

鋳型を用いた鋳片冷却系の 線形熱流モデルによる一般的解析法

安田 一美*・梶岡 博幸*²

General Method for Solidification and Cooling Analysis
of a Cast in a Mold through a Linear Heat Flow Model

Kazumi YASUDA and Hiroyuki KAJIJOKA

Synopsis : It has been difficult to get an analytical solution for temperature distribution in a solidifying and cooling process in a mold of continuous casting machine, because of multi-layered heat resistance between solidification front and water cooling surface of a mold; solidified shell/ melt or solidified powder/ air gap/ mold coating/ mold metal and cooling water. Numerical methods, which are inconvenient to get a perspective of the total system, have been the only measure to analyse processes.

The object of this research is to present a new general method to analyse a mold cooling system.

The authors proposed a new concept "quasi-steady state", and defined a new standard function "cast function" as a solution of a linear heat flow model. They established a new precise general method to analyse a mold cooling system. As a result it has become possible to express explicitly temperature at arbitrary location and time in the casting and cooling system.

They also made a comparison among this method and other model methods.

Key words : continuous casting; cooling; solidification; mold; linear heat flow model; cast function; analytical solution; quasi-steady state.

1. 緒言

連続鋳造鋳型内での鋳片の凝固冷却過程を制御する事は鋳片材質・表面品質の確保・操業等にとって重要である。また近年開発が進められているニアネットシェイブ連鋳機は、工程省略と高生産性を狙いとしている為、鋳片の冷却速度の推定と制御は重要な意味を持つ^{1)~5)}。これを安定して制御する為には解析結果を鋳型設計に反映させる事が重要である。

鋳片・鋳型内部の温度解析については、コンピューターを用いた数値計算結果がいくつか報告されている⁶⁾⁷⁾。しかし凝固プロセス設計の指針を得る為には温度や冷却速度に与える諸要因(鋳型構造、鋳型表面コーティング、エアギャップ、モールドパウダー等)の効果を陽な形で定量的に把握する必要があり、数値解ではこの点が満たされない。これに代わる解析式による凝固伝熱解析法が必要である。

鋳片表面温度一定の条件での解析解はNeumannにより与えられている⁸⁾が、通常の連続鋳造プロセスのように鋳型を介して鋳片が冷却される場合には鋳片表面温度を一定と仮定する事はできない。鋳型-鋳片共存系の温度分布に対する解析解を得る試みとして、Schwarz^{9)~11)}、Garcia, Clyne

ら¹²⁾の報告がある。これらの中では半無限の鋳片とこれに完全接触した半無限の鋳型との共存系、またはこれと等価な系で解析が進められている。しかし、近年の凝固プロセスでは、生産性と、鋳片冷却速度の急冷化、鋳型表面保護などの観点から、鋳型層を薄くして、その裏を強く水冷する構造を有している為、鋳型厚を半無限としている点は、現実の条件からかけ離れている。

その他各種の近似解析モデルが³⁾Jones¹³⁾のレビューにおいて比較検討されている。この中で温度推定精度向上の為に鋳片/鋳型間の接触熱抵抗が重要なポイントである事が強調されている。この観点からも接触熱抵抗など主要因の影響が陽に把握できる統一的な解析式が望まれる。

本論文では、現実の凝固プロセスにおいて用いられている、鋳型による鋳片の間接冷却系の温度分布について、一般的な解析法を提示する事を目的とする。

2. 解析方法

2.1 準定常の概念

鋳型を含んだ凝固伝熱系は冷却媒体/鋳型/コーティング/エアギャップ/パウダー/鋳片等が積層した多層構造

平成6年6月3日受付 平成6年7月8日受理 (Received on June 3, 1994; Accepted on July 8, 1994)

* 新日本製鉄(株)プロセス技術研究所 (Process Technology Research Laboratories, Nippon Steel Corp., 20-1 Shintomi Futtsu 299-12)

* 2 新日本製鉄(株)技術開発本部 (Technical Development Bureau, Nippon Steel Corp.)

