

計測信号処理における最近の研究 —時間-周波数二次元分布—

北 川 孟*

Current Research on Signal Processing : Time-Frequency Distribution

Hajime KITAGAWA

1. 緒 言

センサーから得られる信号の処理は情報工学における基本的要素技術であるが、材料研究の分野においても必須技術と考えられる。これらほとんどの計測信号は、時系列データ (Time Series, 実質的には Signal と同義) の形で得られる。最近ではデジタル信号処理技術の進歩と普及とともに、種々の新しい解析手法が研究されている。その結果、計測信号に含まれる、従来解析できなかった特性から多くの新しい有益な情報が得られるようになった。特にスペクトルの時間的変化を精度よく解析することによってより多くの新しい情報が得られている。これらの情報は、時間と周波数をそれぞれ独立変数とした二次元解析から得られる。本報では、時間-周波数 (t - f) 二次元解析法を主体に最近の研究成果を述べる。まず計測信号の基本的分類を行い、従来の解析法と理論的限界、 t - f 二次元解析法の必要性和最近得られた研究成果の新規性と有用性について具体的に述べる。

2. 信号の分類

計測信号は、Fig. 1 のように分類できる。これは R. B. Randall らによる分類¹⁾を著者が加筆、訂正したものである。信号継続時間に関しては、連続信号と衝撃音(振動)のような持続時間の短い過渡信号に分類される。

信号の性質に関しては、定常信号と非定常信号に分類される。定常信号は、(少なくとも観測時間中に)その周波数成分が変化しない。非定常信号とは、周波数変調信号や音声のように時間とともに周波数が変化する信号である。

確定定常信号は、離散的周波数成分から構成されている。(これはさらに基本周波数とその整数倍の周波数からなる周期信号と、2つ以上の独立した基本周波数とその高調波成分が混合した疑周期信号とに区別される場合

があるが、この区別は一般には重要ではない。) 一方ランダム定常信号では、連続した周波数分布となる。

従来は、継続時間の短い信号(過渡信号)と非定常信号との区別が極めて曖昧であった。すなわち定常過渡信号は多くの場合、非定常信号と混同して扱われてきた。その理由は、信号の周波数成分の時間変化を精度良く解析する方法が存在しなかったからである。また本質的に確定定常信号であるべきものがランダム定常信号と見なされる場合も多かった。この理由も信号解析方法の精度が十分に高くなかったことに起因する。

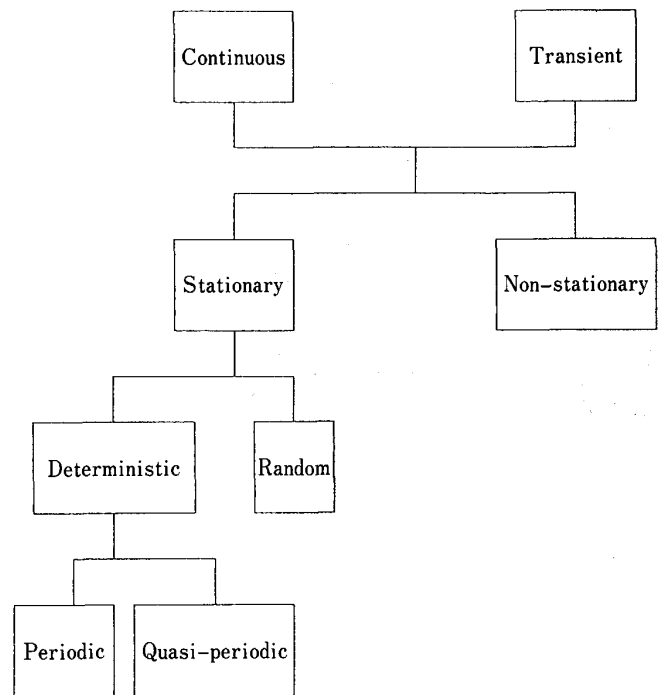


Fig. 1. Classification of measured signals.

