

鑄片の限界冷却速度の半無限1次元モデルによる数学的解析

安田 一美*・梶岡 博幸*²

Mathematical Analysis on the Upper Limit of Cooling Rate in Casting
on the Basis of One-dimensional Semi-infinite Model

Kazumi YASUDA and Hiroyuki KAJIOKA

Synopsis : Cooling rate is an important index to estimate solidification structure or property of cast products.

In order to evaluate the upper limit of the cooling rate in near net shape casting processes of various kinds, heat conduction in the semi-infinite region with and without solidification was calculated analytically. On the basis of Neumann's solution for the semi-infinite region ($y > 0$) initially at constant temperature U with the surface ($y = 0$) maintained at zero for the subsequent time ($t > 0$), cooling rate was calculated for the cases in which location, time or temperature was fixed respectively.

The results are as follows.

(1) In case of cooling without solidification, the maximum cooling rate at any fixed location takes place at the constant temperature $0.92U$ independent of the thermal characteristics. While in case time is fixed, the maximum cooling rate occurs at another constant temperature of $0.68U$.

(2) In case of cooling with solidification, cooling rate is determined by location, time and the dimensionless parameter Ya , which is the ratio between sensible and latent heat. And for any kind of metal the maximum cooling rate at any fixed location or time appears just behind the solidification front. Approximate equations for the maximum cooling rate are proposed.

Key words : continuous casting ; cooling ; cooling rate ; solidification ; physical property ; solidification structure.

1. 緒言

近年、金属製品製造の省工程・省コスト、急速凝固による新材質創出のための各種ニアネットシェイブ連鑄機や急速凝固プロセスの開発の進展に伴い、凝固組織や材質と密接な関係をもつ鑄片各部の冷却速度を知ることが必要になってきた。しかし各種凝固プロセスにおける冷却速度は大幅に異なり¹⁾、また設備/操業条件によっても大きく変動するため、これを既存のデータから統計的に推定する事は困難である。したがって新しい鑄造プロセスを計画/設計する際に、種々のプロセス条件に対し冷却速度の限界値を簡易的に推定する手段を提供する事は、材質予測およびプロセス開発の基本諸元を決める観点から重要である。

また現行の水冷振動銅鑄型を用いた連鑄機においても鑄片内の割れの発生を左右する歪を精密に解析するためには高温時の応力/歪緩和を考慮する必要がある。したがって熱歪に起因する応力/歪緩和量推定のため鑄片内冷却速度の把握が必須となる。

物体内の温度分布の理論解析に関してはCarslaw-Jaegerの著書²⁾に、種々の境界条件下における熱伝導の解析解が記

述されている。また相変化を含む場合については、多相熱伝導問題いわゆるStefan問題として、精緻な数学的検討が今日に至るまで続けられている³⁾⁴⁾。Schwarz⁵⁾やGarcia, Clyneら⁶⁾⁷⁾は鑄片と鑄型とが共存する系に対して、凝固界面位置と温度分布の解析を行っている。また新山は種々の形状の鑄物に対して、砂型鑄物の凝固時間を評価する式を提示している⁸⁾⁹⁾。解析式による方法以外にも、積分プロファイル法¹⁰⁾¹¹⁾、数値解法^{12)~14)}等による多くの解析例がある。しかしこれらの解析解/数値解においては、温度が時間および空間の関数として表されてはいるものの、冷却速度それ自体の普遍的な挙動については明確にされてはいない。

本論文においては鑄片の冷却速度、特にその限界値の挙動を、鑄片内位置、時間、温度域と関連させて、諸要因の影響を陽に表現する形で、理論解析した。

2. 凝固を含まない熱伝導系の冷却速度の解析

2・1 半無限体における1次元非定常熱伝導問題の解の性質
流動のない静止物質内の熱伝導のみを考える。また鑄片の厚み方向のみの冷却速度変化を考察の対象とする。鑄片

平成6年5月26日受付 平成6年7月8日受理 (Received on May 26, 1994; Accepted on July 8, 1994)

* 新日本製鉄(株)プロセス技術研究所 (Process Technology Research Laboratories, Nippon Steel Corp., 20-1 Shintomi Futtsu 299-12)

* 2 新日本製鉄(株)技術開発本部 (Technical Development Bureau, Nippon Steel Corp.)

