

# 粒子画像流速計を用いた回転円筒容器内部の 攪拌過程の解析

清水 知之\*・吉田 仁\*・津田 宜久\*<sup>2</sup>・小関 常雄\*<sup>3</sup>・横谷 真一郎\*<sup>4</sup>・井口 学\*<sup>5</sup>

Analysis of the Stirring Process of Water Bath Contained in a Rotating Cylindrical Vessel with Particle Imaging Velocimetry

Tomoyuki SHIMIZU, Jin YOSHIDA, Norihisa TSUDA, Tsuneo KOSEKI, Shin-ichiro YOKOYA and Manabu IGUCHI

**Synopsis :** The instantaneous velocity of laminar flow in a water bath contained in a cylindrical vessel, being initially at rest and then suddenly set in rotation, was measured with particle imaging velocimetry (PIV). The period from the start of rotation to the moment at which the flow in the bath reaches steady state is defined as the flow establishment time. The results for the establishment time were compared with previous empirical equations derived on the basis of velocity measurements with laser Doppler velocimetry (LDV), and an applicable range of the equations was evaluated. The measured values of the flow establishment time were underestimated by the equations. This is because the equations were obtained in a higher Reynolds number range. An empirical equation for the flow establishment time was newly proposed.

**Key words :** unsteady flow; rotating laminar flow; flow establishment time; PIV; cylindrical vessel.

## 1. 緒言

温度および成分の均一化、熱および物質移動の促進、化学反応の促進、非金属介在物の浮上分離などを目的としてガス吹込み攪拌、機械的攪拌をはじめ様々な攪拌操作が広い工学分野で行われている<sup>1-9)</sup>。金属精錬プロセスでは、ガス吹込み攪拌が主であるが、最近では耐火物の耐溶損特性の改善によってKR法などの機械的攪拌や電磁力による非接触攪拌が活発に行われている。このとき、反応容器内の流動が攪拌を開始してからどの程度の時間経てば定常状態に至るのかを知ることは、攪拌中の精錬反応メカニズムを明らかにし、反応速度を制御する上で非常に重要である。

浴の内部に何も挿入しないで行う攪拌として、電磁気攪拌あるいは容器の回転を利用した攪拌が挙げられる。電磁気攪拌には回転磁場を利用した取鍋精錬、タンディッシュ内の介在物除去等の技術<sup>6)</sup>が報告されている。また、容器の回転を利用した攪拌に関しては、以前から化学工学の分野で活発な研究<sup>1-5)</sup>が行われており、攪拌を開始してから流れが定常状態に達するまでの時間、すなわち過渡時間に関する予測式が提案されている<sup>7-9)</sup>。なお、過渡時間を評価することは均一混合時間とも関連して重要な課題の一つである。

著者らの一部は回転円筒容器の遷移域における流れの過

渡時間をレイノルズ数、アスペクト比などの関数として明らかにした<sup>7,8)</sup>。また川嶋らは回転二重円筒容器内の過渡時間を円筒容器の寸法、回転速度、動粘度等の関数として表し、実験式を提案した<sup>9)</sup>。しかし川嶋らの過渡時間の定義は明確でなく、また予測式の詳細な適用範囲は不明な点が多いのが現状である。そこで本研究では、回転円筒容器内の流れが層流域にあるときの過渡時間について実験的検討を行い、既知の予測式の適用範囲を明らかにするとともに新たな予測式の導出を行った。

従来、水を用いたコールドモデル実験において、水の流速測定には測定精度の良いレーザードップラー流速計、LDV (laser Doppler velocimetry)、が盛んに用いられてきた<sup>3-5,7-9)</sup>。LDVは対象とする流れを問わず測定誤差は $\pm 3\%$ と高精度であるが、次のような欠点がある。第一に、点測定であるために流れ全体を把握するには多くの測定点が必要となること。第二には、一つの測定点における流れを乱れ成分まで含めて精度良く測定しようとすれば、測定にかなりの時間を要するため、流れ場全体を測定するのに極めて時間がかかることである。本研究では最近めざましい発展を遂げている粒子画像流速計、Particle Imaging Velocimetry (PIV)<sup>10,11)</sup>、を用いて測定を行った。

PIVは流体にトレーサー粒子を混入して適当な光源により照射することで粒子の移動を撮影し、その画像解析によって速度を算出する流速計である。PIVの長所としては、

平成12年6月15日受付 平成12年10月30日受理 (Received on June 15, 2000; Accepted on Oct. 30, 2000)

\* 北海道大学大学院生 (Graduate Student, Hokkaido University)

\* 2 (株) 日鐵テクノリサーチ (Nippon Steel Technoresearch Corp.)

\* 3 新日本製鐵 (株) 君津製鐵所 (Kimitsu Works, Nippon Steel Corp.)

