

みかけの対流伝熱係数に及ぼす粒子内伝熱抵抗の影響

佐藤 克也*・村山 武昭*²・小野 陽一*²

Effect of Thermal Resistance in a Sphere on Apparent Convective Heat Transfer Coefficient

Katsuya SATO, Takeaki MURAYAMA and Yoichi ONO

Synopsis : The apparent convective heat transfer coefficient between a spherical particle and a surrounding fluid was investigated by the techniques of numerical analysis and dimensional analysis in case of a considerable heat transfer resistance in the particle.

The ratio of the apparent Nusselt number, Nu' , to the true Nusselt number, Nu , was found to be related with Biot number, Bi , by the following equation.

$$\frac{Nu'}{Nu} = \frac{1}{n \cdot Bi + 1}$$

In this equation, the value of n was as follows; (1) n was 0.2 in case of a constant heat flux between the particle and the fluid, and (2) n varied with Bi number in case of a constant fluid temperature.

Key words : convective heat transfer coefficient; numerical analysis; heat flux; Biot number; dimensional analysis.

1. 緒言

高炉における伝熱現象の解明は、より小さい燃料比で安定的に溶銑を得るといった製銑工程の主要目的を達するために必須の課題である。高炉内の伝熱現象には、伝導伝熱・対流伝熱・放射伝熱が合わさっており、複雑である。従来、数値解析はこの伝熱現象の解明において重要な手段として用いられている。

一例としてコークスとガスとの対流伝熱現象についての数値解析を考えてみる。通常、高炉内の数値解析では、粒子の代表温度として粒子表面温度ではなく、粒子内部の温度を均一とした平均温度を採用している。しかし、対流伝熱現象を示す「ニュートンの冷却法則」では対流伝熱量は粒子表面温度と流体温度との差に比例する。

ここで、コークスのように熱伝導度が小さい、つまり粒子内伝熱抵抗が大きい物質では粒子内に温度分布が生じ、粒子の表面温度と代表温度（平均温度）との差が大きくなる。代表温度として平均温度を採用するならばコークス内の温度分布を考えて、伝導伝熱まで考慮して解析を行わなければならない。しかしこれは数値解析において、時間的にも経済的にもコストが大きくなる。

そこで粒子内の温度分布が均一とした、平均温度 T_m と流体温度 T_∞ とのみかけの対流伝熱現象を考えてみる。これは、みかけの対流伝熱係数 h' を用いて以下のような簡単な式で表

される。

$$q = h'(T_m - T_\infty) \dots\dots\dots (1)$$

B. Stuke¹⁾は、粒子内の時間的・空間的平均温度を数学的に計算し、みかけの対流伝熱係数 h' と真の対流伝熱係数 h との関係が(2)式で表されることを報告している。

$$\frac{h'}{h} = \frac{1}{0.2Bi + 1} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、(2)式におけるビオ数 Bi は、(3)式のように粒子内伝熱抵抗 R/k_s と対流伝熱抵抗 $1/h$ との比を表しており、このビオ数が大きいほど粒子内伝熱抵抗の寄与が大きいことを意味する。

$$Bi = \frac{\left(\frac{R}{k_s}\right)}{\left(\frac{1}{h}\right)} = \frac{hR}{k_s} \dots\dots\dots (3)$$

高炉内のコークスと溶銑との対流伝熱現象ではビオ数は50~100となり、B. Stukeの式((2)式)より h'/h は0.05~0.10となる。つまり、みかけの対流伝熱係数は真の対流伝熱係数の0.05~0.10倍となり、この値を用いることにより、みかけ上粒子内温度分布が均一という条件で解析することが可能である。

そこで、本研究では様々な粒子内伝熱抵抗における、み

平成7年12月1日受付 平成8年3月4日受理 (Received on Dec. 1, 1995; Accepted on Mar. 4, 1996)