であり、各層の熱的物性値は異なる。このような系は定常状態においては各層の層厚/熱伝導率すなわち熱抵抗という概念を用いて、電気回路とのアナロジーにより温度分布を計算する事が可能である¹⁴⁾。しかしここで目指している鑄片の凝固伝熱過程の解析においては現象が非定常であるためこの方法を用いる事はできない。従って数値計算によらず解析式によって鑄型冷却系を解析するために、「定常」に替わる新しい概念を導入する。

定義(準定常)：熱伝導系において、その中の領域Vにおいて、非準定常度 α (付録1参照)が許容限界非準定常度 α_c よりも小さい時すなわち準定常度 β が $1 - \alpha_c$ よりも大きい時、系はVにおいて準定常の状態にあると定義する。

系が準定常状態にある時、領域 [a, b] の温度を直線近似した時の精度は (A4) から

$$\max \delta/|u(b) - u(a)| \approx \alpha/4 \quad \dots\dots\dots (1)$$

後述の如く、鑄型冷却系において充分長い時間が経過した後の温度分布はNeumann解に漸近するので、これにたいして α を求めておく。半無限空間に分布した凝固温度Tにある液体を時刻 $t = 0$ において表面温度を T_0 に指定したとき凝固の進行及び温度分布は次のNeumann式で与えられる⁸⁾。

$$X = 2\lambda\sqrt{vt} \quad \dots (2), \quad u = T_0 + \frac{T - T_0}{\text{erf } \lambda} \text{erf } \frac{x}{2\sqrt{vt}} \quad \dots\dots (3)$$

$$\lambda \exp(\lambda^2) \text{erf} \lambda = c(T - T_0)/(L\sqrt{\pi}) \quad \dots\dots\dots (4)$$

(A3)と(3)から x が凝固厚 X に較べて小さい時は

$$\alpha(0, x) = [1 - \exp\{-x^2/(4vt)\}]/[1 + \exp\{-x^2/(4vt)\}] \approx x^2/(8vt) \quad \dots\dots\dots (5)$$

これから x が小さいほど区間 $[0, x]$ での非準定常度は小さくなるので一般に鑄型の近くは早く準定常状態に達する。

2・2 線形熱流モデルとキャスト関数

鑄片表面から表面温度に比例した放熱がある場合の凝固伝熱モデルを以後「線形熱流モデル」と呼ぶ事にする。線形熱流モデルについては、アナログシミュレーターによる解析があるが¹⁵⁾、境界条件の比較(線形熱流型、表面温度一定、放熱量一定等)に主眼が置かれており、鑄型冷却系解析への適用については言及されていない。

線形熱流モデルの鑄型冷却系への応用は準定常の概念との結合によって初めて可能になる。すなわち連鑄機の鑄型冷却系においては、強制冷却されている鑄型部は全系のうちで最初に準定常状態に達するので、線形熱流モデルが良く適合する。

2・2・1 線形熱流モデルの定式化

温度 u に関する基礎方程式は鑄片内 ($x \geq 0$) で

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

境界条件は冷却面温度を T_0 とすると、

$$x = 0 : k \frac{\partial u}{\partial x} = j(u - T_0) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$x = X(t) : u\{X(t)\} = T \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\rho L \frac{dX(t)}{dt} = k \frac{\partial u}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (9)$$

現象を極力少数のパラメタにより記述するため各変数の無次元化を行う。無次元化量は元変数に \sim を付す。

$$\tilde{u} = \frac{u - T_0}{T - T_0}, \quad \tilde{t} = \frac{j^2 vt}{k^2}, \quad \tilde{x} = \frac{jx}{k}, \quad \tilde{X} = \frac{jX}{k} \quad \dots\dots\dots (10)$$

(10)を(6), (7), (8), (9)に代入して以下の式を得る。

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} \quad (11), \quad \tilde{x} = 0 : \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = \tilde{u} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\tilde{x} = \frac{jX(t)}{k} : \tilde{u}(\tilde{x}) = 1 \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{d\tilde{X}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \frac{c(T - T_0)}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = Ya \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし、 $Ya = c(T - T_0)/L$

(10)~(14)から凝固位置と鑄片内温度分布は次の無次元パラメタにより定まる。

$$\tilde{X} = \tilde{X}(\tilde{t}, Ya) \quad \dots\dots\dots (15) \quad \tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}, Ya) \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\tilde{t} = \frac{j^2 vt}{k^2} : \text{Fourier数} \quad \dots (17) \quad \tilde{x} = \frac{jx}{k} : \text{Nusselt数} \quad \dots (18)$$

$$Ya = c(T - T_0)/L : \text{顕熱/潜熱比} \quad \dots\dots\dots (19)$$

\tilde{u} は鑄型冷却系に於ける温度分布を記述する基本的な関数であるからこれを鑄造関数(キャスト関数)と名付け、 $\text{cast}(\tilde{x}, \tilde{t}, Ya)$ と表示する事にする。この関数は後述の如く、連続鑄造鑄型内での凝固/伝熱系に於ける温度分布を包括的・一般的に記述するのに極めて有用な関数である。キャスト関数は初等関数では表現できないが次の性質を持つ。

$$\lim_{\tilde{x} \rightarrow \infty} \text{cast}(\tilde{x}, \tilde{t}, Ya) = 1(20), \quad \lim_{\tilde{t} \rightarrow 0} \text{cast}(\tilde{x}, \tilde{t}, Ya) = 1 \quad \dots (21)$$

$$\lim_{\tilde{t} \rightarrow \infty} \text{cast}(\tilde{x}, \tilde{t}, Ya) = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