\* 4 日本工業大学 (Nippon Institute of Technology)

\* 5 北海道大学大学院工学研究科 (Graduate School of Engineering, Hokkaido University, North 13 West 8 Kita-ku Sapporo 060-8628)

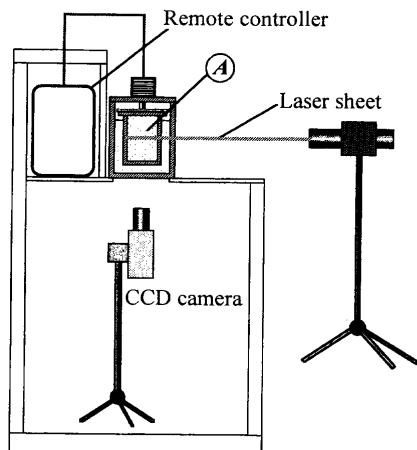


Fig. 1. Experimental apparatus for PIV measurement.

面測定により流れ全体を把握できること、またコンピュータを用いた画像処理により処理時間の短縮が望めることが挙げられる。最近では三次元PIVが開発され単相流では実績があり、気-液混相流等のより複雑な流れへの応用が図られている<sup>12-14)</sup>。一方で短所として、PIVは開発されてから間もないため、それぞれの流れにおける乱れ成分の測定精度に関しては十分な議論がなされていないことが挙げられる。そこで、今回は十分な精度が保証されている層流の流れ場に主に着目し、過渡時間を求めた。またPIVの測定結果を従来の層流の数値計算結果と比較することで、PIV測定の妥当性についても検討した。

## 2. 実験装置と測定方法

### 2.1 実験装置

回転攪拌の実験装置図をFig. 1に示す。光の屈折による撮影画面の歪みを軽減させるために、水を満たしたアクリル製正方形断面の浴中に円筒容器を鉛直に設置し、円筒容器の回転数はモーターを介しリモートコントローラーにより制御した。水平方向から円筒横断面にレーザーシート光を照射し、可視化された照射断面を浴底部からCCDカメラ(30 frames/s)を用いて撮影し、PIV画像処理を行った。またFig. 2に今回用いた正方形断面浴および円筒容器の詳細を示す。円筒容器は内径 $D=46$  mmとし、容器内液体高さとして $H_L=24, 48, 72, 120$  mmの4種類を使用し、レーザーシート光は容器の半分の高さに照射した。円筒容器内部には、平均粒径 $\bar{d}_p=75\sim 150$   $\mu\text{m}$ 、密度 $\rho_p=1013$   $\text{kg}/\text{m}^3$ の粒子(スチレンジビニル共重合体)および粒子が均一に分散するよう同密度に調製した食塩水( $\rho_{sw}=1013$   $\text{kg}/\text{m}^3$ )を充填した。

実験に用いた食塩水の動粘度 $\nu$ は $9.32\times 10^{-7}$   $\text{m}^2/\text{s}$ であり、角速度 $\omega$ は $2.36\sim 11.00$   $\text{rad}/\text{s}$ の範囲で変化させ、このとき容器内のレイノルズ数 $Re$ は $36.6\sim 79.0$ となった。過去のLDVによる測定結果<sup>7)</sup>ならびに後述の層流数値計算結果と

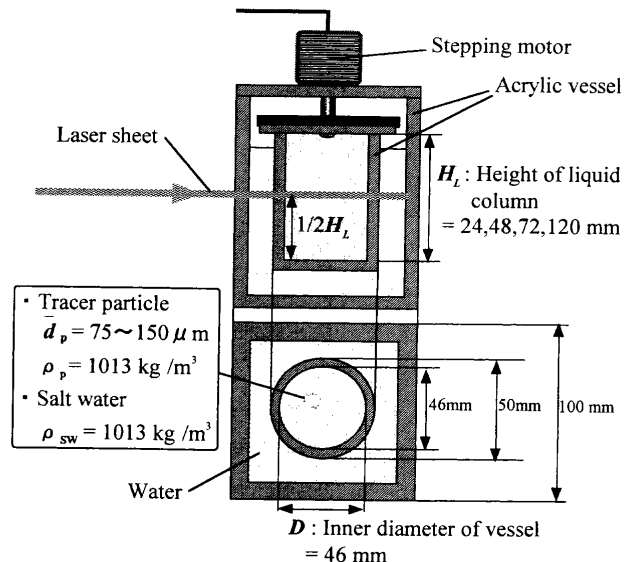


Fig. 2. Detail of A.

の比較に基づいて判断すると、この範囲では容器内の流れは層流と見なしてよいことが分かった。なお、層流から遷移流の境界を与える臨界レイノルズ数として( $Re=56$ )が知られているが、この値はあくまでも近似値であって<sup>15)</sup>層流、遷移流、乱流はLDVによる測定結果や数値計算結果との比較により総合的に判断しなければならない。

レイノルズ数の定義は次式で与えられる。

$$Re = R(\omega/\nu)^{1/2} \dots\dots\dots (1)$$

ここで $R$ は円筒容器の半径である。

### 2.2 PIVによる流速測定法の概要

Fig. 3(a)に可視化された粒子画像の一例を示す。白い斑点が可視化された粒子である。更に説明の簡略化のためにFig. 3(b)にその模式図を示す。この画像を用いた流速測定の原理は次に示す通りである<sup>14)</sup>。まず、この粒子画像をコンピュータに取り込み、画面上に速度ベクトルの始点となる格子点を設定する。次に、時刻 $t_1$ と $t_2$ の二画面間において格子点の周りを移動する粒子分布について相互相関を計算しベクトルを算出する。なお、速度は粒子の移動距離 $d$ を微小時間 $\Delta t$ で割ることにより計算する。(Fig. 3(c))