平成3年9月25日受付 平成4年4月10日受理 (Received on Sep. 25, 1991; Accepted on Apr. 10, 1992) (依頼技術資料)

* 豊橋技術科学大学教授 工博 (Toyohashi University of Technology, 1-1 Hibarigaoka Tempaku-cho Toyohashi 441)

Key words : digital signal processing; time series; time-frequency two-dimensional analysis; wigner distribution; wavelet transform.

3. 従来の解析方法とその限界

計測信号の解析で最も良く利用されるのは、その振幅(エネルギー)の大きさに関する情報である。例えば非破壊検査においては、あらかじめ設定した閾値を超える大きさの振幅をもつ信号位置から傷の情報を得ている。騒音レベルも音のエネルギーから評価される。

さらに共振周波数を求めるなど計測信号の周波数成分を解析する場合は信号の周波数領域への変換(すなわちフーリエ変換)が行われる。Fig. 1の定常信号と非定常信号は、周波数成分の性質によって分類されたものである。しかし単に時間領域から周波数領域への変換から得られたパワースペクトルからは、周波数成分の時間変化を把握することは不可能である。この理論的限界が分類を曖昧にしておき、周波数成分の時間変化を解析するためには信号の t - f 二次元解析が必要である。

一方計測信号の t - f 二次元解析法としては、実は今までもいくつかの手法が用いられている。最も広く利用されている方法は、スペクトログラム(短時間フーリエ変換法, STFT)である。この方法には時間方向の分解能と周波数方向のそれとの間にトレードオフがあり、両方向の高い解析精度を得ることはできない。STFT 解析で確定定常信号がランダム定常信号と見なされるのは、この様な理由による(具体例は後述する)。

4. 新しい t - f 二次元解析法

信号の定常性と非定常性の判別や非定常信号の解析には、周波数成分の時間的な変化を把握する必要がある。

このような要請に応じて活発に研究が行われている新しい t - f 二次元解析法として、ウェーブレット変換やウィグナー分布などがある。

時系列信号のウェーブレット変換²⁾⁸⁾ $S(a, b)$ は式(1)で与えられる。

$$S(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} g^*[(t-b)/a] f(t) dt / \sqrt{|a|} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$g(t)$ は、アナライジングウェーブレットと呼ばれる、変換の性質を決定する関数である。 a と b はそれぞれ時間の縮尺(スケーリング)と移動を表すパラメータである。ウェーブレット変換は時系列中に局所的に現れるデータの解析に適しており、主として音響解析に関して最近多くの研究成果が発表されている⁹⁾¹⁰⁾。

ウィグナー分布(WD)は元来量子力学の分野で提唱された理論であるが¹¹⁾、1980年に Philips 社の Claassen らがこの方法を音響信号の t - f 二次元解析に適用して以後¹²⁾¹⁴⁾ 光学を含む波動計測信号全般を対象とした解析手法として関心を集めている¹⁵⁾。これは、定常信号での相関関数とパワースペクトルに関する Wiener-Khinchine の関係を非定常信号の領域まで拡大し適用したものの¹⁶⁾、

とも解釈できる。2つの時間関数信号 $f(t)$, $g(t)$ の WD は式(2)で与えられる。

$$W(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau) g^*(t-\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \quad \dots\dots\dots(2)$$

$f(t) \neq g(t)$ のとき cross-WD, $f(t) = g(t)$ のとき auto-WD という。ある時間 t で WD を周波数に関して積分すると、その時間での瞬時パワーが得られる。すなわち

$$(1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} W(t, \omega) d\omega = |f(t)|^2 \quad \dots\dots\dots(3)$$

ある周波数 ω で WD を時間に関して積分すると、その周波数でのパワースペクトルが得られる。すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(t, \omega) dt = |F(\omega)|^2 \quad \dots\dots\dots(4)$$

この他にも、WD では他の二次元解析手法からは得られない特性を求めることができる¹⁶⁾¹⁷⁾。

WD では時間窓の影響が除かれ、時間平均演算を行わないので時間および周波数の両成分に関して高い分解能が得られる。しかしクロス項と呼ばれる干渉項が生じるため、信号成分の直観的判別が困難になる、という問題点がある。