また次の関数形に漸近する。

$$\text{cast}(\tilde{x}, \tilde{t}, Ya) \approx \frac{1 + \tilde{x}}{\sqrt{1 + 2\tilde{t} Ya}} \quad [Ya \rightarrow 0] \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\text{cast}(\tilde{x}, \tilde{t}, Ya) \approx \text{erf} \frac{\tilde{x}}{2\sqrt{\tilde{t}}} + \exp(\tilde{x} + \tilde{t}) \text{erfc} \left(\frac{\tilde{x}}{2\sqrt{\tilde{t}}} + \sqrt{\tilde{t}} \right) \quad [Ya \rightarrow \infty] \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\text{cast}(\tilde{x}, \tilde{t}, Ya) \approx \frac{1}{\text{erf} \lambda} \text{erf} \frac{\tilde{x}}{2\sqrt{\tilde{t}}} \quad [\tilde{t} \rightarrow \infty] \quad \dots\dots\dots (25)$$

2・2・2 キャスト関数の適用方法

キャスト関数は線形熱流モデルの解であるので、鑄型による凝固伝熱系を線形熱流モデルと見做しキャスト関数を用いて解析する方法を、以後「キャスト関数法」と呼ぶ事にする。

キャスト関数はこれまで数値が求められていないので、差分陰解法による数値解析を行った。この計算プログラムは3つのパラメタの値を与えればキャスト関数値を出力するよう構成されている。キャスト関数を定める3つのパラメタの内、顕熱/潜熱比 Ya は種々の金属元素について0.5~5.0の比較的狭い範囲の値をとる。従って対象とする

金属元素とプロセスを特定すれば、キャスト関数の値を数表化する事も可能である。一例としてTable 1 にYa=5.0(鉄の値に近い) の場合の数値を示す。

鋳型冷却系において任意の位置・時刻での温度をキャスト関数を用いて表示しておく。鋳型冷却面から鋳片表面までがn枚の層で構成されており、層間の境界での温度を θ_1 (鋳型冷却面), $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n, \theta_{n+1}$ (鋳片表面) とする。 θ_1 は一定温度 T_0 とする。また第i層 $[x_i, x_{i+1}]$ の厚みを l_i , 熱伝導率を k_i とし, 第i層の熱抵抗を次式で定義する。

$$R_i = l_i/k_i \quad \dots\dots\dots (26)$$

準定常状態に於ける鋳片表面から鋳型冷却面への熱伝達率jは

$$j = \left\{ \sum_{i=1}^n (l_i/k_i) \right\}^{-1} = \left(\sum_{i=1}^n R_i \right)^{-1} \quad \dots\dots\dots (27)$$

(17) (18) (19) から鋳片内の温度分布は次式で表される。

$$u(x, t, Ya) = T_0 + (T - T_0) cast \left\{ \frac{x}{k \sum (l_i/k_i)}, \frac{vt}{(k \sum (l_i/k_i))^2}, \frac{c(T - T_0)}{L} \right\} \quad \dots\dots (28)$$

鋳片表面温度 θ_{n+1} は

$$\theta_{n+1} = u(0, t, Ya) = T_0 + (T - T_0) cast \left\{ 0, \frac{vt}{(\sum (l_i/k_i))^2}, \frac{c(T - T_0)}{L} \right\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

鋳片外での境界位置すなわち鋳型/コーティング/パウダー/エアギャップ等の境界位置での温度は次式で表される。

$$\theta_j = \left[\left(\sum_{i=1}^{j-1} R_i \right) \theta_{n+1} + \left(\sum_{i=j}^n R_i \right) \theta_1 \right] / \sum_{i=1}^n R_i \quad (j=2, 3, \dots, n) \quad \dots (30)$$

第i層の区間 $[x_i, x_{i+1}]$ を β : $(1-\beta)$ に内分する点Pでの温度は

$$u(P) = (1-\beta) \theta_i + \beta \theta_{i+1} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (31)$$

(28) から (31) 式により鋳型による鋳片冷却系内の全ての点の温度がcast関数により表される。

鋳型に関する多くの条件が変わってもこれらは熱伝達率

Table 1. Values of CAST function : (Ya=5.0)