本実験条件におけるPIVの測定誤差は、黒地に白い微小な斑点をつけた円盤を仮想的粒子画像として円筒容器の実験と同一条件で回転させてPIV画像処理を行うことで評価した。接線方向速度の計算値 $v_{\theta, \text{cal}}$ および測定値の $v_{\theta}$ 分布から測定誤差を計算したところ、本実験条件における測定誤差は $-20\%\sim +15\%$ であり、PIV測定は妥当であると考えられる。(Fig. 4)

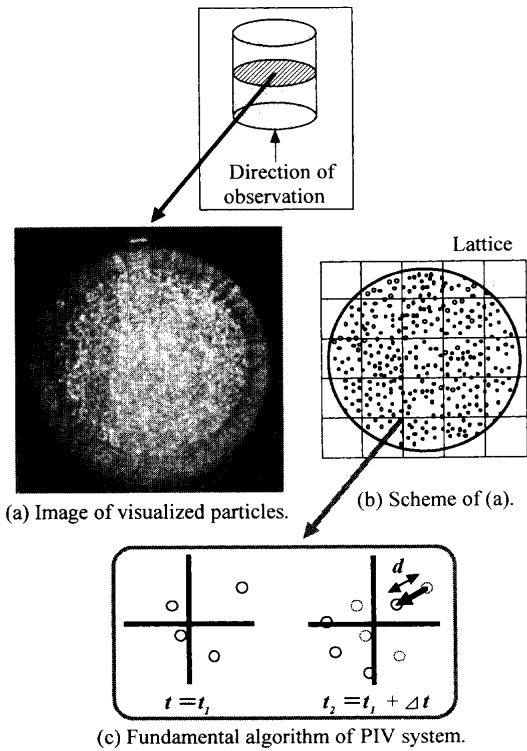


Fig. 3. Explanation of PIV system. (a) Image of visualized particles. (b) Scheme of (a). (c) Fundamental algorithm of PIV system.

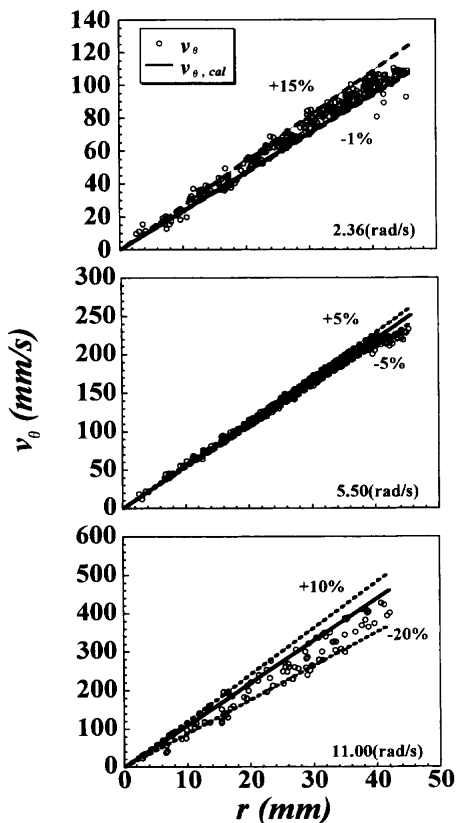


Fig. 4. Estimation of PIV measurement error.

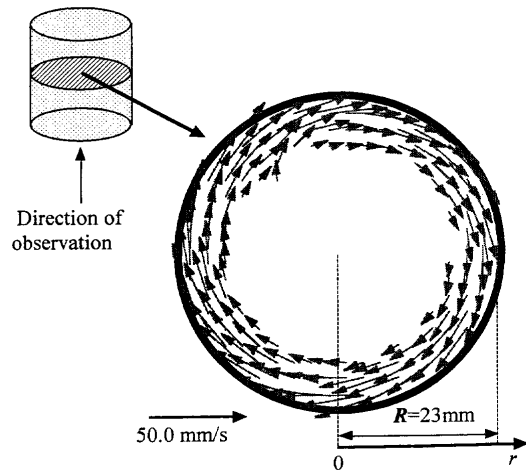


Fig. 5. Velocity vectors. ( $Re=36.6$ ,  $\omega=2.36$  rad/s,  $t=10$  s,  $H_l/D=2.61$ )

