

高周波誘導加熱・スカル融解におけるスカルおよびプール形成の数学的モデル

阿部 芳久*・佐々 健介*²・桑原 守*²・浅井 滋生*²

Mathematical Modeling of Skull and Pool Formation in High-frequency Induction Skull Melting

Yoshihisa ABE, Kensuke SASSA, Mamoru KUWABARA and Shigeo ASAI

Synopsis : A large portion of ceramics, salt and glass have a property with high electric conductivity at liquid state and with low one at solid state. By making use of such electrical property a direct induction skull melting process was developed to melt and hold those materials, especially with a high melting point and chemical active properties, for avoiding contamination from a crucible. In order to understand the characteristics of melting behavior of the materials in the process the theoretical study on temperature, magnetic and velocity fields which are tightly related with each other is indispensable.

In this study a mathematical model taking account of the distributions of temperature, magnetic and velocity fields is developed. The experimental work to melt a NaCl salt has been conducted. The observed evidence in the experiment has been confirmed by the mathematical model.

Key words: skull melting; electromagnetic processing of materials; heating; induction heating; non-contamination heating; modelling.

1. 緒言

セラミックス、塩、ガラスなどの多くは融点以下の温度においては電気絶縁性を示すものの、融解に伴って電気伝導度が著しく上昇するため、最初に適当な大きさの融液部を造っておけば、金属など電気良導性材料と同様に誘導加熱が可能である。このように被融解物の電気伝導特性を利用する高周波誘導加熱・スカル融解法には、磁場発生用の水冷コイルを直接つぼとして利用するもの^{1,2)}とコールド・クルーシブル（水冷された導電性つぼ）を使用するものがある。高周波磁場印加による誘導発熱により、溶融領域が拡大するが、水冷炉壁近傍では冷却によりその拡大は抑制され、未融解層と再凝固層または焼結層とから成るスカルを形成する。このスカルにより溶融部は直接炉壁に接触することがないため、非汚染融解が可能となり、炉材選択の必要がなくなる。

本法は、1960年に Sterlingと Warren³⁾の研究に始まり、1970年代初期に Aleksandrov⁴⁾らによって実用化の域まで高められた。現在、本法は一方向凝固やCZ法のつぼとして採用され、MgO、TiO₂、Fe₃O₄、Nd₃Ga₅O₁₂、ZrO₂などの単結晶の製造に使用されている^{4,5)}。また、非汚染融解の特色を活かして高級ガラスの溶解炉および放射性廃棄物のガラス固化用の融解炉としても注目を集めている。

本融解法では、温度場、磁場および速度場が相互に強く

結びついており、これらのプロセス変数の特性を把握することなしには本プロセスの合理的設計は望めない。これまでのところ、本法の理論解析の報告^{1,2)}はわずかであり、未だ十分とは言えない状況にある。本研究では、融解炉内の温度分布、磁場分布、固液界面位置および融液内対流を考慮した数学的モデルを構築すると共に、塩を用いたモデル実験を行い数学的モデルの検証を行ったので報告する。

2. 実験

実験装置の模式図を Fig. 1 に示す。周波数 4 MHz のコールド・クルーシブル型誘導炉に、被融解物として粒状の塩化ナトリウムを装填し、初期加熱体として導電性の黒鉛塊

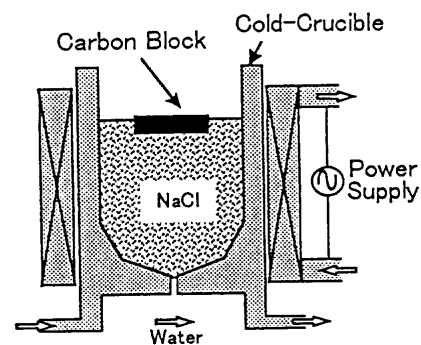


Fig. 1. Schematic view of the experimental apparatus.

平成 10 年 7 月 24 日受付 平成 10 年 9 月 25 日受理 (Received on July 24, 1998; Accepted on Sep. 25, 1998)

* 名古屋大学大学院生 (現: 東芝セラミックス (株)) (Graduate Student, Nagoya University, now Toshiba Ceramics Co., Ltd.)

