、 $x_0 \in \mathcal{N}$ かつ $x_0 \notin \mathcal{V}_1$ であることを意味する。そして制御入力(33)を印加したときに2ステップでモード遷移を起こす初期状態は、1ステップで領域 \mathcal{V}_1 に遷移することから

$$x_1 = A_n x_0 + B_n (F_2 x_0 + f_2) + a_n = G_2 x_0 + g_2 \in \mathcal{V}_1 \dots\dots\dots(34)$$

のように表現できる。すなわち、 $N_s=2$ ステップでモード遷移を起こす状態領域は、

$$\mathcal{V}_2 = \{x_0 : x_1 = G_2 x_0 + g_2 \in \mathcal{V}_1\} \dots\dots\dots(35)$$

であり、制御入力は(33)により与えられる (Fig. 3(B))。

(手順[3]) 十分な状態領域で制御則が明らかになるまで、手順[2]を繰り返す。すなわち

$$x_0 \in \mathcal{N} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k \mathcal{V}_i \right) \dots\dots\dots(36)$$

に対して、制御入力の初期値をパラメータ化し、領域 \mathcal{V}_{k+1} を決定する ($k=1, 2, \dots$)。

(手順[1]) ~ (手順[3]) により得られた結果は、想定した領域全ての状態に対して、モデル予測制御問題を解いたことと同じである。そして、各サンプル時刻で状態が観測される度に、その状態が属する領域 \mathcal{V}_i を判定し、対応する制御入力を印加してゆけば、モデル予測制御と等価な制御が達成できる。これは、状態領域 \mathcal{V}_i ごとにアファイン

な制御則を予め定めたものであり、N-modeにおける非線形状態フィードバック則がオフライン計算により構成できたことがわかる。観測された状態がC-modeに属するときには、既に求めたLQ制御則(16)を適用すればよい。

5. シミュレーション

シミュレーション結果により、提案手法の有効性を確認する。サンプル時刻を $h=0.02$ [s] とし、モデル予測制御問題(15)の重み行列を

$$\tilde{Q} = I_4, \quad \tilde{R} = I_2 \dots\dots\dots(37)$$

と与えた制御則を構成する。C-modeで対応するLQ制御則は(38)式のように求められ、仮定1を満たすことが確認された。

$$\tilde{u}_k = \begin{cases} \begin{bmatrix} 3110 & 3602 & -0.003 & 0.0002 \\ -4.511 & 1.885 & 0.966 & 0.422 \end{bmatrix} \tilde{x}_k : (\mathcal{C}) \dots\dots\dots(38) \end{cases}$$

そこで、これらの重み行列、 Q, R を用い、N-modeにおける制御則を導く。4節で示した提案手法により、区分的アフィンな非線形状態フィードバック則が(39)式のように構成された。

$$u_k = \begin{cases} [-340.90 & -46.234] x_k - 0.5467 : (\mathcal{V}_1) \\ [-395.19 & -61.415] x_k - 1.3667 : (\mathcal{V}_2) \\ [-449.60 & -78.740] x_k - 2.5010 : (\mathcal{V}_3) \dots\dots\dots(39) \\ \vdots \\ [-2142.7 & -1703.3] x_k - 458.75 : (\mathcal{V}_{38}) \end{cases}$$

そして、N-mode, C-modeにおける状態 $x_k = (\bar{\theta}(kh), \dot{\theta}(kh))$ ($k=0, 1, \dots$) と制御則の関係は Fig. 4 のようにまとめられた。Fig. 4 において、座標軸は本来の座標系 $(\theta, \dot{\theta}) = (\bar{\theta} + \theta_c, \dot{\theta})$ に直して表わしている。本設計の場合、38ステップまで制御入力をパラメータ化することにより、起動時から定常状態に至る制御則を整えることができる。

Fig. 5 は起動時の初期状態 $\theta=0$ [deg], $\dot{\theta}=0$ [deg/s] を与えたときの状態遷移である。 $N_s=38$ ステップでパスラインを通過し、接触後LQ制御に切り替わり、定常状態 $\theta=20$