\bar{x}	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	
0.0	1.000	→ (以下同値)										
0.1	0.800	1.000	→									
0.2	0.689	0.962	1.000	→								
0.3	0.640	0.908	1.000	→								
0.4	0.603	0.863	1.000	→								
0.5	0.573	0.826	0.988	1.000	→							
0.6	0.548	0.793	0.960	1.000	→							
0.7	0.526	0.765	0.934	1.000	→							
0.8	0.507	0.739	0.909	1.000	→							
0.9	0.491	0.716	0.887	1.000	→							
1.0	0.476	0.696	0.866	0.984	1.000	→						
1.5	0.418	0.616	0.780	0.907	0.998	1.000	→					
2.0	0.379	0.560	0.716	0.844	0.942	1.000	→					
2.5	0.349	0.517	0.666	0.792	0.894	0.973	1.000	→				
3.0	0.326	0.483	0.625	0.749	0.851	0.934	0.998	1.000	→			
3.5	0.306	0.455	0.592	0.712	0.814	0.899	0.967	1.000	→			
4.0	0.290	0.432	0.563	0.680	0.782	0.868	0.938	0.995	1.000	→		
4.5	0.277	0.412	0.538	0.652	0.752	0.839	0.911	0.970	1.000	→		
5.0	0.265	0.395	0.516	0.627	0.726	0.812	0.886	0.947	0.997	1.000	→	

jの変化に集約して条件を与える事が出来, 解析系の構造が著しく単純になり因果関係の透明性が増す。

3. 解析結果

3.1 温度の空間分布

Fig. 1 に (a) Yaが小さい場合 (Ya=0.5) と, (b) 大きい場合 (Ya=5.0) の無次元温度 (CAST関数値) の空間分布の時間変化を示す。この図から, Yaが小さいほど温度分布曲線が全域にわたりほぼ直線状になることが判る。またYaが大きい方が凝固速度, 鋳片表面温度低下速度は大きい。

3.2 各点の温度推移

Fig. 2 に鋳片内各位値の温度変化を示す。表面から深い位置にあるほど温度降下開始時刻が遅れ冷却速度も小さくなる事, Yaが小さいほど温度降下が遅れる事が判る。

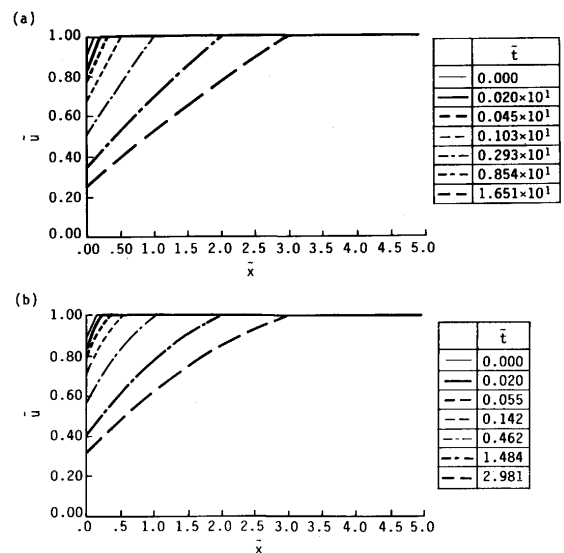


Fig. 1. Variation of dimensionless temperature distribution with dimensionless time. (a) Ya=0.5 and (b) Ya=5.0.

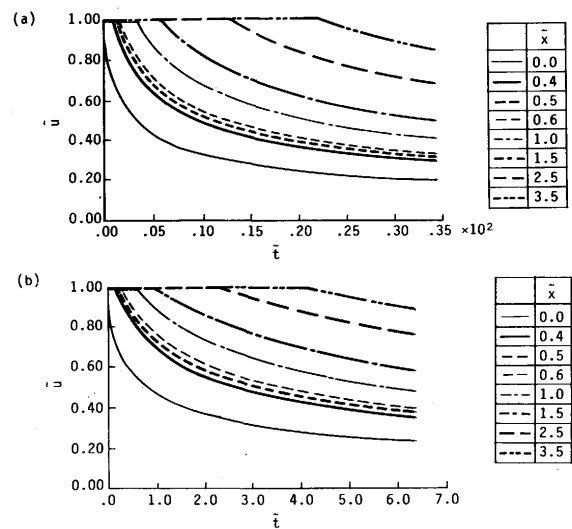


Fig. 2. Variation of dimensionless temperatures at fixed points with dimensionless time. (a) Ya=0.5 and (b) Ya=5.0.