は有限の厚みを有するが鑄片内の冷却速度を簡単のため半無限体内の冷却速度で近似する。この近似による最大冷却速度の誤差は鑄片の厚み中央部1/4を除けば5%以内である。また厚み中央での最大冷却速度は半無限体のそれの高々2倍以内である。また冷却速度の限界値を求める意味から、鑄片と冷却媒体との間の熱伝達係数が無限大、すなわち鑄片表面温度が冷却媒体の温度に等しい場合を考えた。この場合の冷却速度は付録1. (A6)式で表される。この冷却速度は次の性質をもつ。

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots (1)$$

いま(A6)式右辺の関数は $0 < t, y < \infty$ で連続かつ微分可能であるから(1)とRolleの定理により、冷却速度 $\frac{\partial u}{\partial t}$ は、位置 y を定めればある有限の時刻 t で最急冷値を、時刻 t を定めればある有限の位置 y で最急冷値をとる。

2・2 位置を指定した場合の冷却速度

鑄片のある位置での組織や材質は、1) その位置における最大冷却速度やまたは、2) 特定の温度(相変化や変態の温度など)を通過する際の冷却速度、に関連する。

そこでここでは、1) 位置を指定した時に、その位置でとり得る最大の冷却速度、2) 位置と温度を同時に指定した時、その指定温度を通過する時の冷却速度、の2つを検討する。

2・2・1 最大冷却速度

(A4)と(A6)から t を消去すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-4\nu U}{\sqrt{\pi} y^2} \eta^3 \exp(-\eta^2) \Delta h(\eta) \quad \dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{を解いて} \quad \eta = \sqrt{3/2} \quad \dots\dots (3)$$

したがって鑄片内位置 y_0 における最大冷却速度は、

$$\max \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{y=y_0} = h(\sqrt{3/2}) = 0.925 \nu U / y_0^2 \quad \dots\dots (4)$$

この時の時刻 t は(A4)と(3)から

$$t = y_0^2 / (6\nu) \quad \dots\dots (5)$$

この時の温度は(A3)と(A4)から

$$u = U \operatorname{erf} \sqrt{3/2} = 0.917 U \quad \dots\dots (6)$$

すなわち、鑄片内のどの位置においても、そこでの冷却速度が最大値をとるのは位置と熱的物性値に依らない一定の温度、熱落差の約8%下がった温度の時である。

2・2・2 指定温度における冷却速度

位置 y_0 において指定温度 u_R を通過する時の冷却速度は

$$(2) \text{ から } \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{\substack{y=y_0 \\ u=u_R}} = \frac{-4\nu U}{\sqrt{\pi} y_0^2} f \left(\frac{u_R}{U} \right) \quad \dots\dots (7)$$

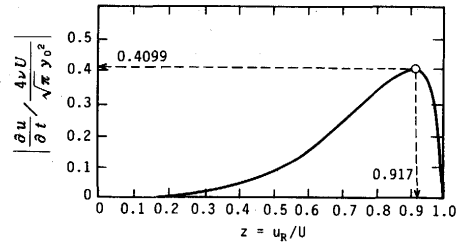


Fig. 1. Dimensionless cooling rate at a fixed point as a function of temperature.

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{\substack{y=y_0 \\ u=u_R}} = f(z) \Delta h(\eta) \exp\{-\operatorname{erf}^{-1}(z)^2\} \quad \dots\dots (8)$$

ただし $f(z) \Delta h(\eta) \exp\{-\operatorname{erf}^{-1}(z)^2\} \quad \dots\dots (8)$

f は位置指定の場合の無次元冷却速度である。(8)式の関数形は指定温度の影響を表すものであり、その形状をFig. 1に図示する。またこの時の時刻は(A3), (A4)式から

$$t_R = y_0^2 / [4\nu \{\operatorname{erf}^{-1}(u_R/U)\}^2] \quad \dots\dots (9)$$

位置を定めた場合、(4)と(7)式から、最大冷却速度も指定温度における冷却速度もともに、 y_0^2 に反比例し、 νU に比例する。また指定温度における冷却速度の最大冷却速度に対する比率は指定温度だけの関数になる。

2・3 時刻を指定した場合の冷却速度

連続鑄造に当てはめると、前節の位置指定は鑄片の厚み方向の深さを指定することを意味したのに対し、時刻指定は鑄造方向の位置を指定することに対応する。

2・3・1 最大冷却速度

(A4)と(A6)の両式から y を消去して(10)式を得る。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-U\eta}{\sqrt{\pi} t} \exp(-\eta^2) \Delta h(\eta) \quad \dots\dots (10)$$

この式は $\eta = 1/\sqrt{2}$ で下記の最大値をとる。

$$\max \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_0} = p(1/\sqrt{2}) = 0.242 \frac{U}{t_0} \quad \dots\dots (11)$$

この場合の位置と温度はそれぞれ(12), (13)式で表される。

$$y = \sqrt{2\nu t_0} \quad \dots\dots (12) \quad u = U \operatorname{erf}(1/\sqrt{2}) = 0.68 U \quad \dots\dots (13)$$