ウェーブレット変換ではこのような問題は生じないが、cross-WD 解析のような2つの信号に関する t - f 二次元分布を得ることは本質的に不可能である。

これらの方法は、今後は双方相補って有力な信号解析手法の軸になることが予想される。

本報では WD を主体にその干渉項低減方法の検討と、その結果から作成したアルゴリズム (RID, Reduced Interference Distribution) を用いたシミュレーション信号と実測信号の解析結果について以下に述べる。

5. WD における干渉項低減方法の検討と RID アルゴリズム¹⁸⁾¹⁹⁾

5.1 干渉項

干渉項とは、WD の t - f 平面上の表示において任意の方向に隣り合った2つの信号の中間位置に生じる正負に振動する物理的意味をもたない信号成分である。今、離散化された信号を式(5)で表すとその auto-WD は式(6)のようになる²⁰⁾。

$$f(t) = \sum_k f_k(t) \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$W_f(t, \omega) = \sum_k W_{fk}(t, \omega) + \sum_k \sum_i 2\text{Re}[W_{fkfi}(t, \omega)] \quad \dots\dots\dots(6)$$

式(6)は、 n 個の真の信号要素 (auto-WD) と nC_2 個の組み合わせからなる干渉項 (cross-WD の実部) とで構成されている。

干渉項は、相異なる信号間のもの(外部干渉)と単一信号内部のもの(内部干渉)に分類される (Fig. 2, Fig. 3)。Fig. 2 は式(7)で与えられる3つの信号の、

Fig. 3 はラグ窓長を十分長くにとって計算した単一信号の、WD である。

$$f_{FM} = A_0 \cos [\omega_0 t + \Delta\omega/p \times \sin(pt)] + \sin(\pi a_1 t^2) + \sin(1/2 - \pi a_2 t^2) \dots (7)$$

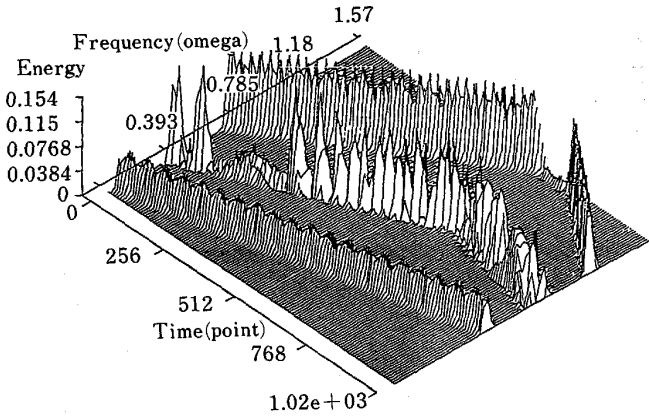


Fig. 2. An example of interference term. External interference, the spurious term between the two signals.

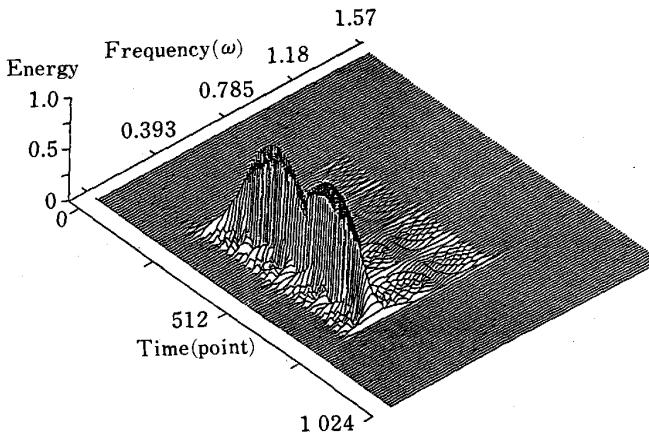


Fig. 3. Another example of interference term. Internal interference, the spurious term within the signal.