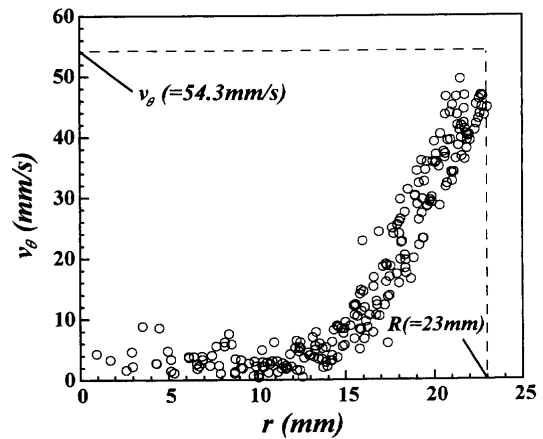


Fig. 6. Distribution of tangential velocity. ( $Re=36.6$ ,  $\omega=2.36$  rad/s,  $t=10$  s,  $H_l/D=2.61$ )

### 3. 実験結果と考察

#### 3.1 速度ベクトルと接線方向速度の分布, 過渡時間の定義

測定結果の一例として  $Re=36.6$ ,  $\omega=2.36$  rad/s,  $t=10$  s,  $H_l/D=2.61$ における速度ベクトルを Fig. 5に示す。なお、円筒容器中心近傍における速度ベクトルは複雑さを避けるため  $10$  mm/s をしきい値として、それ以下の速度ベクトルは削除して表記してある。Fig. 6は半径方向における接線方向速度  $v_\theta$  の分布を表している。容器の側壁 ( $R=23$  mm) における接線方向速度  $v_\theta$  は  $54.3$  mm/s となった。速度の大きい領域は容器側壁から中心へと徐々に遷移していき、充分時間が経過すると速度分布はほぼ直線となる。(Fig. 7)これは容器内の流れが定常状態に達したことを意味している。

そこで容器内の流れが定常状態に至るまでの過渡時間を求めるために、半径方向座標  $r$ , 時間  $t$ , 速度  $v_\theta$  の無次元化を行った。 $\xi, \tau, \phi$  は  $r, t, v_\theta$  に対する無次元数であり、それぞれ次式で定義される<sup>7,8)</sup>。

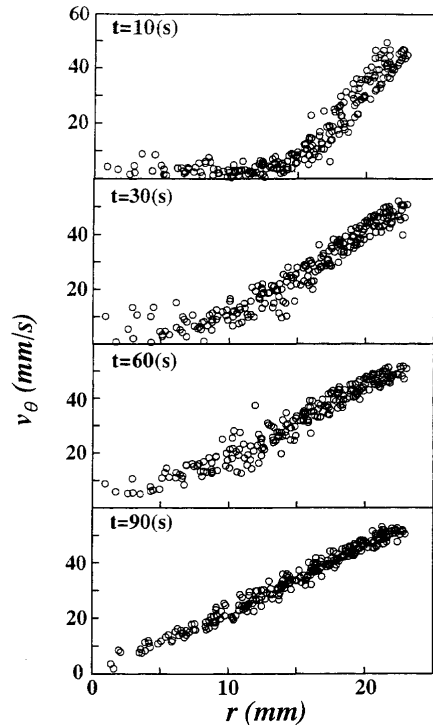
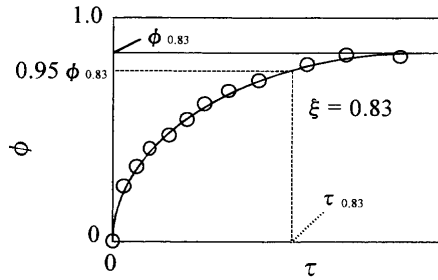
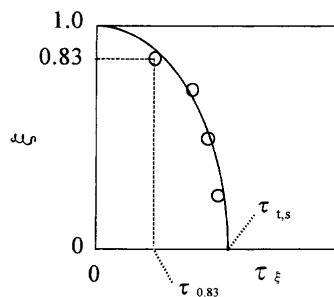


Fig. 7. Transition of the distribution of tangential velocity. (Re=36.6,  $\omega=2.36$  rad/s,  $H_L/D=2.61$ )



(a) Relationship between  $\tau$  and  $\phi$ .



(b) Relationship between  $\tau_{\xi}$  and  $\xi$ .

Fig. 8. Definition of nondimensional parameters  $\xi$ ,  $\tau$ ,  $\phi$  and  $\tau_{t,s}$ . (a) Relationship between  $\tau$  and  $\phi$ . (b) Relationship between  $\tau_{\xi}$  and  $\xi$ .

$$\xi = r/R \dots \dots \dots (2)$$

$$\tau = vt/R^2 \dots \dots \dots (3)$$

$$\phi = v_{\theta}/(R\omega) \dots \dots \dots (4)$$

無次元数  $\xi$ ,  $\phi$  はともに容器側壁においては1.0, 中心では0となる。また  $\phi$  は容器側壁の接線方向速度  $R\omega$  に対する実