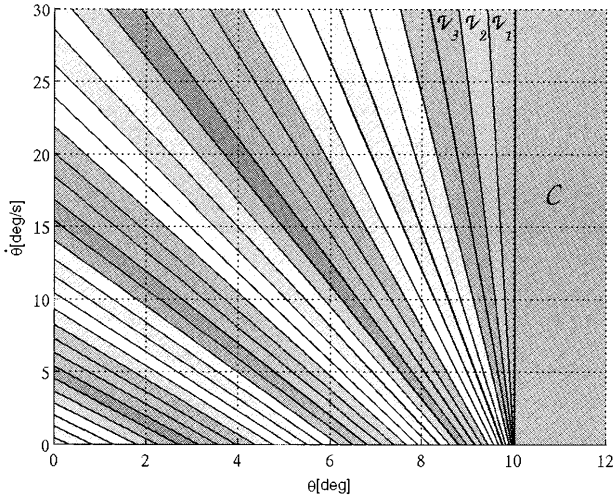


Fig. 4. Feedback control law: $\tilde{Q} = I_4, \tilde{R} = I_2$.

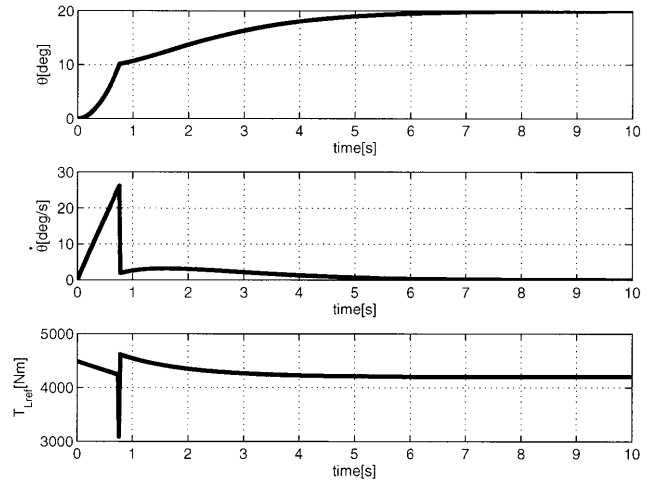


Fig. 6. Time response: $\theta = 0$ [deg], $\dot{\theta} = 0$ [deg/s].

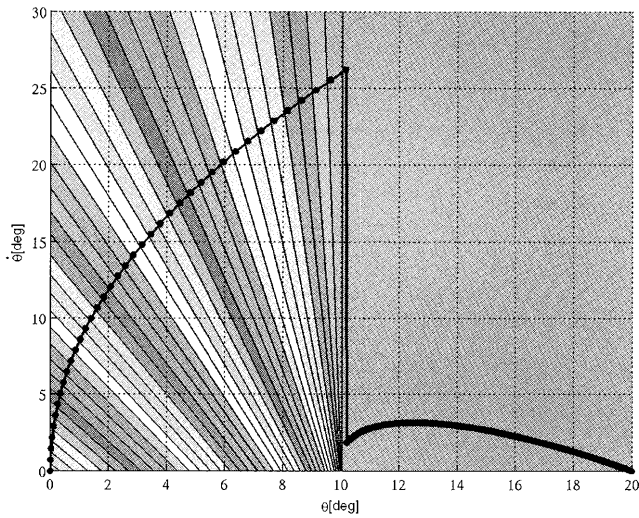


Fig. 5. State trajectory: $\theta = 0$ [deg], $\dot{\theta} = 0$ [deg/s].

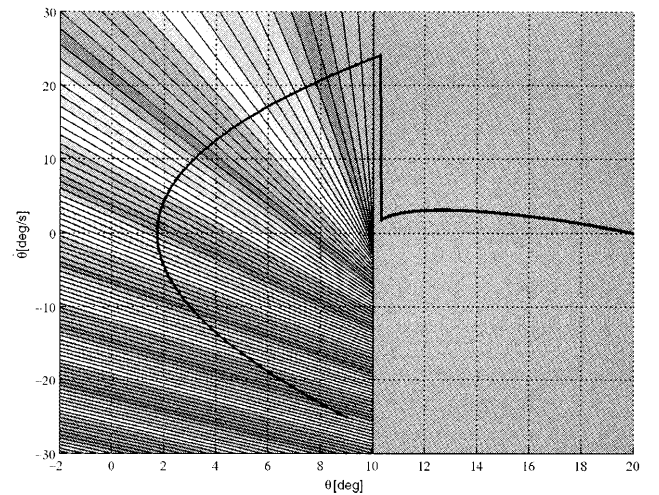


Fig. 7. State trajectory: $\theta = 9$ [deg], $\dot{\theta} = -25$ [deg/s].