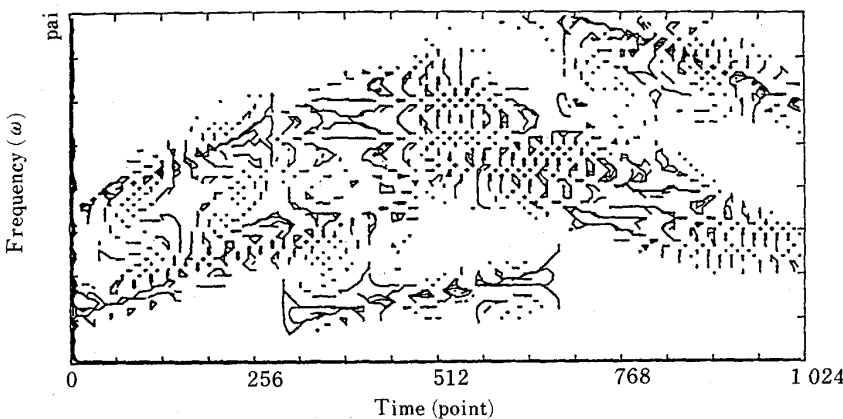


Fig. 4. WD of a simulation signal computed with 1024 point lag window.

5.2 干渉項低減に関する検討

干渉項低減に効果があると考えられる4つの方法について検討を行った。

(1) 適性ラグ窓長の選定

WD は有限長のラグ窓ごとに計算される。すなわちラグ (隔たり時間、式(2)の τ) ごとに適当な重み関数 (ラグ窓) を掛けて演算するので、干渉項の発生はその窓長の内部に限定される。したがって信号の性質に適したラグ窓長の選定は、干渉項低減対策として有効である。例えば、信号の中で振幅の大きな部分に注目し、抽出した部分の間隔より短いラグ窓を操作するようにする。

Fig. 4 と Fig. 5 とを比較すると、この信号ではラグ窓長が短く (128 点) なければならないことが分かる。しかし全信号を窓長一定として解析するとその性質を精度よく表現できない場合もあり、信号の特長に応じてその長さを自動的に可変にする方が有効であることも明らかになっている²¹⁾。

(2) 解析信号の計算方法変更

WD の計算では、原信号を解析信号に変換する。すなわち原信号を実部とし、そのヒルベルト変換対を虚部とする複素数を計算する。

通常は原信号全体を一度に解析信号に変換しラグ窓ごとに切りだして計算を行っている。この場合、切りだした短いセグメント内には負の周波数成分が含まれている。この影響を除去するために、計算時間は若干長くなるが、切りだしたセグメントごとに解析信号に変換する方法に改善した。

(3) スペクトログラム情報の利用

スペクトログラム (STFT) による解析では干渉項が含まれない。したがってこの情報を考慮すると外部干渉項の影響を除去することができる。そこで、最小ラグ窓で計算したスペクトログラムの t - f 平面上の分布と WD のそれとを比較し、ある閾値を超えるスペクトログラム信号成分に対応する (t - f 平面上の) WD 信号成分のみを抽出する方法を検討した。これによりほぼ完全に外部干渉項は除去できる。

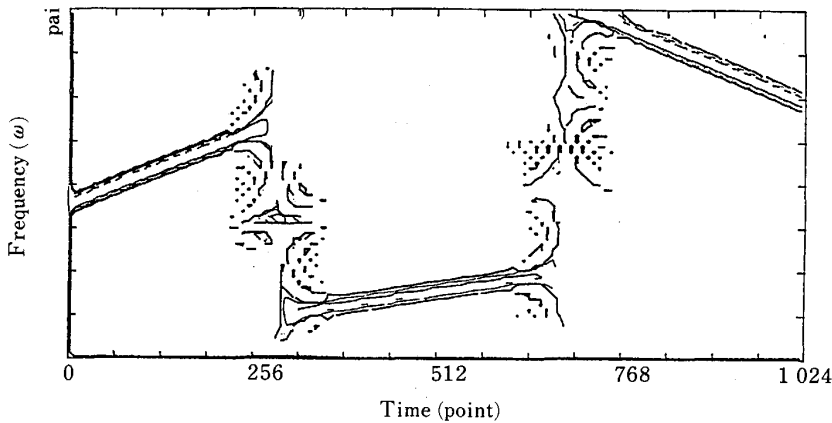


Fig. 5. WD of a simulation signal computed with 128 point lag window.