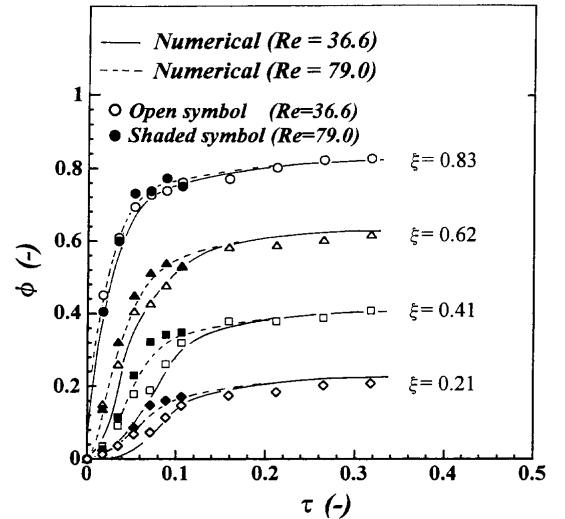


Fig. 9. Relationship between  $\tau$  and  $\phi$ . ( $H_L/D=2.61$ )

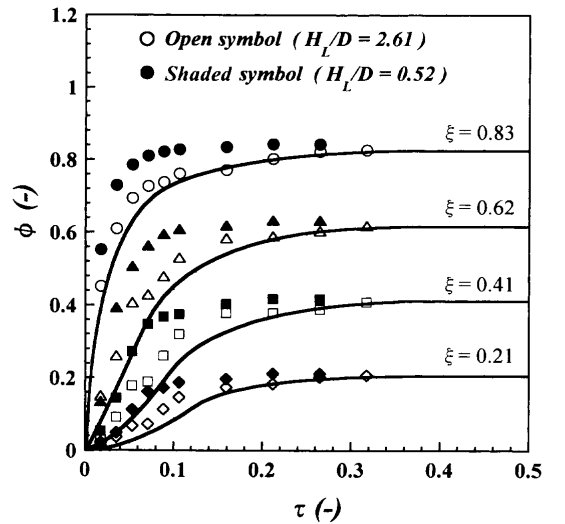


Fig. 10. Comparison of numerically calculated and experimentally measured velocity profiles. (Re=36.6,  $\omega=2.36$  rad/s,  $H_L/D=2.61, 0.52$ )

測値の割合を表している。Fig. 8(a)は  $\xi$  が0.83における  $\tau$  と  $\phi$  の関係を表したものである。時間が充分経過すると  $\phi$  は一定値をとり、 $\phi$  がその95%の値に達したときの  $\tau$  の値を  $\xi=0.83$  における定常状態に至るまでの無次元時間  $\tau_{0.83}$  と定義する。この無次元時間を一般的に  $\tau_{\xi}$  と表す。その結果、 $\tau_{\xi}$  と  $\xi$  の関係は Fig. 8(b) の様になり、 $\xi=0$  つまり円筒容器の中心が定常状態に至るまでの無次元時間を過渡時間  $\tau_{t,s}$  と定義する。

### 3.2 PIVによる速度の測定値と層流数値計算結果との比較

Fig. 9に無次元時間  $\tau$  と無次元速度  $\phi$  の関係を示した。容器中心近傍のばらつきが大きい、本研究で対象としたレイノルズ数領域における接線方向速度の発達の様子は、層流数値解<sup>6,7)</sup>によく合っており、流れは層流と見なしてよい。また、レイノルズ数  $Re$  が大きくなるにつれ発達は早くなること分かる。Fig.10において、実線は鉛直方向成

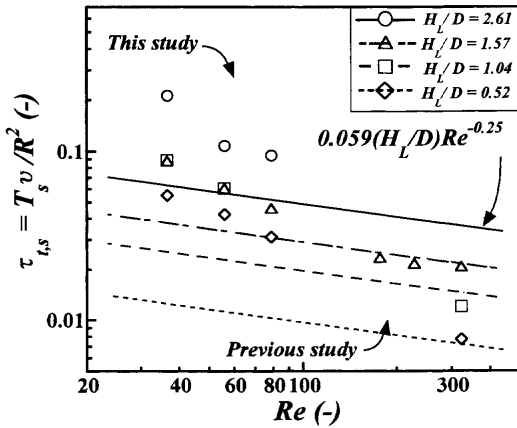


Fig. 11. Comparison of previous equation and experimentally measured values of  $\tau_{t,s}$ .

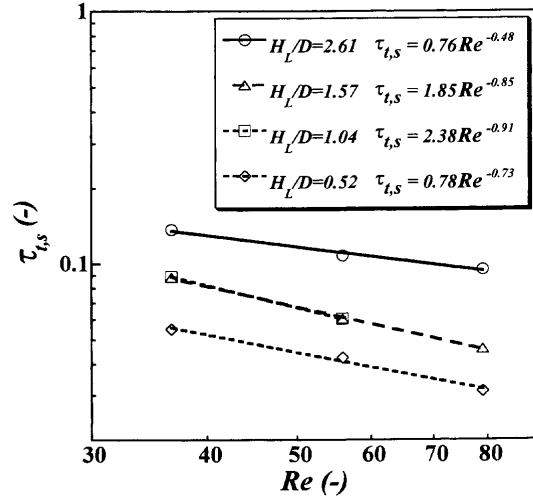


Fig. 12. Relationship between Reynolds number and nondimensionalized flow establishment time.