[deg], $\dot{\theta}$ [deg/s] にすまやかに遷移することが確認できる。Fig. 6 は対応する時間応答をまとめたものであり、上からループ角度 [deg]、ループ角速度 $\dot{\theta}$ [deg/s]、ループ駆動トルク T_{Lref} [Nm] である。これらの結果から、起動時には大きなトルクを発生させ、圧延材との接触時にはループの速度を抑制させる制御が達成されており、文献¹⁾と同様の性質をもつ制御系が構成されたことが確認できる。文献¹⁾と本数値例の違いには、1) ループ駆動部の時定数を無視した簡略モデルを用いたこと、2) 評価関数の重み行列が異なることがあり、シミュレーションでは、整定時間が文献¹⁾よりも長い。さらに応答を調整するためには、行列 \tilde{Q} (37式) に大きな値を与え、制御入力 of 抑制を緩和させることが考えられる。

また、本例題にモデル予測制御を直接適用すると、Fig. 5 と全く同一の応答が得られ、等価な制御則が非線形状態フィードバックにより構成されていることが確認できる。Fig. 7 は初期状態 $\theta = 9$ [deg], $\dot{\theta} = -25$ [deg/s] を与えたときの

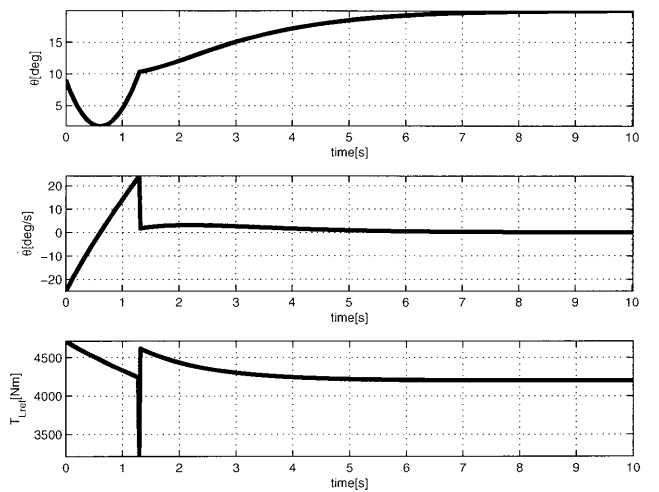


Fig. 8. Time response: $\theta = 9$ [deg], $\dot{\theta} = -25$ [deg/s].

状態遷移であり、Fig. 8 は対応する時間応答である。これらの結果から、状態の変動に対して、速やかにループが軌道を回復する様子が観察できる。

6. おわりに

張力・ループ系のモード遷移を考慮したLQ制御法を考察し、モデル予測制御と等価な非線形状態フィードバック則の構成法を導いた。本手法では、非線形状態フィードバック則が明示できるため、定数トルク法とのマージ、起動時のゲインの改善など、従来法との関係を検討することも可能である。本研究の一部は日本鉄鋼協会「オンライン最適化技術を核とした次世代鉄鋼プロセス制御研究会」を通じて行われ、また第15回鉄鋼研究振興助成を受けた。記して謝意を表す。

文 献

- 1) J.Imura, A.Kojima, S.Masuda, K.Tsuda and K.Asano: *Tetsu-to-Hagané*, **90** (2004), 67.
- 2) A.Bemporad, M.Morari, V.Dua and E.N.Pistikopoulos: *Automatica*, **38** (2002), 3.
- 3) D.Chmielewski and V.Manousiouthakis: *Syst. Control Lett.*, **29** (1996), 121.
- 4) A.Kojima and M.Morari: *Automatica*, **40** (2004), 1143.
- 5) N.Morooka and A.Kojima: *CAMP-ISIJ*, **19**, (2006), No. 2, 306.
- 6) N.Morooka and A.Kojima: 第6回計測自動制御学会制御部門大会資料, 2, (2006), 775.