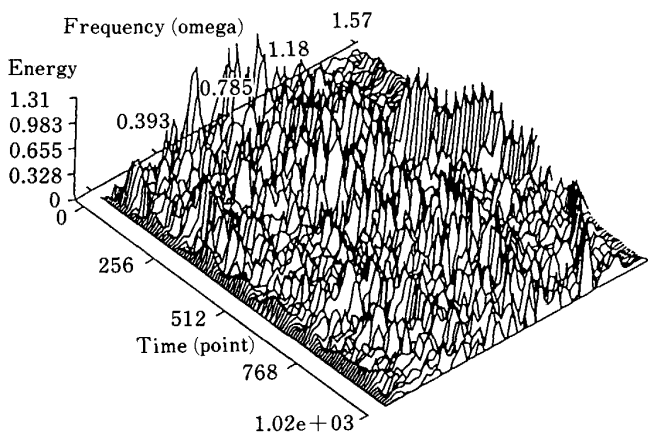


Fig. 6. WD of a simulation signal in the 0 dB white noise.

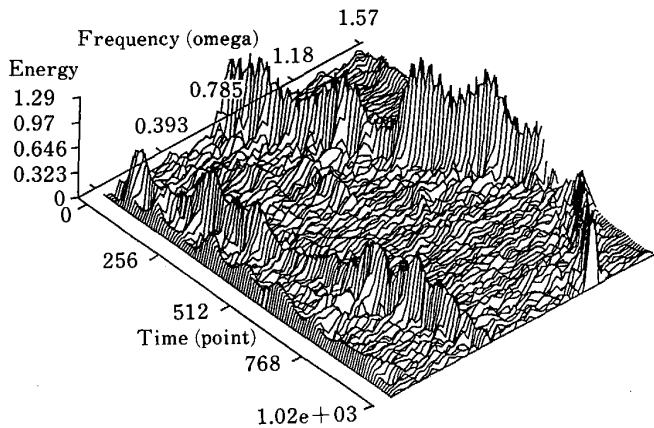


Fig. 7. SPWD of a simulation signal in the 0 dB white noise.

(4) WD の平滑化

WD の平滑化による干渉項低減方法が P. Flandrin らによって提案されている²²⁾。この効果についても併せて検討した。

これは、式(8)と式(9)によって時間と周波数に関して独立して平滑化操作を行うもので、干渉項低減のみならず雑音の消去にも有効である。

$$SW_f(t, \omega) = \sum_k h(k)^2 \sum_l R_f(t, l, k) e^{-j2k\omega} \dots (8)$$

$$R_f(t, l, k) = g(l) f(t+l+k) f^*(t+l-k) \dots (9)$$

$$(-L+1 \leq k \leq L-1, -M+1 \leq l \leq M-1)$$

この方法による複素ブラックマン窓を用いたシミュレーション信号の解析結果の比較例を Fig. 6 と Fig. 7 に示す。Fig. 6 が WD の結果であり、Fig. 7 が平滑化疑似 WD (SPWD) のそれである。これは式(7)の信号に $S/N=0\text{dB}$ のホワイトノイズを重畳したものである。この方法では信号の非定常性も平滑化されることもあり、 M の最適値を選択する必要がある。

5.3 RID アルゴリズムについて

5.1 で検討した複数の方法は、いずれも干渉項低減に有効であることが分かった。

そこで、これらの方法を総合的に組み合わせたアルゴリズムを作成し、種々の実測信号とシミュレーション信号を解析に適用して新しい t - f 二次元解析法としての可能性を検討した。

筆者らによる WD と RID の計算アルゴリズムを、Fig. 8 と Fig. 9 に示す。

これらのアルゴリズムを用いて、式(3)にホワイトノイズを重畳し $S/N=-6.02\text{dB}$ とした信号の解析した結果を Fig. 10 と Fig. 11 に示す。RID による解析では、干渉項のみならずノイズも除去され原信号成分が明瞭に判別できることが分かる。