分の運動量交換を無視し、流れを無限長円筒容器内の層流と仮定して求めた接線方向速度の発達の数値解を、プロットはアスペクト比  $H_L/D$  により区別し、白抜きは  $H_L/D=2.61$ 、黒抜きは  $H_L/D=0.52$  の測定結果をそれぞれ表している。円筒容器内の攪拌過程は各半径位置において、 $H_L/D$  が小さくなるにつれ短い時間で推移している。

### 3.3 過渡時間

前述の過渡時間  $\tau_{t,s}$  を既知の予測式と比較した結果を Fig.11 に示す。Iguchi らの予測式はレイノルズ数  $Re$ 、アスペクト比  $H_L/D$  の関数として次式で定義される<sup>8)</sup>。

$$\tau_{t,s} = 0.059(H_L/D)Re^{-0.25} \quad (0.52 < H_L/D < 1.57) \dots\dots\dots (5)$$

レイノルズ数  $Re$  が 177~323 のプロットは過去の LDV 測定による遷移域の実験値を、 $Re$  が 36.6~79.0 のプロットは今回の PIV 測定による実験値をそれぞれアスペクト比  $H_L/D$  をパラメーターとして示している。遷移域において導かれた予測式は今回のレイノルズ数領域では実験値に比べて著しく小さい値を与える。この領域では、遷移域のレイノルズ数の大きいところに比べ変動成分の寄与が無い分だけ攪拌力が弱いため、予測値より大きくなっているものと考えられる。このことから式(5)は  $Re=177\sim 323$  の領域においては適用可能であるが、本研究で対象とした領域では適用できないと判断し、新たに過渡時間  $\tau_{t,s}$  の予測式の導出を行った。

式(5)を参考にして、

$$\tau_{t,s} = k(H_L/D)^a Re^b \dots\dots\dots (6)$$

とおき係数  $k$ 、指数  $a$ 、 $b$  の決定を行った。まず、それぞれのアスペクト比の実験値に対して、レイノルズ数  $Re$  および容器のアスペクト比  $H_L/D$  の過渡時間  $\tau_{t,s}$  に対する影響を調べた。Fig.12 はレイノルズ数  $Re$  と定常状態に至るまでの無次元時間  $\tau_{t,s}$  の関係を示している。両対数グラフ上で実験値を直線近似するとそれぞれのアスペクト比に対して  $b$  の値は  $-0.48\sim -0.91$  の範囲にばらつくが、すべての場合にお

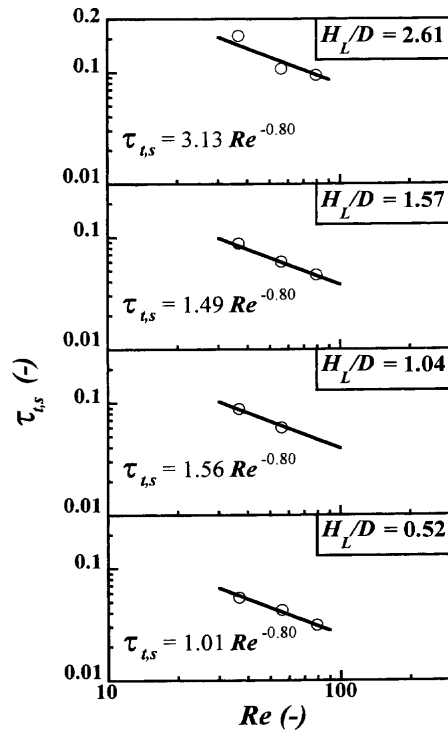


Fig. 13. Relationship between Reynolds number and nondimensionalized flow establishment time.

いて最も良くフィットする  $b$  の値を求めた結果、 $b=-0.80$  が得られた。この近似の程度を見やすくするため容器のアスペクト比  $H_L/D$  と無次元過渡時間  $\tau_{t,s}$  の関係を Fig.13 に示す。図中の式の係数を縦軸にとり、横軸にアスペクト比をとって Fig.14 に示す。実験値に最小自乗法を適用して直線を引くと  $k=1.45$ 、 $a=0.64$  が得られた。したがって  $\tau_{t,s}$  は次式で近似される。

$$\tau_{t,s} = 1.45(H_L/D)^{0.64} Re^{-0.80} \quad (0.52 < H_L/D < 2.61) \dots\dots\dots (7)$$

式(7)と実験値との関係を Fig.15 に示した。また、無限長円筒容器 ( $H_L/D=\infty$ ) 内の層流を仮定して、数値計算結果

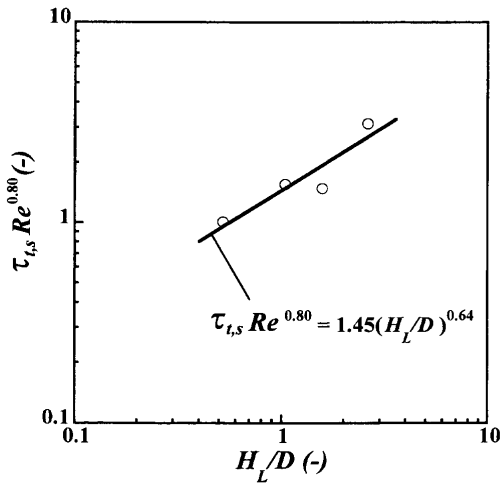


Fig. 14. Relationship between aspect ratio and values of  $\tau_{t,s} Re^{0.80}$ .