* 2 名古屋大学大学院工学研究科 (Graduate School of Engineering, Nagoya University, Furuo-cho Chikusa-ku Nagoya 464-8603)

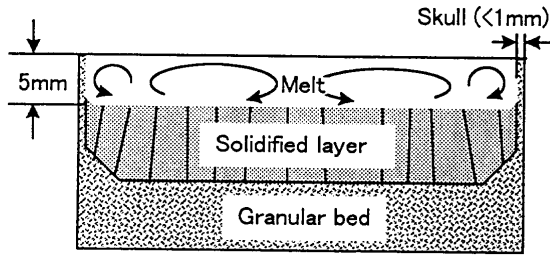


Fig. 2. Schematic view of each layer and flow pattern under the steady state condition.

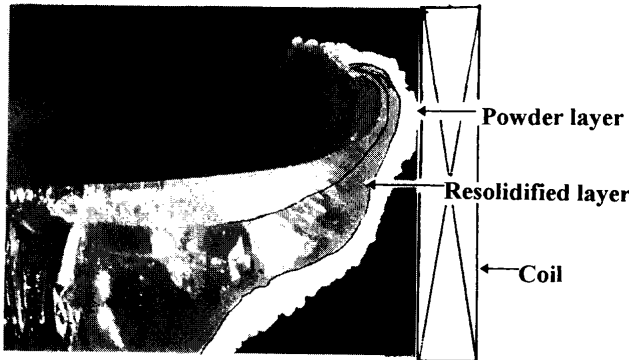


Fig. 3. Photograph of liquid layer solidified after reaching the steady state condition and a surrounding skull layer.

を被融解物の表面中央部に埋設した。最初、初期加熱体が高周波磁場により誘導加熱されると、それを熱源として被融解物に深さ約30mmの初期プールが形成された。その後、この加熱体を取除くと、プールの底部より凝固が始まり、最終的に深さ約5mm程度のプールとなって安定保持された。融体部での浮遊物の動きから推察した流動パターンと実験終了後の調査から判明した被融解物内各層の形状を模式図としてFig. 2に示す。すなわち、プール内には二つの循環流の存在が認められた。形成されたスカルは、Fig. 3の写真(各層間を明瞭にするため、境界線を入れた)に示すとおり粉体層と再凝固層から構成されていた。なお、Fig. 3に示した安定状態からプール深さの拡大を狙って電源出力を上げてみたが、プールは深くならず、メニスカス近傍のスカル層のみが融解した。

3. 数学的モデル

融解炉内の温度分布、磁場分布、融液の速度分布を予測するために、非定常2次元軸対称の伝熱モデル、電磁場モデルおよび流動モデルを展開する。

3.1 伝熱モデル

磁場による誘導発熱を考慮したエネルギー方程式は(1)式となる。

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (v \cdot \nabla) T \right) = -\nabla \cdot (-\lambda \nabla T) + \frac{|J|^2}{\sigma} \dots\dots\dots (1)$$

ただし、密度と比熱は一定とし、被融解物の融解・凝固に伴う潜熱の取扱いは温度回復法⁶⁾を採用した。なお、解析領域は半径50mm、深さ30mmの円柱状領域とした。

次に境界条件としては、周囲の水冷却壁では総括伝熱係数 h_{water} と水温 T_{water} に基づくニュートン冷却、上表面では雰囲気温度 T_a への放射冷却、被融解物の粉体層を介して徐冷が行われている底面では軸方向に熱伝導流束の勾配はないとする流束の連続条件を採用した。なお、モデルでは初期加熱の取扱いは被融解物直上に設置した発熱体からの放射伝熱によるものとし、期間 $(0 \leq t \leq t_{ini})$ において中心の一部領域 $(0 \leq r \leq r_{ini})$ の直上の温度を T_{ini} に設定した。所定の領域のプールを形成後は、コイルに通電して誘導加熱による発熱でプールを拡大させた。被融解物の状態は4態(粉体層、再凝固層、固液共存層、液相)のいずれかであるとし、この違いは熱伝導度に反映させた。特に、粉体層の熱伝導度にはその空隙率、粒子径などを考慮した八木・国井⁷⁾ による有効熱伝導度の式を採用した。