すなわち時刻を定めた時最大冷却速度をとる温度は定められた時刻にかかわらず一定で $0.680 U$ である。これは2・2・1で位置を指定した時の最大冷却速度をとる温度が $0.917 U$ となったことと特に矛盾はしない。その理由は、ある位置においてその位置における最大冷却速度が実現する時点では、その位置よりも表面に近い(すなわちより低温の)領域でより大きな冷却速度が実現されているからである。

2・3・2 指定温度における冷却速度

(A3)と(10)の両式から、指定温度 u_R における冷却速度は(14)式で表される。

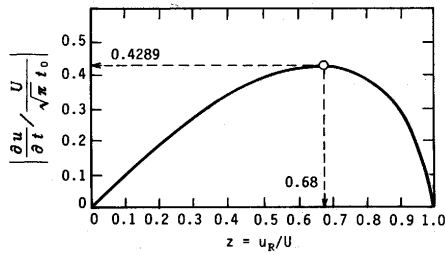


Fig. 2. Dimensionless cooling rate at a fixed time as a function of temperature.

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \frac{U}{\sqrt{\pi t_0}} = g(z) \triangleq (\text{erf}^{-1}z) \cdot \exp\{- (\text{erf}^{-1}z)^2\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\substack{t=t_0 \\ u=u_R}} = \frac{-U}{\sqrt{\pi t_0}} g\left(\frac{u_R}{U}\right) \dots\dots\dots (14)$$

ただし $g(z) \triangleq (\text{erf}^{-1}z) \exp\{- (\text{erf}^{-1}z)^2\} \dots\dots\dots (15)$

g は時刻指定の場合の無次元冷却速度である。(15)式の関数は指定温度の影響を表しており、その形状をFig. 2に図示する。またこの場合の位置 y_R は(A4)式から(16)式で表される。

$$y_R \triangleq 2\sqrt{\nu t_0} \text{erf}^{-1}(u_R/U) \dots\dots\dots (16)$$

(11)と(14)の両式から、時刻 t_0 を指定した場合の、最大冷却速度と指定温度での冷却速度はともに、i) U に比例し、ii) t_0 に反比例し、iii) ν には無関係となる。特にiii)が位置指定の場合と異なる事は注目すべきである。

3. 凝固を含む熱伝導系の冷却速度の解析

物質は純物質(凝固温度一定)で過冷はなく、固相・液相ともに静止状態で流動がない場合の温度分布(Fig.A1参照)の解析解は付録2.の(A14)(A15)がNeumannにより得られている²⁾。

3・1 冷却速度の解析

深さ y_0 の位置に凝固が達する時刻 t_0 は、

$$t_0 = y_0^2 / (4\lambda^2 \nu_1) \dots\dots\dots (17)$$

$0 < t < t_0$ における y_0 における冷却速度は(A15)から

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{y=y_0} = \frac{-\Delta T}{\text{erfc}\sqrt{\nu_1 \lambda / \nu_2}} \frac{y_0}{2\sqrt{\pi \nu_2} t^{3/2}} \exp\left(-\frac{y_0^2}{4\nu_2 t}\right) \dots\dots (18)$$

この式から $\eta_2 = \sqrt{3/2}$ すなわち、次の時刻 t_2 の時、冷却速度は極値をとる($t_2 \leq t_0$ の時)。

$$t_2 \triangleq \frac{y_0^2}{6\nu_2} \dots\dots\dots (19)$$

$t > t_0$ における、位置 y_0 での冷却速度は(A14)から、

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{y=y_0} = \frac{-(T_m - T_0)}{\text{erf} \lambda} \frac{y_0}{2\sqrt{\pi \nu_1} t^{3/2}} \exp\left(-\frac{y_0^2}{4\nu_1 t}\right) \dots\dots (20)$$

冷却速度は次の時刻 t_1 で極値をとる(ただし $t_1 \geq t_2$ の時)。

$$t_1 \triangleq y_0^2 / (6\nu_1) \dots\dots\dots (21)$$

(17), (18), (21)で凝固時の冷却速度に関連して3つの時間が定義された。 t_0 (凝固時間), t_1 (固体状態での冷却速度極大時間), t_2 (液体状態での冷却速度極大時間)。