* 九州大学大学院生 (現:川崎製鉄(株)) (Graduate Student, Kyushu University, now Kawasaki Steel Corp., 6-10-1 Hakozaki Higashi-ku Fukuoka 812)

* 2九州大学工学部 (Faculty of Engineering, Kyushu University)

かけの対流伝熱係数を数値解析により求め、B. Stukeの式との比較を行った。また、粒子内伝熱抵抗が大きい場合のみかけの対流伝熱係数の推定法を次元解析及び数値解析により検討したので報告する。

2. 数値解析

本研究では、粒子形状を球とし、粒子内温度分布を半径方向非定常熱伝導の関係から求めた。みかけの対流伝熱係数 h' は粒子平均温度の温度低下曲線から算出し、粒子内伝熱抵抗の影響について調査した。

2.1 解析方法

数値解析は、球座標におけるエネルギー方程式((4)式)をCrank-Nicholsonの陰解法²⁾を用いて差分化し、以下の境界条件((5)式)で解くことにより半径方向における温度分布を求めた。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] \dots\dots\dots (4)$$

粒子表面においては

$$-4\pi R^2 k_s \frac{\partial T}{\partial r} = 4\pi R^2 h (T_s - T_\infty) \dots\dots\dots (5)$$

が成り立つ。また、粒子の中心においては

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

が成り立つ。

粒子内に温度分布があるとき、平均温度 T_m は(7)式で表される。ここで、 ρ_i 、 C_i 、 T_i はそれぞれ体積要素 V_i の密度、比熱、温度である。

$$T_m = \frac{\int \rho_i C_i T_i dV_i}{\int \rho_i C_i dV_i} \dots\dots\dots (7)$$

粒子内で密度、比熱を一定とみなすと(7)式を変形して(8)式が得られる。

$$T_m = \frac{\int T_i dV_i}{\int dV_i} \dots\dots\dots (8)$$

今回の数値解析は球を対象としたので、半径をM等分してそれぞれの体積要素とした。(8)式を、差分計算することにより、平均温度 T_m は(9)式で表される。

$$T_m = \frac{\sum_{n=1}^M (3n^2 - 3n + 1) \frac{T(n) + T(n-1)}{2}}{M^3} \dots\dots\dots (9)$$

一般に、高炉内の数値解析においては、温度雰囲気一定の条件が用いられている。そこで、初期温度が T_0 の球(半

径R)を一定温度 T_∞ の流体に移し t 秒後に球平均温度が T_m になった場合を考えてみる。このとき、球のエンタルピーの減少量と球からの放熱量は等しく、(10)式で表される³⁾。

$$-\rho_s C_s V \frac{dT_m}{dt} = h' A (T_m - T_\infty) \dots\dots\dots (10)$$

ここで、Aは球表面積、Vは球体積である。

初期条件は

$$t = 0 \text{ の時 } T_m = T_0$$

この初期条件で(10)式を解くと、

$$h' = \frac{\rho_s C_s R}{3t} \ln \left(\frac{T_m - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right) \dots\dots\dots (11)$$

が得られる。ヌセルト数Nuは、対流伝熱係数 h に参照長さ(球の場合は直径2R)を掛けて流体の熱伝導度 k_L で割って無次元化したもので以下のように定義される。

$$Nu = \frac{h(2R)}{k_L} \dots\dots\dots (12)$$

ヌセルト数の定義を用いると(11)式は

$$Nu' = -\frac{2\rho_s C_s R^2}{3k_L t} \ln \left(\frac{T_m - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right) \dots\dots\dots (13)$$

となる。

(13)式は平均温度 T_m の温度低下から得られるみかけのヌセルト数の解析解である。しかし、(13)式内の平均温度 T_m は粒子内の伝熱抵抗によって変化する温度分布によって決定される。この粒子内の温度分布と伝熱抵抗の関係はM.P. Heisler⁴⁾により求められているが、これを用いて平均温度を求め、さらにみかけの対流伝熱係数を求めることは多大な労力を要する。