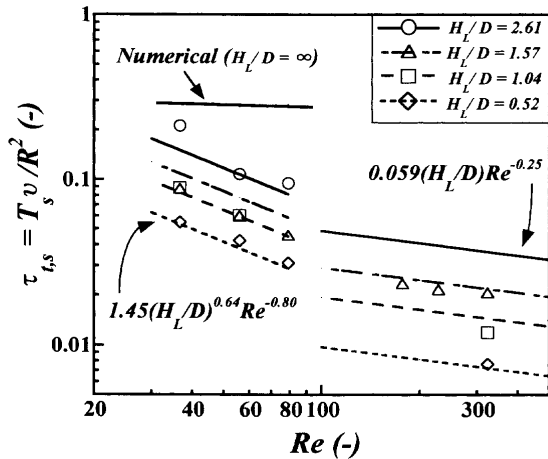


Fig. 15. Comparison of empirical equation and experimentally measured values of  $\tau_{t,s}$ .

から求めた無次元過渡時間の計算値を図中に示した。アスペクト比  $H_L/D$  が大きくなるにつれ無次元過渡時間  $\tau_{t,s}$  に対する円筒容器における上下の壁の影響は小さくなり、無限長円筒容器 ( $H_L/D = \infty$ ) の値に漸近していく。アスペクト比  $H_L/D$  が大きくなるにつれ偏差はやや増加しているが、実験値は各条件において最大でも  $-25\% \sim +30\%$  の範囲に収まっている。すなわち、本研究で対象としたレイノルズ数領域における過渡時間  $\tau_{t,s}$  は式(7)で予測することができる。

川嶋らは円筒容器の寸法、回転速度、動粘度等と定常状態に至るまでの所要時間  $T_s$  との関係は無次元数により次式で表した<sup>9)</sup>。

$$\pi_2 = \pi_1^{-0.619} \times 10^{0.749} \dots\dots\dots (8)$$

$$\pi_1 = \nu / (\omega L^2) \dots\dots\dots (9)$$

$$\pi_2 = T_s \omega \dots\dots\dots (10)$$

ここで、代表寸法  $L$  は次式で表され、液体の体積  $V_{\text{liquid}}$  お

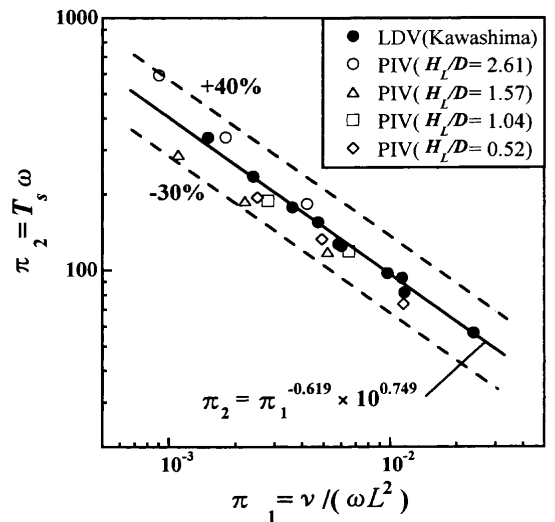


Fig. 16. Comparison of previous equation and experimentally measured values of flow establishment time  $T_s$ .

よび液体の壁との接触面積  $S_{\text{wetting}}$  の比で定義されており、種々の容器形状への適用が考えられる。

$$L = V_{\text{liquid}} / S_{\text{wetting}} \dots\dots\dots (11)$$

川嶋らの予測式は容器内で最も攪拌が遅く遷移する位置において定常状態に達するまでの時間で  $T_s$  を評価している。著者らは、最も攪拌が遅く遷移する中心軸において定常状態に至るまでの時間を過渡時間  $\tau_{t,s}$  と定義していることから、過渡時間の定義は同じであり、両者を比較することに意味がある。しかし、この予測式には適用できる流れ領域および定常状態に達するまでの時間  $T_s$  の定義について明確な記載が無いため厳密な評価は出来ない。そこで著者らは過渡時間  $\tau_{t,s}$  から有次元過渡時間を求め、これが式(10)の  $T_s$  と等しいと仮定して、式(8)と比較した結果が Fig.16 である。黒抜き印のものは川嶋らの LDV 測定による実験値を、白抜き印のものは今回の PIV 測定による結果を表しており、 $-30\% \sim +40\%$  の偏差で一致している。従って式(8)は層流域に対して適用できる予測式であることが判明した。ただし、式(7)にはやや劣るが、もともと式(8)は二重円筒容器内の流れを対象として導かれていることを考慮すると優れた予測式であると言え、今回の結果から層流であれば様々な流れ場に適用できる可能性がある。