これらの大小関係の組み合わせは、次の6通りである。

$$\left. \begin{array}{l} \text{Case A } (t_0 \leq t_1 \leq t_2), \text{ Case B } (t_0 \leq t_2 \leq t_1) \\ \text{Case C } (t_1 \leq t_0 \leq t_2), \text{ Case D } (t_1 \leq t_2 \leq t_0) \\ \text{Case E } (t_2 \leq t_0 \leq t_1), \text{ Case F } (t_2 \leq t_1 \leq t_0) \end{array} \right\} \dots\dots (22)$$

t_0, t_1, t_2 の大小関係は次の(23)式により定まる。

$$\left. \begin{array}{l} \lambda \cong \sqrt{3/2} \quad \text{ならば} \quad t_0 \cong t_1 \text{ (複号同順)} \\ \nu_1 \cong \nu_2 \quad \text{ならば} \quad t_1 \cong t_2 \text{ (複号同順)} \\ \lambda \cong \sqrt{3\nu_2 / (2\nu_1)} \quad \text{ならば} \quad t_0 \cong t_2 \text{ (複号同順)} \end{array} \right\} \dots\dots (23)$$

いまは、純物質の凝固を考えているので、 $t = t_0$ において、冷却速度が下記の、液体での値 I_{20} から固体での値 I_{10} に移るため、一般には $t = t_0$ において冷却速度は不連続点を有する。

$$I_{10} \triangleq \left| \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \frac{T_m - T_0}{\lambda \text{erf} \lambda \exp(\lambda^2)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4\lambda^4 \nu_1}{y_0^2} \dots\dots\dots (24)$$

$$I_{20} \triangleq \left| \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \frac{\Delta T}{\text{erfc}\sqrt{\lambda \nu_1 / \nu_2}} \frac{4}{\sqrt{\pi \nu_2}} \frac{\lambda^3 \nu_1^{3/2}}{y_0^2} \exp\left(-\frac{\nu_1}{\nu_2} \lambda^2\right) \dots\dots\dots (25)$$

また(23)の種々のケースの中で、 $t_0 \leq t_1$ の場合には下記の固体状態での冷却速度極大値 I_{11} が、 $t_2 \leq t_0$ の場合には液体状態での冷却速度極大値 I_{22} が実現する。

$$I_{11} \triangleq \left| \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{t=t_1} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{\pi} \exp(3/2)} \frac{T_m - T_0}{\text{erf} \lambda} \frac{\nu_1}{y_0^2} \dots\dots\dots (26)$$

$$I_{22} \triangleq \left| \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|_{t=t_2} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{\pi} \exp(3/2)} \frac{\Delta T}{\text{erfc}(\sqrt{\lambda \nu_1 / \nu_2})} \frac{\nu_2}{y_0^2} \dots\dots (27)$$

薄片表面温度を常温の冷却媒体温度まで下げられる場合は、 $T_m \gg \Delta T$ であるから $I_{10}, I_{11} > I_{20}, I_{22}$ となる。この場合、Case A~Case Fの場合の冷却速度変化を模式的に表現すればFig. 3の如くとなる。

(24)式右辺第1項分母の $\lambda \text{erf} \lambda \exp(\lambda^2)$ は、 λ のべき級数に展開され、 $\lambda \ll 1$ では λ^2 に比例し、 λ の増大とともに、高次の項が無視できなくなる。比較的 λ の小さい範囲では、次の近似式で表される。

$$\lambda \exp(\lambda^2) \text{erf}(\lambda) \cong \begin{cases} 2\lambda^2 / \sqrt{\pi} = 1.1284\lambda^2 \\ (0 \leq \lambda \leq 0.432) \dots\dots\dots (28) \\ 2.6160\lambda^3 (0.432 \leq \lambda \leq 1.2) \dots\dots (29) \end{cases}$$

(28), (29)式を(24)式に代入して凝固直後の冷却速度に

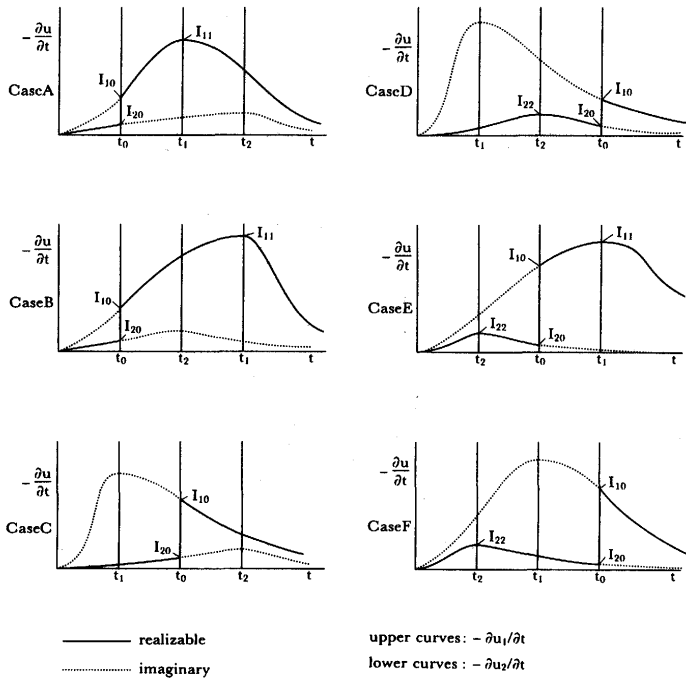


Fig. 3. Classification of patterns of cooling rate change.