そこで本研究では数値解析により、様々な粒子内伝熱抵抗における粒子内の温度分布を求め、平均温度低下曲線から(13)式を用いてみかけのヌセルト数を求めた。

2.2 解析結果

Fig. 1に解析結果を示す。縦軸はみかけのヌセルト数 Nu' と真のヌセルト数Nuの比で、横軸はビオ数である。ビオ数の増加にともない、みかけのヌセルト数と真のヌセルト数の比が減少していることがわかる。

高炉内の対流伝熱現象において、コークスとガスではビオ数は0.5~2の値でみかけのヌセルト数は真のヌセルト数の3/4程度の値となる。また、コークスと溶銑ではビオ数は50~100となり、みかけのヌセルト数はかなり小さな値となる。

B. Stukeは時間的、空間的平均温度を数学的に求め、みかけのヌセルト数 Nu' と真のヌセルト数Nuとの関係が(14)、(15)式のように表されることを報告している¹⁾。

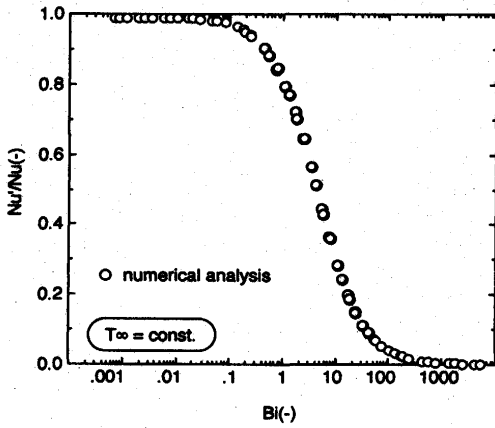


Fig. 1. Relation between Nu'/Nu and Biot number.

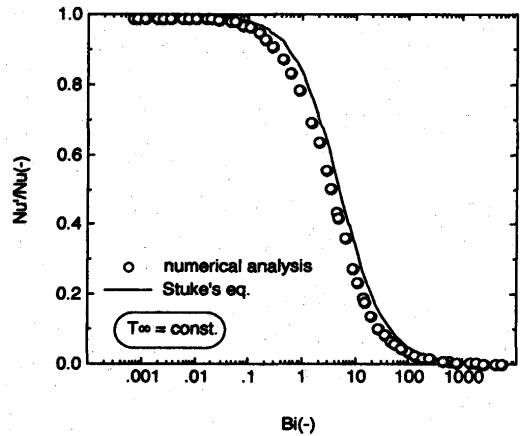


Fig. 3. Comparison of the result of numerical analysis with Stuke's equation.

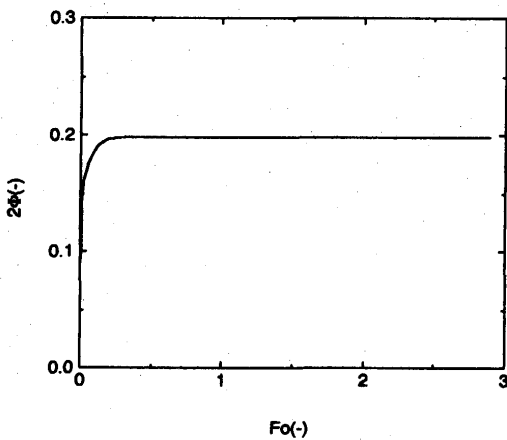


Fig. 2. Relation between 2Φ and Fourier number.