6. RID による実測信号とシミュレーション信号の解析例 (新しい二次元解析法としての WD の効用)

種々の実測信号とシミュレーション信号を WD と RID により解析し、新しい二次元解析法としての効用を調べた。これらの解析例を、適用別に 4 分類する。

- (1) 非定常信号の解析
- (2) 定常過渡信号の解析
- (3) t - f 二次元分布のパターン分類
- (4) その他の適用例

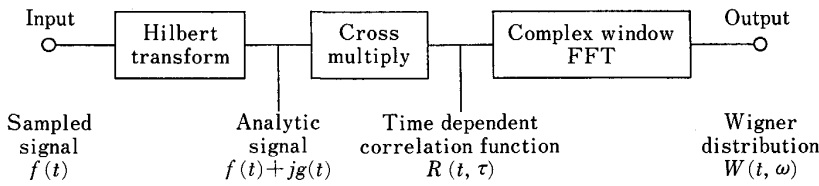


Fig. 8. Calculation algorithm of the WD.

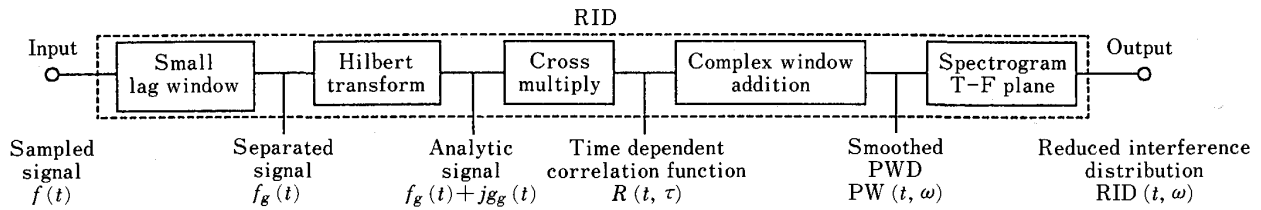


Fig. 9. Calculation algorithm of the RID.

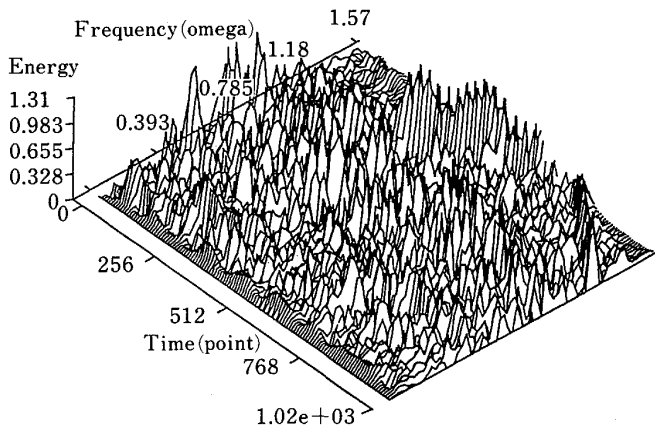
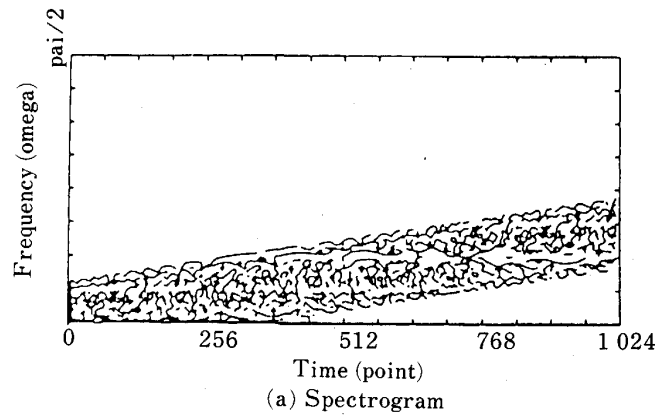
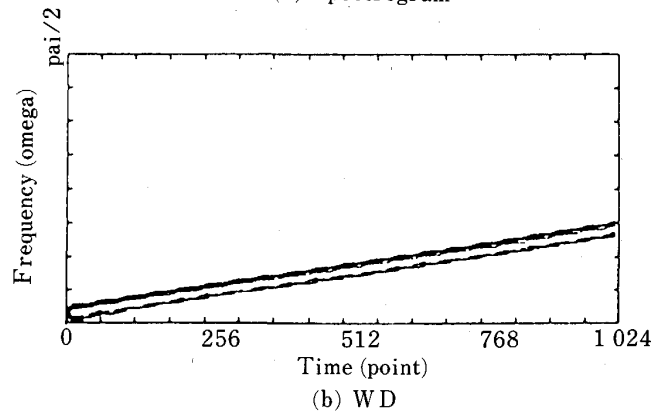


Fig. 10. WD of a simulation signal of $S/N = -6.02$ dB.