対する下記の近似式を得る。

$$I_{10} \doteq \begin{cases} 2\nu_1(T_m - T_0)\lambda^2/y_0^2 & (0 \leq \lambda \leq 0.432) \dots (30) \\ 0.8640\nu_1(T_m - T_0)\lambda/y_0^2 & (0.432 \leq \lambda \leq 1.2) \dots (31) \end{cases}$$

ここで次の無次元パラメタを定義する。

$$Ya \triangleq C_1(T_m - T_0)/L \dots (32)$$

$\Delta T = 0$ の場合は λ が Ya を用いて近似できる。すなわち(A22), (32)から

$$\lambda \doteq \begin{cases} \sqrt{0.5Ya} & (0 \leq \lambda \leq 0.432; 0 \leq Ya \leq 0.3732) \dots (33) \\ \sqrt[3]{0.2160Ya} & (0.432 \leq \lambda \leq 1.2; 0.3732 \leq Ya \leq 8.0) \dots (34) \end{cases}$$

したがって $\Delta T = 0$ の場合は、凝固直後の冷却速度は(30), (31), (33), (34)から次式で表される。

$$I_{10} \doteq \begin{cases} \frac{\nu_1(T_m - T_0)Ya}{y_0^2} = \frac{k(T_m - T_0)^2}{\rho Ly_0^2} & (0 \leq Ya \leq 0.3732) \dots (35) \\ \frac{0.8640\nu_1(T_m - T_0)\sqrt[3]{0.2160Ya}}{y_0^2} = \frac{0.5184k(T_m - T_0)^{4/3}}{\rho C^{2/3}L^{1/3}y_0^2} & (0.3732 \leq Ya \leq 8.0) \dots (36) \end{cases}$$

この時の時間は(17)(27)(34)から

$$t_0 \doteq \begin{cases} \frac{y_0^2}{2Yav_1} & (0 \leq Ya \leq 0.3732) \dots (37) \\ \frac{y_0^2}{4(0.2160Ya)^{2/3}\nu_1} & (0.3732 \leq Ya \leq 8.0) \dots (38) \end{cases}$$

3・2 熱的物性値と最大冷却速度

$\Delta T = 0$ の場合を考える。この場合、凝固冷却過程を支配するパラメタ λ は(33), (34)式に見る如く無次元パラメタ Ya により決定される。 Ya は、凝固面と鋳片表面との間の顕熱差と凝固潜熱の比率を表す。冷却媒体の温度を固定すると Ya は物質固有の物性値となる。かりに冷却媒体の温度として絶対零度と摂氏零度を選んだ場合の Ya をそれぞれ $Ya_{,1}$, $Ya_{,2}$ と表す。代表的な金属における $Ya_{,1}$, $Ya_{,2}$ の値を文献¹⁵⁾に記載されている熱物性値の値から計算しTable 1に示した。この中で鉄の Ya が一番大きい。 Ya が大きいと(33), (34)から λ も大きくなり、(A18)から同じ ν_1 の金属で比較すると Ya の大きい方が凝固が速く進行する。

いま常温近くの冷却媒体で強く冷却する場合を想定してTable 1の $Ya_{,2}$ の値を用いる。いまは $\Delta T = 0$ の場合を考えているので液体での冷却速度変化はない。したがってFig. 3において固体での冷却速度が、C, D, Fのように凝固直後に最大値をとるのか、A, B, Eのように凝固後有限時間後に極大値をとるのかを考える。 Ya が大きいほど λ が大きくなるが、 Ya が一番大きい(4.917)鉄でも(34)式から $\lambda = 1.02$ となり(23)式の $\sqrt{3/2} \doteq 1.225$ よりも小さいので $t_0 > t_1$ となる。したがって、全ての金属元素において $t_0 > t_1$ となり、凝固後の冷却速度変化パターンで実現可能性のあるのはFig. 3の6つのケースのうちC, D, Fの凝固直後に最大値をとるケースである。この時最大冷却速度は(35), (36)式において $y_0 = \delta$ において計算できる。

(A18)式より、凝固長 δ は凝固開始からの経過時間 t の1/2乗に比例する。この事を(35), (36)式において考慮すると、最大冷却速度は t に反比例、または凝固位置の深さ y の2乗に反比例する。この様子をFig. 4に模式的に示す。

鋳片表面が常温まで充分冷却される場合、全ての金属元素の Ya は $0.929 \leq Ya \leq 4.917$ の範囲にある(Table 1)ので、その最大冷却速度は(36)式で表される。

凝固なしの伝熱の場合には、位置を決めた時は最大冷却速度が $0.917U$ の温度で発生し、一方時刻を定めた時には最

Table 1. Values of non-dimensional parameter Ya for main metals.