Fig. 3 に鋳片表面温度の温度変化を示す。Yaが小さいほど表面温度降下は遅くなる。

3.3 凝固シェル厚み

Fig. 4 は凝固シェル厚時間変化の両対数表示である。このグラフから凝固シェルは初期には時間に比例して発達し、時間経過とともに時間の平方根に比例する関係に移行する事が判る。移行する時間は図からYaが小さくなるにつれて大きくなる。

3.4 冷却速度

Fig. 5 は凝固温度直下での無次元冷却速度の時間変化を表す。この図から凝固点直下の冷却速度は初期に大きな値を取り時間経過とともに減少する事が判る。またYa(顕熱/潜熱比)については初期にはYaが小さい場合の方が大きい場合よりも凝固点直下での冷却速度は小さいが、やがて逆転する事が判る。この理由は、(凝固直後冷却速度③) = (凝固速度①) × (凝固位置での温度勾配②) の関係において、凝固初期にはYaが小さい方が①が小さい為③が小さくなり、時間が経過するとYaが小さい方が相対的に②が大きくなる為である。

またこの図から時間が十分経過した後は、曲線の傾斜が

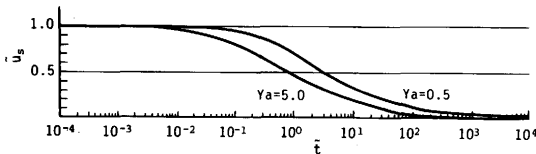


Fig. 3. Variation of dimensionless surface temperature as a function of dimensionless time.

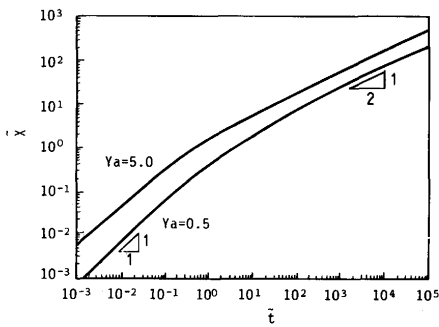


Fig. 4. Variation of dimensionless shell thickness as a function of dimensionless time.

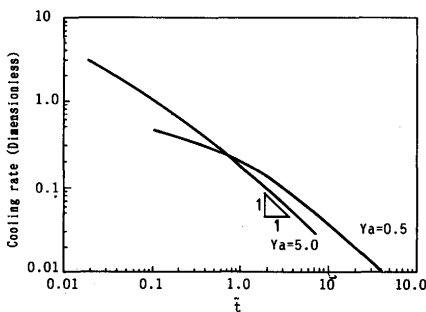


Fig. 5. Variation of dimensionless cooling rate at the temperature just below the melting point with dimensionless time.

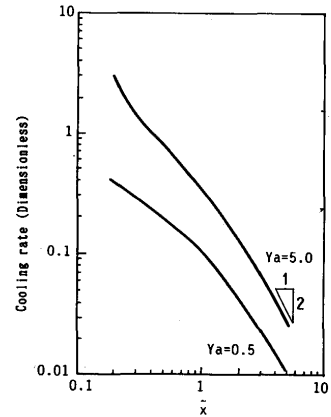


Fig. 6. Variation of dimensionless cooling rate at the temperature just below the melting point as a function of dimensionless shell thickness.

-1に漸近する事、すなわち凝固点直下での冷却速度が時間に反比例して減少する事が判る。

Fig. 6 は凝固温度直下での冷却速度の鋳片深さ方向への変化を示す。この図から凝固点直下での冷却速度は凝固位置が深くなるほど小さくなり、またYaが大きいほど冷却速度も大きくなる事が判る。この図から凝固位置が深くなると凝固時の冷却速度は深さの-2乗に比例して減少する事が判る。

4. 考察

4.1 各種モデルの比較

ここでは系の微分方程式に忠実に数値計算する厳密モデル法(付録2参照), 2, 3章で述べたキャスト関数法, 及び著者らが比較の為作成したNeumann型凝固モデル法(付録3参照)の3法について, 実現象との対応をつけ易くする為次元を有する変数を用いて結果を比較した。

Fig. 7 は(a)特定時間における鋳片内温度分布, (b)鋳片各部の温度変化, (c)凝固シェル厚の時間変化のそれぞれについて厳密法, キャスト関数法, Neumann型凝固モデル法の3つを比較したものである。この図からキャスト関数法は全時間帯にわたって厳密法と極めて良く一致する(図では1本の線に重なって見える)事が判り, キャスト関数法の妥当性と精度が検証された。Neumann型凝固モデル法も十分な時間が経過した後は厳密モデルとの一致が良好なる事が判る。