3.2 電磁場モデル

ここで採用した wire model^{8,9)} を以下に示す。

太さのない半径 ρ_i のワイヤーが垂直位置 ξ_i に水平ループを作るとして、これに電流 I_i を流す時、任意の位置 (r_p, z_p) に生じる磁気ベクトルポテンシャルは方位角方向 (θ) 成分 $A_{\theta p, i}$ のみとなり(2)~(4)式で表される。

$$A_{\theta p, i} = \frac{\mu_0 I_i}{\pi} f_{p, i} \dots\dots\dots (2)$$

$$f_{p, i}(\rho_i, \xi_i, r_p, z_p) = \sqrt{\frac{\rho_i}{m_{p, i} r_p}} \left\{ \left(1 - \frac{m_{p, i}}{2} \right) K(\sqrt{m_{p, i}}) - E(\sqrt{m_{p, i}}) \right\} \dots\dots\dots (3)$$

$$m_{p, i} = \frac{4 \rho_i r_p}{(r_p + \rho_i)^2 (z_p - \xi_i)^2} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $K(x)$ 、 $E(x)$ はそれぞれ第一種および第二種の完全楕円積分関数である。本解析では、 r - z 面内の微小断面素片内を一定の電流が水平ループを描くと仮定し、被融解物内を半径方向に対して m 個、軸方向に対して n 個、計 $m \times n$ 個の電流ループとして離散化した。なお、高周波コイルでは中心側の断面内に電流が集中して流れる傾向があるので、コイルの内半径の位置にコイルに相当するワイヤーを配置した。各電流ループが任意の位置につくるベクトルポテンシャルの成分の和は(5)式となる。

$$A_{\theta p} = \sum_{i=1}^{m \times n} A_{\theta p}(\text{Charge}) + \sum_{i=1}^{n_{\text{coil}}} A_{\theta p}(\text{Coil}) \dots\dots\dots (5)$$

Faradayの電磁誘導則およびOhmの法則から k 番目の電流

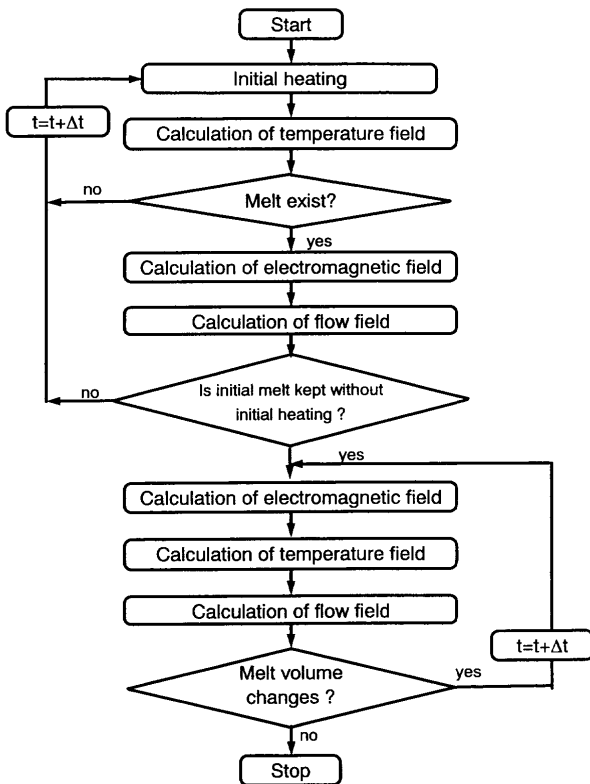


Fig. 4. Flow chart for numerical calculation.

ループに生じる渦電流密度は(6)式となる。

$$J_{\theta k} = -j\omega\sigma A_{\theta k} \dots\dots\dots (6)$$

この式の右辺の $A_{\theta k}$ は $J_{\theta i}$ ($i=1\sim(m\times n+n_{\text{coil}})$) によって表せるので、(6)式は $J_{\theta k}$ と $m\times n$ 個の未知数 $J_{\theta i}$ との関係式を表す。(6)式の関係性を全ての $J_{\theta i}$ について書き表せば、 $m\times n$ 元の複素係数連立方程式となり、その解から電流密度 $\mathbf{J}(0, J_{\theta}, 0)$ が求まる。次に、電流密度から単位体積当たりの発熱速度 $q_{\text{vol}}(=|\mathbf{J}|^2/\sigma)$ が求まり、さらに(6)式を用いるとベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(0, A_{\theta}, 0)$ が求まるので、 \mathbf{A} から磁束密度 $\mathbf{B}(=\nabla\times\mathbf{A})$ 、電磁気力 $\mathbf{F}(=\mathbf{J}\times\mathbf{B})$ が順次求まる。

3.3 融液内流動モデル

融液は非圧縮粘性流体で層流とした。連続の式および運動方程式はそれぞれ(7)、(8)式となる。

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0 \dots\dots\dots (7)$$

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right)=-\nabla P+\nabla\cdot(\mu\nabla\mathbf{v})+\mathbf{F} \dots\dots\dots (8)$$