Metal	Melting Point [K]	Heat of Fusion [J/mol]	Specific Heat [J/(mol. K)]	Non-dim. Parameter $Y_{n,1}$ (Abs. Temp.) (): order	Non-dim. Parameter $Y_{n,2}$ (Cels. Temp.) (): order
Sb	903	19700	29.03	1.332 (1)	0.929 (1)
Sn	505	7000	30.77	2.221 (2)	1.020 (2)
Zn	692	7120	28.97	2.820 (3)	1.708 (3)
Ag	1233	11000	26.18	2.937 (4)	2.287 (7)
Mg	932	8960	29.09	3.026 (5)	2.139 (5)
Ti	1953	18700	29.67	3.099 (6)	2.665(10)
Cu	1356	13100	30.05	3.112 (7)	2.485 (8)
Au	1336	12370	29.67	3.206 (8)	2.550 (9)
Al	933	8400	29.02	3.224 (9)	2.281 (6)
Mo	2903	27800	32.51	3.395(10)	3.076(12)
Ni	1726	17500	34.88	3.441(11)	2.897(11)
Pb	600	4870	28.61	3.529(12)	1.924 (4)
Cr	2163	13800	33.73	5.287(13)	4.619(13)
Fe	1809	13800	44.17	5.791(14)	4.917(14)

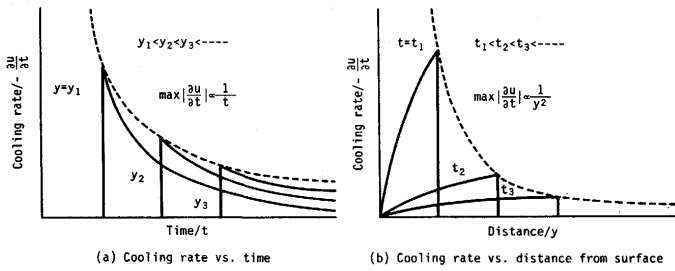


Fig. 4. Schematic distribution of cooling rate during solidification.

大冷却速度が $0.680U$ の温度で発生するという様に、指定する項目により最大冷却速度をとる温度が異なっていた。これに対して凝固を含む伝熱の場合には、位置を指定した場合も時刻を指定した場合もともに、凝固点における冷却速度が最大となる。

凝固を含まない場合は凝固を含む場合に比較して、冷却速度に与える熱落差の影響次数が小さい。実際、凝固無しの場合の(4)式は熱落差の1乗に比例しているのに対し、凝固を含む場合の(35)、(36)式は熱落差の $(4/3 \sim 2)$ 乗に比例している。これは凝固を含まない系では熱落差の増大が単に温度勾配の比例的な増加につながるだけであるのに対し、凝固系においては熱落差が大きくなると凝固速度と凝固面での温度勾配がともに大きくなる(冷却速度はこれらの積)事によっている。

これまでの主な結果はTable 2にまとめた。

本論文では純金属を解析した。合金の場合は、凝固開始前および完全凝固後の冷却速度は純金属の場合と同様に扱えるが、凝固温度範囲では固液共存温度域幅に応じて幾分修正を要する。固液共存温度域幅が広いほど最大冷却速度が小さくなる。

以上の解析は鋳片と冷却媒体の間の熱伝達係数が無限大すなわち表面温度一定の条件下でなされたが実際の凝固プロセスでは鋳型を用いるため鋳片表面温度は時間とともに変化する。この場合系内の温度変化は誤差関数により記述する事はできず新たな関数形の導入が必要となる。詳細に

については別途報告の予定である。

4. 結言

板鋳造における鋳片の各位置での冷却速度の最大限界値を解析し以下の結果を得た。

(1) 凝固現象を伴わない冷却の場合

物体内の位置を固定すると、各位置での最大冷却速度は深さの -2 乗に比例し、その時の時間は、深さの 2 乗に比例する。その時の温度は位置や熱的物性値によらず一定で、 $0.92U$ である。

物体内の冷却速度分布の時間変化をみると、冷却速度が最大となる位置は、表面から深部に向かって、時間の $1/2$ 乗に比例して移動し、最大冷却速度は時間に反比例して減少する。また最大冷却速度をとる位置での温度は時刻や熱的物性値によらず一定で、 $0.68U$ である。

(2) 凝固現象を伴う冷却の場合(純物質、過冷なし)