4.2 精度

キャスト関数法がNeumann型凝固モデル法よりも精度が良好である理由を考える。鋳片表面から鋳型冷却面までの領域を鋳片と等しい熱伝導度を有する物質に置き換えた厚みの部分[-1, 0] (付録3参照。この領域を非変換領域と呼ぶ事にする)には, Neumann型凝固モデル法の場合, 熱伝導方程式が適用されており, この部分での解が誤差関数で記述される為には, 全域での温度拡散率νが場所によらず

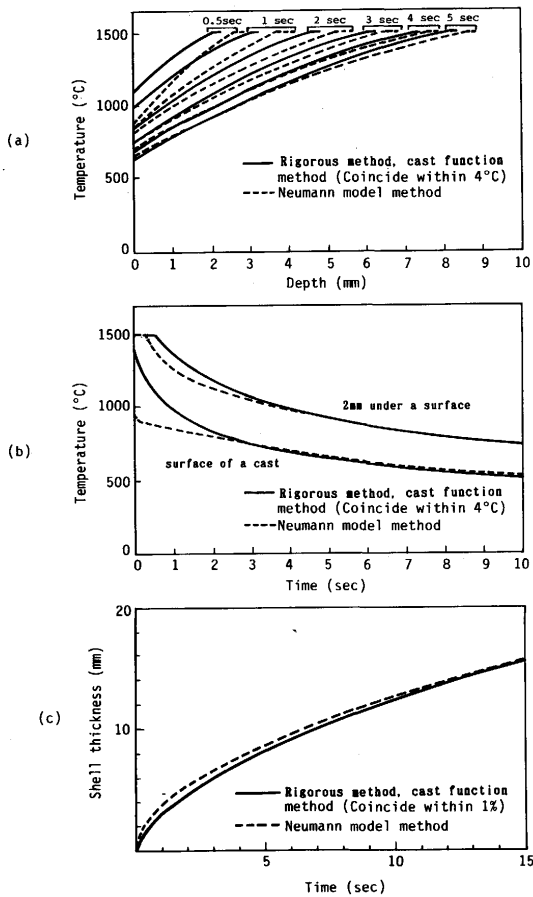


Fig. 7. Comparison among the analysed results of rigorous method, cast function method and Neumann model method. (a) Temperature distribution, (b) Variation of temperature with time and (c) Variation of shell thickness with time.

一定である必要がある。この為被変換領域の比熱 C と密度 ρ を $\nu=k/\rho C$ が一定となるように選ぶが、そうすると変換前後の、各層の熱容量は異なる事になる。この為、準定常の状態でも、原系と変換系の間には誤差が生ずる。すなわち準定常の条件はモデルの原形に対する精度を確保する為の必要条件であって十分条件ではない。

一方、キャスト関数法では、被変換領域が準定常の状態にある限り、すなわち領域内の温度分布がほぼ直線状である限り、境界条件式(7)は妥当性を有する。従って冷却系全体で、原系とモデルとの間に誤差は生じ難い。

もっとも充分な時間が経過した後は非変換領域内の熱量の総和が冷却影響域全体の持つ熱量に比べて無視できるほど小さくなるので、Fig. 7のようにNeumann型凝固モデル法の解が厳密解に漸近する。上記被変換領域を含む鋳型の水冷却面から凝固フロントまでの温度分布が直線状である事を仮定したモデル(直線温度分布モデル)も考えられるが、この場合も時間とともに厳密解に漸近する事が容易に示される。勿論、漸近し始める時期はNeumann型凝固モデルよりも遅れる。従って近似の良好な順に並べれば次のようになる。キャスト関数法>Neumann型凝固モデル法>直

線温度分布モデル法。

4.3 適用範囲

キャスト関数法はNeumann型凝固モデル法に比較して凝固初期から誤差が発生しにくいという利点を有する。しかし式の取り扱い易さという観点からは、Neumann型凝固モデルの解が誤差関数を含む少数の項で表現されるのに対し、キャスト関数法の方の解は既知の関数の有限項の組み合わせでは表現できない。この為本研究では線形熱流モデルの基本解として鋳造関数(キャスト関数)を定義しその数学的性質を検討し、漸近的な挙動と他のモデルとの関連を明らかにした。

このキャスト関数を準線形概念と結合する事により、鋳型冷却に於ける複雑な多層系を簡単な系に変換して見通しが良かつ高精度の解析が可能になった。すなわち任意の多層伝熱系に対し、任意の位置・時刻に於ける温度が(35)から(39)式により明確に表現される。

この解析法は、1)適用範囲が広い、2)解析の見通しが良い、3)高精度である、等の理由から鋳型による鋳片冷却系の一般的な解析法として優れている。この意味からキャスト関数は鋳型による鋳片冷却系解析の為の基本的関数であり、より単純な鋳片表面温度一定の熱伝導系において誤差関数が果たしていた役割を果たすものである。すなわち表面温度が一定な系では、温度分布は誤差関数で記述できた。しかし表面温度一定の条件は鋳型を用いた鋳片冷却系においては成立する事は少ない。