一方、体積力 \mathbf{F} として電磁気力と浮力を考慮すれば(9)式となる。

$$\mathbf{F}=\mathbf{J}\times\mathbf{B}+\rho\beta(T_{\text{m.p.}}-T)\mathbf{g} \dots\dots\dots (9)$$

なお、浮力に関しては Boussinesq 近似を採用した。

ところで(7)、(8)式は融液の領域のみで成立する式であるため、固液界面の移動に伴って境界位置を再設定する

Table 1. Physical properties of sodium chloride.

Density ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)	ρ	1500
Electric conductivity ($\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$)	σ_1	370 (melt)
	σ_s	$\ll 1$ (solid)
Emissivity (-)	ϵ	0.8
Heat capacity ($\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$)	C_p	1.14×10^3
Latent heat of fusion ($\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$)	ΔH	4.78×10^5
Melting temperature (K)	$T_{\text{m.p.}}$	1074
Thermal conductivity ($\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$)	λ_1	10 (melt)
	λ_s	10 (solid)
	λ_{gr}	1 (granular)
Volumetric expansion coefficient of (K^{-1})	β	3.38×10^{-4}
Viscosity ($\text{Pa}\cdot\text{s}$)	μ_1	1.61×10^{-3} (melt)
	μ_s	$\gg 1$ (solid)

Table 2. Operating parameters of the process.

Coil height (m)	Z_{coil}	0.09
Coil inner radius (m)	R_{coil}	0.05
Coil turn number (-)	N	7
Frequency of applied A.C. (Hz)	f	4×10^6
Effective coil current (A)	I_{coil}	26
Skin depth(m)	δ_1	1.3×10^{-2} (melt)
	δ_s	$\gg 1$ (solid)
Temperature of cooling water (K)	T_{water}	300
Overall heat transfer coefficient ($\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$)	h_{wall}	1000
Ambient temperature (K)	T_a	300
Top position of embedded material (m)	Z_{top}	0.08
Bottom position of embedded material(m)	Z_{bot}	0.05

必要がある。しかし、その取扱いは煩雑となるため、取束過程の温度場から固相と判定された領域には液相の粘性係数の 10^4 倍の値を与え、固相と液相とを一括して解析した。

3.4 数値計算法

コントロール・ボリューム法¹⁰⁾に基づき伝熱モデルの(1)式、流動モデルの(7)、(8)式を陰解法にて離散化し、得られた線形代数方程式を不足緩和法を用いて数値計算した。なお、流動モデルは流速と圧力を未知数とし、そのアルゴリズムは Patanker¹⁰⁾による SIMPLE法を採用した。計算時間の短縮のため、電磁場の計算は固液界面が大きく変化した時のみ行った。また、被融解物は粉体および再凝固相状態において電気絶縁性を示すものとし、融液内のみで誘導電流 $J_{\theta i}$ を求めた。計算に採用した被融解物内の格子点は、電磁場計算を含めて半径方向41点、軸方向20点であり、半径方向に限って炉壁近傍で格子が密になるように配置した。伝熱、融液内流動、電磁場のそれぞれのモデル

Table 3. Initial heating conditions.

Heated temperature(K)	T_{ini}	1400
Heating period(s)	t_{ini}	400
Heating area(m)	r_{ini}	0.035

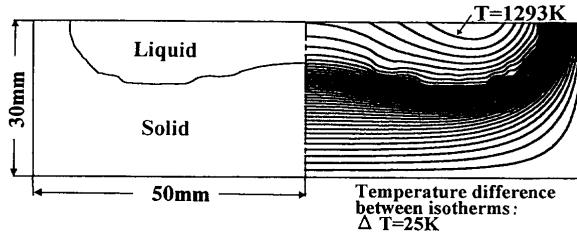


Fig. 5. Calculated solid-liquid interface (left) and isotherms (right) after initial heating.