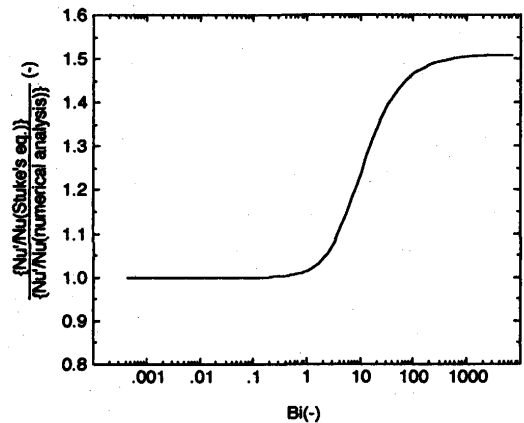


Fig. 4. Comparison of the result of numerical analysis with Stuke's equation.

$$\frac{Nu'}{Nu} = \frac{1}{\Phi \cdot \frac{hD}{k_s} + 1} \dots\dots\dots (14)$$

$$\Phi = K - \frac{1}{4Fo} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^4} \dots\dots\dots (15)$$

但し、球の場合 $K=0.1$ 、 x は $\tan(x) - x = 0$ の解
 球の場合は (14) 式の D に直径 $2R$ を代入して (16) 式のように整理される。

$$\frac{Nu'}{Nu} = \frac{1}{2\Phi \cdot Bi + 1} \dots\dots\dots (16)$$

Fig. 2 は、(15) 式より求めた (16) 式の 2Φ の値とフーリエ数との関係を示している。 2Φ の値は、フーリエ数の増加とともに 0.2 に収束する。高炉内の伝熱現象においてはフーリエ数は大きい範囲が問題となる。そこで現在、数値解析においてみかけのヌセルト数を用いる際には、(16) 式の 2Φ に 0.2 を代入した (17) 式が用いられている。

$$\frac{Nu'}{Nu} = \frac{1}{0.2Bi + 1} \dots\dots\dots (17)$$

そこで、(13) 式の計算結果と B. Stuke の式 ((17) 式) との

比較を行った。Fig. 3 においてプロットが計算結果で実線が B. Stuke の式である。Fig. 3 をみると、ビオ数が 0.1 以上の範囲ではほとんど一致していない。Fig. 4 は、B. Stuke の式がどの程度計算結果を大きく見積もっているか、この二つの比をとったものである。Fig. 4 によるとビオ数が 1 以上になると B. Stuke の式は計算結果を大きく見積もっていることがわかる。

上述したようにコークスとガス、コークスと溶鉄の対流伝熱現象においてはビオ数は 1 よりも大きくなるため、B. Stuke の式により求めたみかけの対流伝熱係数を用いると誤った計算を行ってしまう。

B. Stuke は球と流体間の熱流束が一定という条件で (17) 式を報告している。そこで、球と流体間の熱流束一定の際のみかけのヌセルト数を求めた。

2.3 みかけのヌセルト数 (熱流束一定) の算出

球と流体との熱流束一定の条件は以下のように表される。

$$\rho_s C_s \frac{dT_m}{dt} = const. \dots\dots\dots (18)$$

(18) 式の条件で (10) 式を解くと、

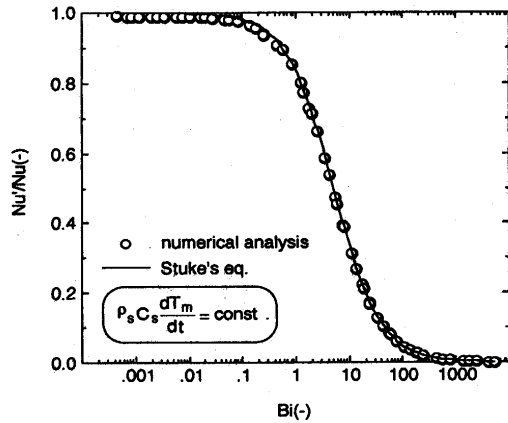


Fig. 5. Comparison of the result of numerical analysis with Stuke's equation.

$$Nu' = -\frac{2\rho_s C_s R^2}{3k_L t} \left(\frac{T_m - T_0}{T_m - T_\infty} \right) \dots (19)$$