キャスト関数を定義しその性質を明確にする事によって、キャスト関数が誤差関数に代わって鋳型冷却系の熱的挙動を検討する際の標準関数の役割を果たす事が可能になった。

キャスト関数法の適用範囲は広く、1)鋳型の基本設計(寸法、材料等)、2)凝固組織/材質制御の為の鋳片冷却速度推定、3)コーティング、溶射、表面凹凸等の鋳型表面加工設計、4)パウダー設計の為の伝熱解析、5)鋳片の割れ発生防止の為の鋳片変形とエアギャップを加味した伝熱解析、等への利用が考えられる。

5. 結言

連続鋳造機の鋳型の中での鋳片の凝固・冷却過程は、凝固フロントから鋳型の水冷却面までの構造が、凝固シェル/溶融パウダー/凝固パウダー/エアギャップ/コーティング/鋳型金属/冷却水流等の多層構造であるため、従来、解析式による計算が困難で専ら計算機による数値計算に頼っていた。その為温度分布に与える諸要因の影響について総括的な見通しがききにくいという問題があった。今回「準定常」の新概念を提示し、またキャスト関数という標準関数を新たに定義して、これらを結合する事により、鋳型による凝固冷却系の精度と見通しの良い新解析法を構築しこれに関連して以下の知見を得た。

1) 1次元多層構造を有する任意の冷却系に対し、任意の位置・時刻の温度はキャスト関数を使って陽な形で表現できる。

2) キャスト関数は3つの無次元パラメタ(無次元位置、無次元時間、顕熱/潜熱比)により定まり極限的な場合は既知関数の組み合わせに漸近する。

3) 準定常状態での種々の解析モデルの精度は良好な順に、キャスト関数法(線形熱流モデル法) > Neumann型凝固モデル法 > 直線温度分布モデル法である。

記号

c: 比熱(J/(kg·K)), k: 熱伝導率(W/(m·K)), k_i : 第*i*層の熱伝導率(W/(m·K)), J: 熱流密度(W/m²), j: 熱伝達率(W/(m²·K)), L: 凝固潜熱(J/kg), l_i : 鑄型部第*i*層 [x_i, x_{i+1}]の厚み(m), l_0 : 鑄片表面から鑄型水冷却面までの変換厚み(m), n: Sの法線ベクトル, q: エアギャップ部熱流密度(W/m²), R_i : 第*i*層の熱抵抗(m²·K/W), r: 位置(m), S: 領域Vを囲む表面, T: 凝固温度(K), T_0 : 冷却面温度(K), T_1 : 低温側温度(K), T_2 : 高温側温度(K), u: 温度(K), X: 凝固位置(m), x_0 : 鑄片表面から十分遠方の断熱壁位置(m), Y_a : 顕熱/潜熱比, α : 非準定常度, β : 準定常度 $1-\alpha$, Δ : 時間きざみ幅(s), δ : 温度分布の近似誤差(K), ϵ : エアギャップ厚(m), λ : 凝固パラメタ, ν : 熱拡散率(m²/s), ρ : 密度(kg/m³), θ_i : 鑄型部, 第(*i*-1)層と第*i*層の境界の温度(K), θ_i (鑄型冷却面), θ_{n+1} (鑄片表面), $\phi(x)$: 初期温度分布(K)
添字(付録2)
1: ベルト, 2: 凝固シェル, 3: 溶鋼, air: エアギャップ部

文献

- 1) 梢山正孝, 梅田高照, 竹内宏昌, 加藤 寛: 鑄物, 47 (1975), p.178
- 2) K. E. Blazek: Iron and Steel Maker, 14 (1987), p.42
- 3) 宮崎雅文, 北條優武, 竹内秀磨, 松島達人, 多名賀剛, 才田誠四郎: 材料とプロセス, 4 (1991), p.290
- 4) 戸澤宏一, 森脇三郎, 安川 登, 藤井徹也, 越川隆雄, 木村智明: 川崎製鉄技報, 21 (1989), p.175
- 5) 伊藤幸良: 鉄と鋼, 72 (1986), p.1667
- 6) J. K. Brimacombe and F. Weinberg: Journal of the Iron and Steel Institute, (1973) January, p.24
- 7) 泉 進, 草川隆次: 材料とプロセス, 1 (1988), p.1202
- 8) H. S. Carslaw and J. C. Jaeger: Conduction of Heat in Solids, (1957), p.285 [Oxford Univ. Press]
- 9) C. Schwarz: Arch. Eisenhüttenwes., 5 (1931), p.139
- 10) C. Schwarz: Arch. Eisenhüttenwes., 5 (1931), p.177
- 11) C. Schwarz: Z. Angew. Math. Mech., 13 (1933), p.202
- 12) A. Garcia, T. W. Clyne and M. Prates: Met. Trans., 10 B (1979), p.85
- 13) H. Jones: Journal of the Institute of Metals, 97 (1969), p.38
- 14) 例えば, ギート: 基礎伝熱工学 (1960), p.44 [丸善]
- 15) F. Kreith and F. E. Romie: Proc. Phys. Soc. B, 68 (1955), p.277