は相互に密接な関係を持つため、Fig. 4に示すフローチャートに従ってそれらを連成して解いた。

3.5 数学的モデルの妥当性の検討

計算条件を Table 1 と Table 2 に、初期加熱の条件を Table 3 に示す。実験では水冷壁としてコールド・クルーシブルを用いたが、計算では磁場を発生する水冷コイルを炉壁としており、両系は厳密には一致しない。すなわち実験ではコールド・クルーシブルによる電磁場エネルギーの損失が考えられるので、出向井等¹¹⁾の報告に基づいてその効率を4割と見積り、印加電流を65Aとした。

初期加熱によって形成されたプール形状およびその温度分布を Fig. 5 に示す。また、それを初期条件とし、プール直上に設置してあった発熱体を取除いて誘導加熱のみで定常状態に達した時の温度分布ならびに速度ベクトルを Fig. 6 に示す。この計算条件下では、中心部の上部に見られる最大の過熱度は140Kとなり、プール底部にはよどみ領域が見られる。これはD.C. Millerら¹²⁾が指摘しているように、融液の流動機構が電磁気力ではなく浮力が主体であることを同わせる。

一方、実験で得られたプール深さは数値計算結果の約25%にしか達しなかった。この理由として、計算においては放射伝熱はプール上部表面からのみとしたが、実際には、内部放射伝熱によって融液内部からも直接外部へ熱が奪れたと考えられる。

次に、内部放射伝熱を考慮した計算について述べる。塩化ナトリウムは半透明であるので、光学的厚みは薄いとて、放射熱流束を(10)式で近似した¹³⁾。

$$q_r = \alpha \frac{\pi}{\frac{1}{\epsilon_i} + \frac{1}{\epsilon_b} - 1} (\sigma_{SB} T_a^4 - \sigma_{SB} T_b^4) \dots \dots \dots (10)$$

ここで添え字の*i*は固液界面、*b*は*i*に対向する固液界面もしくは雰囲気を表わす。 α は固液界面で1となり、それ以外では0となる係数である。この式を放射エネルギーを考慮したエネルギー方程式である(11)式に代入した。

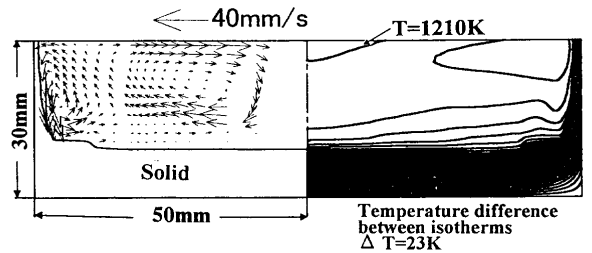


Fig. 6. Calculated velocity field and solid-liquid interface (left) and calculated isotherms (right) under the steady state condition.

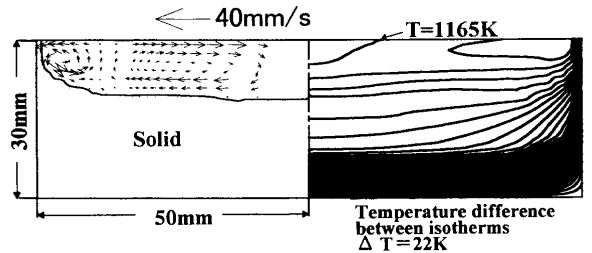


Fig. 7. Velocity field and solid-liquid interface (left) and isotherms (right), calculated by taking account of internal radiation

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (v \cdot \nabla) T \right) = -\nabla \cdot (-\lambda \nabla T + q_r) + \frac{|J|^2}{\sigma} \dots \dots \dots (11)$$

Fig. 5に示した結果を初期値として、(1)式に代わり(11)式を用いて計算した結果を Fig. 7 に示す。内部放射伝熱を考慮していない計算結果(Fig. 6)と比較して、プール深さは浅くなり、実験結果により近くなった。なお、温度分布の傾向に関しては著しい変化は見られないが、全体的に過熱度が50K程度減少している。また、Fig. 6で見られたプール底部のよどみ領域が消失している。これは過熱度の低下に伴い浮力が減少し、電磁気力による強制対流が顕在化した結果と言える。ここでは二つの循環流が形成されており、実験結果 (Fig. 2参照) と定性的な一致が見られる。スカル厚みは融液内の流動と温度分布を反映して融液表面においてもっとも薄く、下方へ向かうに従いその厚みを増している。これも、Fig. 3に示したプール形状と合わせて実験結果と定性的に一致している。なお、磁場強度はコイル高さの中心で最大となるためプール表面をコイル高さの中心に設定するとプール表面でジュール発熱が増大し、メニスカス近傍のスカル厚みの減少を招き短絡の恐れがある。この点は電源出力を上げたときに見られた実験結果で実証されたところである。