(a) Spectrogram



(b) WD

Fig. 12. Spectrogram and WD of a chirp signal.

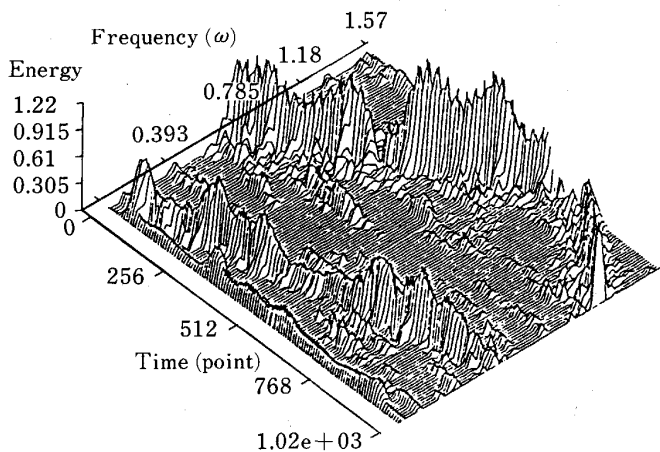


Fig. 11. RID of a simulation signal of $S/N = -6.02$ dB.

6.1 純粋な非定常信号の解析例

前述のように非定常信号として時間とともに周波数に変化する信号を対象とする。これらの信号として、音声や機械などの加速・減速の際の振動・音響信号および発生源の周波数が一定でも発生点と観測点の相対距離が変化

する場合の受信信号（ドプラー信号），などがある。

最も基本的な例として，単一のチャープ信号（シミュレーション）のスペクトログラムとWDの解析例をFig. 12に示す¹⁹⁾。この他に正弦波周波数変調信号やインパルス信号の比較例も発表されている¹⁷⁾²³⁾。いずれもWDの方が分解能が高く，RIDでは信号成分がより明確に判別できることが示されている。

実測信号として，音声信号の解析例をFig. 13に示す。これは /ai/ と発声した信号の第一フォルマントの分布である¹⁸⁾¹⁹⁾。今までもWDの方が線型予測分析などの他の手法より精度や処理速度などの点で優れているこ