溶湯に過熱度が存在する場合、ある位置での冷却速度の変化は、3つの時間[t_0 (凝固時間), t_1 (固体状態での冷却速度の極大時間), t_2 (液体状態での冷却速度の極大時間)]の大小関係においてとり得る組み合わせに対応して、6つのパターンに分類される。過熱度がない場合は、凝固前の冷却速度は零で、凝固後の変化が単調減少か極大値を有するかのいずれかとなり、冷却速度の変化パターンは無次元数 Ya の大きさにより定まる。これより全金属元素で、任意位置での冷却速度は、その位置を凝固面が通過した直後に最大値をとる。また時間を固定した場合、凝固先端部の冷却速度が最も大きい。

最大冷却速度の大きさが、表面からの深さの 2 乗に反比例する点は、凝固現象を含まない(1)の場合と同様であるが、熱落差に関しては、最大冷却速度が、(1)の場合熱落差に比例するのに対し、凝固を伴う冷却の場合は、熱落差の $(\frac{4}{3} \sim 2)$ 乗に比例する。

Table 2. Cooling rate in each case.

Case		Cooling rate	Location	Time	Temperature	
Without solidification	Location fixed	Maximum cooling rate	$\frac{0.925 \nu U}{y_0^2}$	Fixed y_0	$\frac{y_0^2}{6 \nu}$	$0.917U$
		Temperature fixed	$\frac{4 \nu U}{\sqrt{\pi} y_0^2} f\left(\frac{u_R}{U}\right)$	y_0	$y_0^2 / [4 \nu \{ \text{erf}^{-1}(\frac{u_R}{U}) \}^2]$	u_R
	Time fixed	Maximum cooling rate	$0.242 \frac{U}{t_0}$	$\sqrt{2 \nu t_0}$	Fixed t_0	$0.680U$
		Temperature fixed	$\frac{U}{\sqrt{\pi} t_0} g\left(\frac{u_R}{U}\right)$	$2\sqrt{\nu t_0} \text{erf}^{-1}(u_R/U)$	t_0	u_R
With solidification	Maximum cooling rate	$0 \leq Ya \leq 0.3732$	$\frac{k(T_m - T_0)^2}{\rho L y_0^2}$	$\frac{y_0^2}{2Ya \nu} = t_0$	$T_m - 0$	
		$0.3732 \leq Ya \leq 8.0$	$\frac{0.5184 k(T_m - T_0)^{4/3}}{\rho C^{2/3} L^{1/3} y_0^2}$	$\frac{y_0^2}{4(0.2160 Ya)^{2/3} \nu} = t_0$	$T_m - 0$	

記号

[熱的物性値]

C: 比熱(J/(kg·K)), k: 熱伝導率(W/(m·K)), L: 凝固潜熱(J/kg), ν : 温度拡散率(m²/s), ρ : 密度(kg/m³)

[温度(K), 冷却速度(K/s)]

T₀: 鑄片表面温度, T_m: 凝固温度, U: 初期温度, u: 温度, ΔT : 溶鋼過熱度, I₁₀: 凝固直後冷却速度, I₂₀: 凝固直前冷却速度, I₁₁: 固体状態での冷却速度極大値, I₂₂: 固体状態での冷却速度極大値

[時間(s), 位置(m)]

t: 時間, t₀: 凝固時間, t₁: 固体状態での冷却速度極大時間(s), t₂: 液体状態での冷却速度極大時間(s), y: 空間座標(鑄片厚み方向), δ : 凝固シェル厚

[無次元パラメータ]

Ya: 顕熱/潜熱比, η : $y/(2\sqrt{vt})$, λ : 無次元凝固パラメータ

[関数形]

erf: 誤差関数, erfc: 補誤差関数, h: 関数形(2)式, f: (8)式, p: (10)式, g: (15)式, o(): ()のオーダー値

[その他]

\triangle : Aの定義がBであることをA \triangle Bと表す

添え字; O, R: 注目点, 1: 固体, 2: 液体

文献

- 1) 伊藤幸良: 鉄と鋼, 72 (1986), p.1667
- 2) H.S.Carslaw and J.C.Jaeger: Conduction of Heat in Solids, (1957), p.51, p.285 [Oxford Univ. Press]
- 3) 山口昌哉, 野木達夫: ステファン問題, (1977), [産業図書]
- 4) L.I.Rubenstein: The Stefan Problem, (1971), [American Mathematical Society]
- 5) C.Schwarz: Arch.Eisenhüttenwes., 5 (1931), p.139, p.177
- 6) A.Garcia, T.W.Clyne and M.Prates: Met.Trans., 10B(1979), p.85
- 7) T.W.Clyne, A.Garcia, P.Ackerman and W.Kurz: J.Met., 34 (1982), p.34
- 8) 新山英輔: 鑄物, 43 (1971), p.943
- 9) 新山英輔: 鑄物, 44 (1972), p.1047
- 10) S.R.Goodman: Trans. ASME, 80 (1959), p.335
- 11) A.W.D.Hills: Trans.Met.Soc.AIME, 245 (1969), p.1471
- 12) R.J.Sarjant and M.R.Slack: J.Iron Steel Inst., 177 (1954), p.428
- 13) E.A.Mizikar: Trans.Met.Soc.AIME, 239 (1967), p.1747
- 14) A.B.Crowley and J.R.Ockendon: Int.J.Heat Mass Transfer, 22 (1979), p.941
- 15) 日本金属学会編: 金属データブック, (1974), p.10 [丸善]