#### 4. 結論

回転円筒容器内の流れが層流域 ( $Re = 36.6 \sim 79.0$ ) にあるときの過渡時間について実験的検討を行い、既知の予測式の適用範囲を明らかにし、新たな予測式の導出を行った。

PIV 測定によって得られた無次元時間  $\tau$  と無次元速度  $\phi$  の関係は、本研究で対象としたレイノルズ数領域において層流数値解によく一致した。またこの関係を、鉛直方向成

分の運動量交換を無視し、流れを無限長円筒容器内の層流と仮定して求めた接線方向速度の発達の数値解と比較した結果、アスペクト比  $H_L/D$  が小さくなるにつれ円筒容器内攪拌過程は無限長円筒容器内層流よりも短い時間で推移することが分かった。

過渡時間  $\tau_{t,s}$  に関する LDV による Iguchi らの予測式は遷移域においては適用可能であるが、本研究で対象とした層流のレイノルズ数領域では適用できなかった。そこで、新たに過渡時間  $\tau_{t,s}$  の予測式の導出を行い、 $-25\% \sim +30\%$  の偏差で予測可能な次式を得た。

$$\tau_{t,s} = 1.45(H_L/D)^{0.64} \text{Re}^{-0.80} \quad (0.52 < H_L/D < 2.61) \dots\dots\dots (7)$$

過渡時間  $\tau_{t,s}$  の本測定値を川嶋らの予測式と比較した結果、 $-30\% \sim +40\%$  の偏差で一致した。したがって、川嶋らの予測式が層流域に対して適用できる予測式であることが判明した。

記号

- $D$  : 円筒容器内径 (mm)
- $H_L$  : 円筒容器内液体高さ (mm)
- $\bar{d}_p$  : トレーサー粒子の平均粒径 ( $\mu\text{m}$ )
- $\rho_p$  : トレーサー粒子の密度 ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )
- $\rho_{sw}$  : 食塩水の密度 ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )
- $\nu$  : 食塩水の動粘度 ( $\text{m}^2/\text{s}$ )
- $\omega$  : 角速度 ( $\text{rad}/\text{s}$ )
- $\text{Re}$  : レイノルズ数 ( $=R(\omega/\nu)^{1/2}$ ) (-)
- $R$  : 円筒容器半径
- $r$  : 半径位置 (mm)
- $v_{\theta, \text{cal}}$  : 接線方向速度の計算値 ( $\text{mm}/\text{s}$ )
- $v_{\theta}$  : 接線方向速度 ( $\text{mm}/\text{s}$ )

- $t$  : 時間 (s)
- $\xi$  : 無次元半径 ( $=r/R$ ) (-)
- $\tau$  : 無次元時間 ( $=vt/R^2$ ) (-)
- $\phi$  : 無次元速度 ( $=v_{\theta}/R\omega$ ) (-)
- $\tau_{t,s}$  : 無次元過渡時間 (-)
- $T_s$  : 定常状態に至るまでの所要時間 (s)

文 献

- 1) Y.Kato, S.Hiraoka, Y.Tada, S.Shirai, T.Ue, S.-T.Koh and T. Yamaguchi: *Kagaku Kogaku Ronbunshu*, **21** (1995), 365.
- 2) Y.Kato, S.Hiraoka, Y.Tada, T.Mori, S.Shirai, T.Ue and S.-T.Koh: *Kagaku Kogaku Ronbunshu*, **20** (1994), 437.
- 3) G.Kawashima and W.J.Yang: *Exp. Fluids*, **6** (1988), 165.
- 4) G.Kawashima and W.J.Yang: Proc. Measuring and Metering of Unsteady Flows, vol. 106, ASME, New York, (1991), 41.
- 5) G.Kawashima and W.J.Yang: Flow Visualization, vol. V, Hemisphere, New York, (1989), 633.
- 6) 綾田研三: 第 129・130 回西山記念技術講座, 日本鉄鋼協会編, 東京, (1988), 103.
- 7) S.Yokoya, M.Iguchi, S.Takagi and M.Sakamoto: *ISIJ Int.*, **38** (1998), 421.
- 8) M.Iguchi, M.Sakamoto, H.Kawabata and S.Yokoya: *ISIJ Int.*, **38** (1998), 1180.
- 9) M.Kawashima, H.Ogami and W.J.Yang: *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng.*, **61B** (1995), 2918.
- 10) X.Song, F.Yamamoto, M.Iguchi and Y.Murai: *Exp. Fluids*, **26** (1999), 371.
- 11) X.Song, F.Yamamoto, M.Iguchi, M.Koketsu and G.Chen: *ISIJ Int.*, **36** (1996), S54.
- 12) Y.Sada, K.Sato, N.Kasagi and N.Takamura: *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng.*, **60B** (1994), 865.
- 13) 山本富士夫, 宋 向群: 日本機械学会講習会教材, 日本機械学会, 東京, (1997).
- 14) N.Tsuda, T.Kobayashi, T.Saga and S.Segawa: *Preprint of Jpn. Soc. Mech. Eng.*, **910** (1991), 316.
- 15) H.P.GreenSPAN: The Theory of Rotating Fluids, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1980), 275.