付録1. 非準定常度 α と準定常度 β

定義: 熱伝導系の中の領域Vにおいて、熱がV中に蓄積される速度の、Vの境界を横切る熱流の絶対値の総和にたいする比 α を非準定常度と定義する。

$$\alpha = \left| \iiint_V \text{div } \mathbf{J} \, dV \right| / \left| \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} \, dS \right| \dots\dots\dots (A1)$$

(A1)及びGaussの定理より、

$$\alpha = \left| \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} \, dS \right| / \left| \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} \, dS \right| \dots\dots\dots (A2)$$

今簡単な為1次元(x)の鑄型伝熱系を考え領域として区間[a, b]をとる。(2)にFourierの法則を適用すれば、熱伝

導率がxによらず一定の場合は

$$\alpha(a, b) = \left| \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_b - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_a \right| / \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|_a + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|_b \right) \dots\dots\dots (A3)$$

2点(a, u(a)), (b, u(b))を結ぶ直線とu(x)との隔たり δ の最大値はおよそ次式で与えられる。

$$\max \delta \approx \alpha(a, b) |u(b) - u(a)| / 4 \dots\dots\dots (A4)$$

これから直線近似の真値にたいする近似精度が充分良好と見なせるような α の値 α_0 (許容限界非準定常度)を選ぶ事ができる。また $\beta \equiv 1 - \alpha$ を準定常度と定義する。

付録2. 鑄型冷却系の数値解析(厳密法)

簡単のため溶鋼の過冷は考慮せず、また成分は純物質で凝固温度は一意的に定まるものとする。

[基礎方程式]

$$\nu_i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 : i=1 (-D \leq x \leq 0), \\ i=2 (0 \leq x \leq \delta), i=3 (\delta \leq x) \dots\dots\dots (A5)$$

[境界条件]

$$u(-D, t) = T_0 \dots\dots\dots (A6)$$

$$k_1 \frac{\partial u}{\partial x}(-0, t) = q[u(+0, t), u(\epsilon-0, t)] \dots\dots (A7)$$

$$k_2 \frac{\partial u}{\partial x}(\epsilon+0, t) \approx q[u(+0, t), u(\epsilon-0, t)] \dots\dots (A8)$$

$$\frac{dX}{dt}(t) = \frac{1}{\rho L} \left[k_2 \frac{\partial u}{\partial x}(X(t)-0, t) - k_3 \frac{\partial u}{\partial x}(X(t)+0, t) \right] \dots\dots\dots (A9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) = 0 (A10), u(x, 0) = \psi(x) (D \leq x \leq x_0) (A11)$$

$$u(\delta(t), t) = T \dots\dots\dots (A12)$$

(A5)の熱伝導方程式を(A6)~(A12)の境界条件のもとで陰解法を用いて数値計算した。

付録3. Neumann型凝固モデル法

鑄型冷却面から鑄片表面までが熱的物性値の異なるn枚の層で構成されているような熱伝導系を、鑄片と同じ熱伝導率と温度拡散率を有する仮想的な区間 $[-l_0, 0]$ に変換する。

熱伝導方程式(11)を下記の境界条件と組み合わせる。このモデルは区間 $[-l_0, 0]$ での初期条件以外はNeumann問題と同じであるため、このモデルを用いて近似解を求める方法をNeumann型凝固モデル法と呼ぶことにする。

$$\text{初期条件: } t=0 : -l_0 \leq x \leq 0 : u(x, 0) = T_0 \dots\dots\dots (A13)$$

$$x > 0 : u(x, 0) = T$$

$$\text{境界条件: } x = -l_0 : u(-l_0, t) = T_0 (A14) \text{ (鑄片表面は } x=0),$$

$$x = X(t) : \text{本文(8)(9)式.}$$

$$\text{ただし } l_0 \equiv k \sum_{i=1}^n (l_i/k_i) \dots\dots\dots (A15).$$