が得られる。(19)式について同様の数値解析を行い、B. Stukeの式との比較を行った。

2・4 解析結果

解析結果をFig. 5に示す。Fig. 5をみると、この二つはよく一致していることがわかる。よって、B. Stukeの式は熱流束一定の場合の数値解析においては、みかけのヌセルト数を求める際に有効である。

3. 次元解析

B. Stukeの式は熱流束一定の場合の数値解析においては、みかけのヌセルト数の推定に有効であることがわかった。しかし、温度雰囲気一定の場合のみかけのヌセルト数の推定法が問題となる。そこで、みかけの対流伝熱現象について次元解析を行い、みかけのヌセルト数とビオ数との関係を探った。

3・1 原理

流体と粒子の代表温度との伝熱現象つまりみかけの対流伝熱現象に影響を与えるのは、Table 1に示される10個の要因と考えられる。

これらの要因と単位時間、単位面積当たりのみかけの熱流束 q は、(20)式の関係で表すことができる。

$$q \propto v^{\pi_1} x^{\pi_2} \Delta T_1^{\pi_3} \mu_L^{\pi_4} k_L^{\pi_5} \rho_L^{\pi_6} C_L^{\pi_7} (\beta g)^{\pi_8} k_s^{\pi_9} \Delta T_2^{\pi_{10}} \dots (20)$$

(20)式を Buckingham の π 定理⁵⁾を用いて整理すると(21)式のように整理できる。

$$\frac{qx}{k_L \Delta T_1} \propto \left(\frac{vx\rho_L}{\mu_L} \right)^{\pi_1} \left(\frac{\mu_L C_L}{k_L} \right)^{\pi_7} \left(\frac{\rho_L^2 x^3 \Delta T_1 \beta g}{\mu_L^2} \right)^{\pi_8} \left(\frac{k_s}{k_L} \right)^{\pi_9} \left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right)^{\pi_{10}} \dots (21)$$

ここで、対流伝熱による球表面からの熱流束 q_1 は、

Table 1. Factors affecting heat transfer phenomenon.

factor	symbol	international system	dimension
velocity of fluid	v	$m \cdot s^{-1}$	$L \cdot S^{-1}$
characteristic length of sphere	x	m	L
difference of temperature between surface of sphere and fluid	ΔT_1	K	T
viscosity of fluid	μ_L	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$	$M \cdot L^{-1} \cdot S^{-1}$
thermal conductivity of fluid	k_L	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$	$Q \cdot L^{-1} \cdot T^{-1} \cdot S^{-1}$
density of fluid	ρ_L	$kg \cdot m^{-3}$	$M \cdot L^{-3}$
specific heat of fluid	C_L	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	$Q \cdot M^{-1} \cdot T^{-1}$
buoyancy	βg	$m \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$	$L \cdot S^{-2} \cdot T^{-1}$
thermal conductivity of sphere	k_s	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$	$Q \cdot L^{-1} \cdot T^{-1} \cdot S^{-1}$
difference between surface temperature of sphere and mean one	ΔT_2	K	T

$$q_1 = h \Delta T_1 \dots (22)$$

粒子内の伝導により移動する熱流束 q_2 は、

$$q_2 = k_s \frac{\Delta T_2}{x} \dots (23)$$

流体と代表温度とのみかけの熱流束 q は、

$$q = h' (\Delta T_1 + \Delta T_2) \dots (24)$$

のように表すことができる。

(21)式を(22)、(23)、(24)式と無次元数を用いて整理すると(25)式が得られる。

$$Nu' \left\{ \left(\frac{q_2}{q_1} \right) Bi + 1 \right\} = K \cdot Re^a Pr^b Gr^c \left(\frac{k_s}{k_L} \right)^d \left\{ \left(\frac{q_2}{q_1} \right) Bi \right\}^e \dots (25)$$