付録1. 凝固を含まない場合の半無限体における1次元非定常熱伝導問題

1次元熱伝導方程式: $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (A1)

境界条件: $u(0, t) = 0 (t > 0)$, $u(y, 0) = U$ (A2)

この解はよく知られているように(A3)となる²⁾。

$u(\eta) = U \operatorname{erf}(\eta)$ (A3) ただし $\eta \triangleq \frac{y}{2\sqrt{vt}}$ (A4)

$\operatorname{erf} \eta \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-\beta^2) d\beta$ (A5)

したがって冷却速度は

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-yU}{2\sqrt{\pi\nu t^{3/2}}} \exp\left(-\frac{y^2}{4vt}\right)$ (A6)

付録2. 凝固を含む場合の半無限体における1次元非定常熱伝導問題

基礎方程式:

$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}$ (A7), $\frac{\partial u_2}{\partial t} = \nu_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}$ (A8)

境界条件:

$\rho L \frac{d\delta(t)}{dt} = k_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}(\delta(t)-0) - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}(\delta(t)+0)$ (A9)

$u_1(\delta(t)-0, t) = u_2(\delta(t)+0, t) = T_m$ (A10)

$u_2(\infty, t) = U$ (A11), $\Delta T \triangleq U - T_m$ (A12), $u_1(0, t) = T_0$ (A13)

次の解析解が知られている²⁾。

$u_1 = T_0 + \frac{T_m - T_0}{\operatorname{erf} \lambda} \operatorname{erf} \frac{y}{2\sqrt{\nu_1 t}} = T_0 + \frac{T_m - T_0}{\operatorname{erf} \lambda} \operatorname{erf} \eta_1$ (A14)

$u_2 = U - \frac{\Delta T}{\operatorname{erfc} \sqrt{\lambda \nu_1 / \nu_2}} \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{\nu_2 t}}$
 $= \left[U - \frac{\Delta T}{\operatorname{erfc} \sqrt{\lambda \nu_1 / \nu_2}} \right] + \frac{\Delta T}{\operatorname{erfc} \sqrt{\lambda \nu_1 / \nu_2}} \operatorname{erf} \eta_2$ (A15)

ただし, $\eta_1 \triangleq y / (2\sqrt{\nu_1 t})$ (A16), $\eta_2 \triangleq y / (2\sqrt{\nu_2 t})$ (A17)

$\lambda \triangleq \delta / (2\sqrt{\nu_1 t})$ (A18)

λ は次式から定まる。

$\frac{\rho L \sqrt{\pi} \nu_1 \lambda}{k_1 (T_m - T_0)} = \frac{\exp(-\lambda^2)}{\operatorname{erf} \lambda} - \frac{k_2 \sqrt{\nu_1} \Delta T \cdot \exp(-\nu_1 \lambda^2 / \nu_2)}{k_1 \sqrt{\nu_2} T_m \cdot \operatorname{erfc}(\lambda \sqrt{\nu_1 / \nu_2})}$ (A19)

$\Delta T = 0$ のときは(A14), (A15), (A19)より

$u_1 = T_0 + (T_m - T_0) \operatorname{erf} \eta_1 / \operatorname{erf} \lambda$ (A20), $u_2 = U$ (A21)

ただし, $\lambda \exp(\lambda^2) \operatorname{erf} \lambda = C_1 (T_m - T_0) / (L\sqrt{\pi})$ (A22)

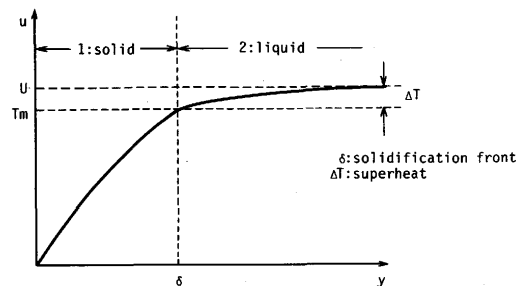


Fig. A1. Schematic representation of a temperature distribution along the depth during solidification with superheat.