4. 結言

高周波誘導加熱・スカル融解法における炉内の状況を把握するため、温度場、流動場、磁場の分布を考慮した数学的モデルを展開した。次に、コールド・クルーシブルを用

いた塩化ナトリウムの融解実験を行って数値計算結果の検証を行った。以下に得られた結果を示す。

1) 溶融塩の融解・保持がコールド・クルーシブルを用いて行えることを確認した。

2) 目視によって認められたプール内の二つの循環流は電磁気力による強制対流が自然対流を凌駕したことにより生じたものである。

3) 透明度の高い塩化ナトリウムのような溶融塩では、内部放射伝熱を考慮する必要がある。

記号

A	: ベクトルポテンシャル (T·m)
B	: 磁束密度ベクトル (T)
C_p	: 比熱 ($J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$)
F	: 外力ベクトル (N)
f	: 電源周波数 (Hz)
g	: 重力加速度ベクトル ($m \cdot s^{-2}$)
h	: 総括伝熱係数 ($W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$)
ΔH	: 融解潜熱 ($J \cdot kg^{-1}$)
I	: 電流 (A)
j	: 複素数単位 ($=\sqrt{-1}$) (-)
J	: 電流密度ベクトル ($A \cdot m^{-2}$)
N	: コイルの巻き数 (-)
P	: 圧力 (Pa)
r	: 半径方向距離 (m)
R	: 融解炉半径 (m)
T	: 温度 (K)
t	: 時間 (s)
v	: 速度ベクトル ($m \cdot s^{-1}$)
z	: 軸方向距離 (m)
Z_{coil}	: コイルの高さ (m)
β	: 体積膨張率 (K^{-1})
δ_l	: 液相の電磁浸透厚み (m)
δ_s	: 固相の電磁浸透厚み (m)
ε	: 放射率 (-)
λ	: 熱伝導度 ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)
ρ	: 密度 ($kg \cdot m^{-3}$)
ρ_i	: 電流ループ半径 (m)

μ	: 粘性係数 ($Pa \cdot s$)
σ	: 電気伝導度 ($S \cdot m^{-1}$)
σ_{SB}	: ステファン・ボルツマン定数 ($W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$)
ξ_i	: 電流ループ軸方向位置 (m)
ω	: 角速度 ($=2\pi f$) (s^{-1})

添え字

a	: 雰囲気
b	: 固液界面もしくは雰囲気
bot	: 底部
coil	: コイル
gr	: 粉体層
i	: 固液界面
ini	: 初期
l	: 液相
m.p.	: 融点
r	: 放射
s	: 固相
top	: 最上部
water	: 冷却水
wall	: 側壁部

文献

- 1) B.Caillault, Y.Fautrelle, R.Perrier and J.J.Aubert: Liquid Metal Magneto-hydrodynamics, ed. by J.Lielpeteris and R.Moreau, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London (1989), 241.
- 2) T.Takasu, K.Sassa and S.Asai: *Tetsu-to-Hagané*, **77** (1991), 496
- 3) H.F.Sterling and R.W.Warren: *Nature*, **25** (1961), 745.
- 4) V.I.Aleksandrov, V.V.Osiko, A.M.Prokhorov and V.M.Tatarintsev: *Vestn. Akad. Nauk SSSR*, **12** (1973), 29.
- 5) J.F.Wenckus: *J. Cryst. Growth*, **128** (1993), 13.
- 6) I.Ohnaka and T.Fukusako: *Trans. Iron Steel Inst. Jpn.*, **17** (1977), 410.
- 7) 国井大蔵: 熱的単位操作 (上), 丸善, 東京, (1976), 132.
- 8) E.D.Tarapore and J.W.Evans: *Metall. Trans. B*, **7B** (1976), 343.
- 9) H.Makino, M.Kuwabara and S.Asai: *Tetsu-to-Hagané*, **81** (1995), 11.
- 10) 水谷幸夫, 香月正司訳: コンピュータによる熱移動と流れの数値解析 (第一版第5刷), 森北出版, 東京, (1990), 130.
- 11) 出向井登, 一柳信吾, 芝田智樹: 材料電磁プロセッシング部会資料(9-4), 日本鉄鋼協会, 東京, (1992).
- 12) D.C.Miller and T.L.Pernell: *J. Cryst. Growth*, **53** (1981), 523.
- 13) FR.Viskanta: Advance in HEAT TRANSER, ed. by T.F.Irvine, Jr. and J.P.Hartnett, Academic Press, New York, (1966), 176.