ここで K は定数で、 $K \cdot Re^a Pr^b Gr^c$ の部分は従来報告されている真のヌセルト数との無次元相関式である。

この部分を Nu と置いて(25)式を変形すると(26)式のように整理できる。

$$\frac{Nu'}{Nu} = \left(\frac{k_s}{k_L} \right)^d \left[\frac{\left\{ \left(\frac{q_2}{q_1} \right) Bi \right\}^e}{\left\{ \left(\frac{q_2}{q_1} \right) Bi + 1 \right\}} \right] \dots (26)$$

ここで、 $Bi \rightarrow 0$ のとき、 $Nu'/Nu \rightarrow 1$ となることを考慮すると(26)式は(27)式のように表される。

$$\frac{Nu'}{Nu} = \left\{ \frac{1}{\left(\frac{q_2}{q_1} \right) Bi + 1} \right\} \dots (27)$$

簡単のため、 q_2/q_1 を n と置く。

$$\frac{Nu'}{Nu} = \frac{1}{n \cdot Bi + 1} \dots (28)$$

ここで、(28)式とB. Stukeの式((16)式)を比較すると、 $2\Phi = n$ の関係が得られる。また、この n は次元解析の結果より(29)式の関係で表される。

$$n = \frac{\left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right)}{Bi} \dots\dots\dots (29)$$

よって、 n つまり 2Φ はビオ数の関数であることがわかる。そこで、様々なビオ数における n の値を数値解析によって求めた。

3・2 解析結果

熱流束一定の条件で計算した結果を示す。Fig. 6は縦軸が n の値で横軸がフーリエ数である。フーリエ数 Fo は(30)式のように定義される。

$$Fo = \frac{at}{R^2} \dots\dots\dots (30)$$

熱流束一定の条件ではどのようなビオ数においてもFig. 6と同じ結果になった。上述のように実際の伝熱現象では、フーリエ数が大きい領域が問題となるので、収束した n の値を各ビオ数ごとに整理したものがFig. 7である。これより熱流束一定の各件の際には、 $n=0.2$ の値を用いているB. Stukeの式と一致することがわかった。

次に温度雰囲気一定の際の計算結果を示す。Fig. 8は縦軸が n の値、横軸がフーリエ数である。Fig. 8をみると温度雰

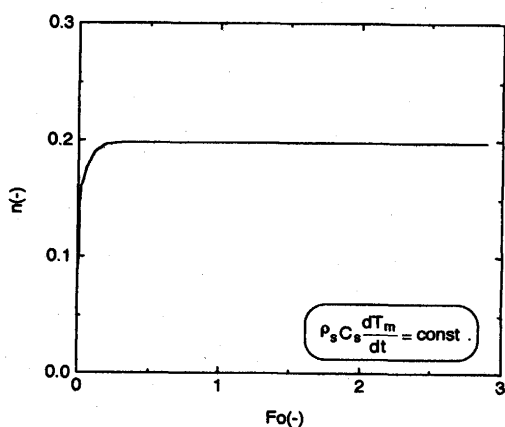


Fig. 6. Relation between n and Fourier number.

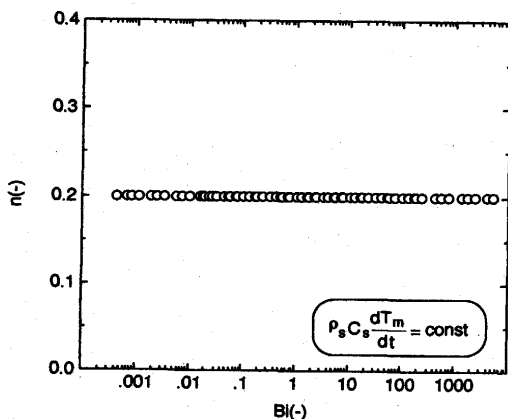


Fig. 7. Relation between n and Biot number.

囲気一定の際は、ビオ数によって収束する値が異なることがわかる。Fig. 9は、Fig. 7と同様に収束した値をビオ数ごとに整理したものである。ビオ数が0.1以下のときには n の値は0.2で一定だが、それ以上になると n の値は増加し0.3程度に収束する。

そこで、この n の値を用いた(28)式と、温度雰囲気一定の際の計算値((13)式)との比較を行った。

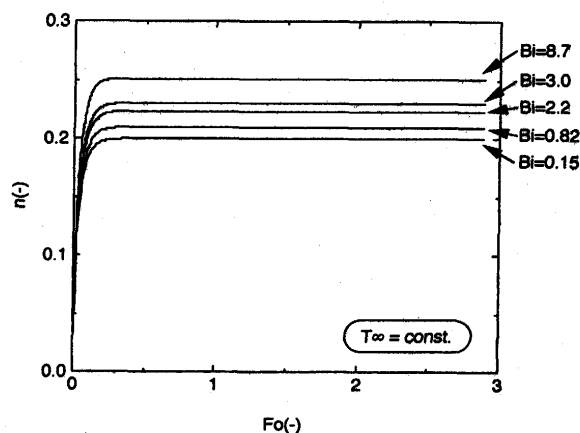


Fig. 8. Relation between n and Fourier number.

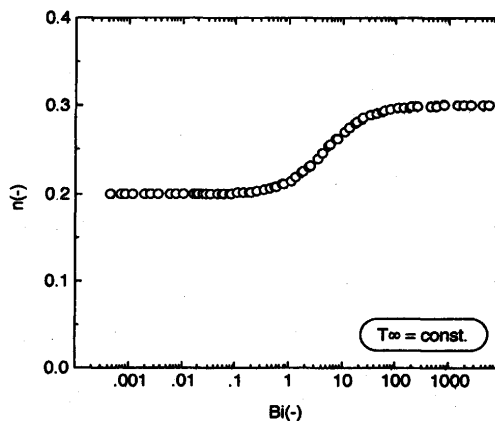


Fig. 9. Relation between n and Biot number.

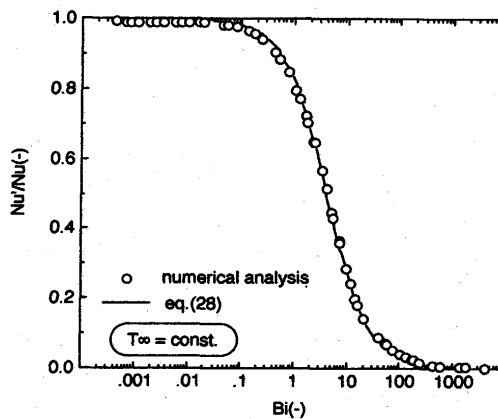


Fig. 10. Comparison of the result of numerical analysis with eq. (28).

Fig.10に結果を示す。これをみるとよく一致していることがわかる。よって、温度雰囲気一定の際のみかけの対流伝熱係数はFig. 9のnの値を用いた(28)式により求めることができる。

4. 数値解析におけるみかけの対流伝熱係数の適用法

実際の高炉内伝熱現象にそくした数値解析における、みかけの対流伝熱係数の適用法を示す。

例として直径5cmのコークス粒子と還元ガス(N₂:CO=2:1)の対流伝熱現象を考えてみる。還元ガスは1773K, Re_p=2000でコークス球のまわりを流れている場合、コークス表面と還元ガスとの真の対流伝熱係数は以下のRanz-Marshallの式⁶⁾ ((31)式)を用いると

$$h = \left(\frac{k_L}{2R} \right) (2 + 0.6(Re_p)^{1/2} (Pr)^{1/3}) \dots \dots \dots (31)$$

h≒45.3 (W/m²·K) が得られる。しかし、これはあくまでコークス表面と流体との間の対流伝熱係数に用いられる値であり、この値を使用するのであれば、コークス内の伝導伝熱をもあわせて解析を行う必要がある。しかし、それは、現在のコンピューターの性能上無理である。

そこで、粒子代表温度と流体温度とのみかけの対流伝熱係数を用いる。この時ビオ数を求めるとBi≒1.56となり、Fig. 9よりnの値は0.22が得られる。この値を(28)式に代入することによりNu'/Nu=0.74が得られる。つまりみかけの対流伝熱係数は真の対流伝熱係数の0.74倍となる。よって、みかけの対流伝熱係数h'は45.3×0.74≒33.5となり、この値を用いることによりみかけ上粒子内温度分布が均一という条件で数値解析を行うことができる。

5. 結言

本研究では粒子内伝熱抵抗が大きい場合のみかけの対流伝熱係数の推定法を数値解析および次元解析により検討を行い以下の結論を得た。

みかけのヌセルト数Nu'と真のヌセルト数Nuの比は以下の式で求めることができる。

$$\frac{Nu'}{Nu} = \frac{1}{n \cdot Bi + 1}$$

(1) 粒子-流体間の熱流束が一定の時はn=0.2で一定で

ある。

(2) 流体の温度雰囲気一定の時はnの値はビオ数によって変化する。

本研究は、日本鉄鋼協会特定基礎研究会 4流体部会(代表 八木順一郎教授)の分担研究であり、コメントをいただいた部会のメンバーの方々へ感謝します。

記号

- A : 球表面積 (m²)
- Bi : ビオ数 (-)
- C_L : 流体の比熱 (J/(kg·K))
- C_S : 粒子の比熱 (J/(kg·K))
- D : 代表長さ (m)
- F_o : フーリエ数 (-)
- g : 重力加速度 (m/s²)
- Gr : グラスホフ数 (-)
- h : 真の対流伝熱係数 (W/(m²·K))
- h' : みかけの対流伝熱係数 (W/(m²·K))
- K : 定数
- k_L : 流体の熱伝導度 (W/(m·K))
- k_s : 球の熱伝導度 (W/(m·K))
- Nu : ヌセルト数 (-)
- Pr : プラントル数 (-)
- q : みかけの対流伝熱現象による熱流束 (J/(m²·s))
- q₁ : 真の対流伝熱現象による熱流束 (J/(m²·s))
- q₂ : 粒子内の伝導による熱流束 (J/(m²·s))
- R : 球半径 (m)
- Re : レイノルズ数 (-)
- Re_p : 粒子レイノルズ数 (-)
- r : 半径 (m)
- T : 温度 (K)
- T₀ : 球初期温度 (K)
- T_∞ : 流体温度 (K)
- T_m : 球平均温度 (K)
- T_s : 球表面温度 (K)
- ΔT₁ : 球表面と流体との温度差 (K)
- ΔT₂ : 球表面と代表温度との温度差 (K)
- t : 時間 (s)
- V : 球体積 (m³)
- v : 流体の速度 (m/s)
- x : 代表長さ (m)
- α : 熱拡散係数 (m²/s)
- β : 流体の体膨張率 (1/K)
- μ_L : 流体の粘性係数 (kg/(m·s))
- ρ_L : 流体の密度 (kg/m³)
- ρ_s : 球の密度 (kg/m³)

文献

- 1) B.Stuke: Angew. Chem., B20 (1948), 262.
- 2) G. D. スミス: 電算機による偏微分方程式の解法, サイエンス社, (1970), 17.
- 3) J.R.ホールマン: 伝熱工学<上>, ブレイン図書出版, (1982), 88.
- 4) M.P. Heisler: Trans. ASME, 69 (1947), 227.
- 5) 国井大蔵, 古崎新太郎: 移動速度論, 培風館, (1980), 53.
- 6) W. E. Ranz and W. R. Marshall, JR: Chem. Eng. Progr., 48, (1952), 141, 173.