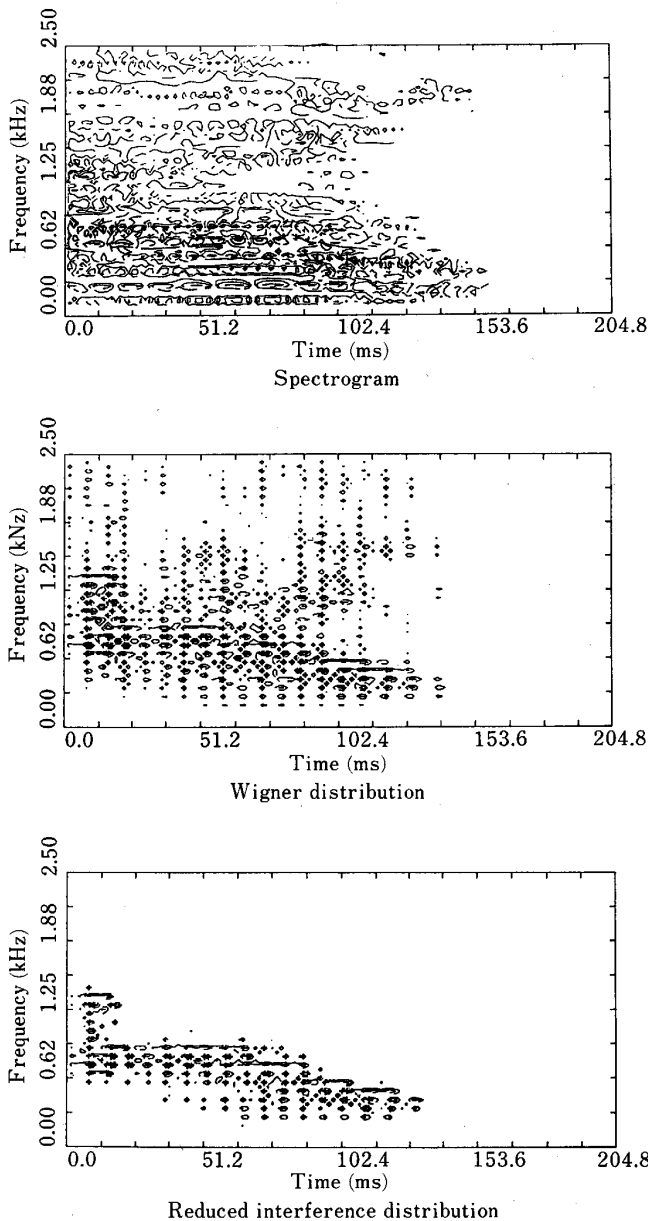


Fig. 13. Spectrogram, WD and RID of speech signals, /ai/, in Japanese.

とが報告されているが¹²⁾²⁴⁾, RID では分布がより明瞭であり調音結合性もとらえられている. f 方向と t 方向の平滑化を独立に行えるので, RID は音声の特長抽出(フォルマント抽出)に極めて効果的である.

6.2 定常過渡信号の解析例

本来離散的スペクトル分布をもち定常(確定)過渡信号として分類される衝撃音の解析例を示す. Fig. 14の計測系にて制振鋼板と冷延鋼板の衝撃音を測定した. 解析結果を Fig. 15~Fig. 18に示す. Fig. 15と Fig. 16は制振鋼板の衝撃音のWDとスペクトログラムの解析結果を比較したものである. スペクトログラム解析では分解能が悪いため分布が重なり合い, この分布を時間方向に縮退したパワースペクトルから信号の性質を判断す

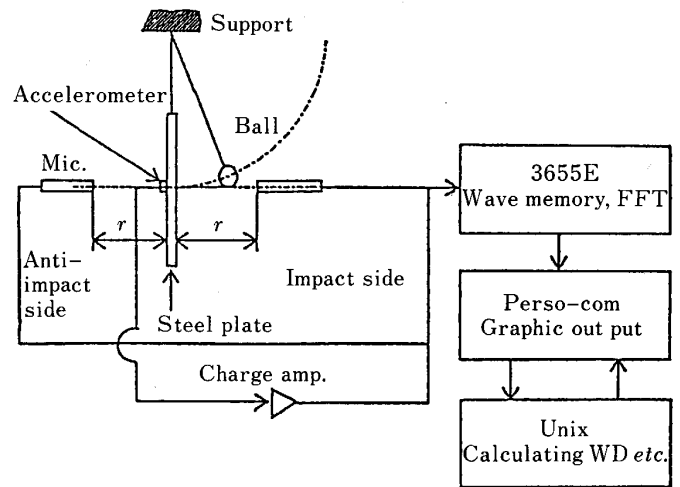


Fig. 14. Measurement system of an impact test.

ると定常確定信号ではなく定常ランダム信号と誤解される²³⁾. Fig. 17と Fig. 18は冷延鋼板の衝撃音のWDとRIDの解析結果の比較である. WDでは分解能が良かったため凹凸の激しい分布を示すが, 干渉項の影響で真の信号成分の直観的判別は困難である. RIDの解析結果では球の衝突音成分(1.26 kHz)と板の曲げ固有振動の周波数成分(1 kHz, 2 kHz近傍)が衝突側で抽出され, 衝突側と反衝突側の特性が明瞭に区別できる¹⁸⁾¹⁹⁾.

この他に, ベローズの共振周波数が精度よく解析できて実用上この種の機械要素の設計基準として有用であることが明らかになっている²⁵⁾.

6.3 t - f 二次元分布のパターン分類

RID解析による t - f 二次元分布はその信号の特長をよく表現できることを活用して, 分布パターンによる分類の有用性も検討されている.

Fig. 19は, 軸受の傷音をRIDにより解析した例である. 軸受製造者では, アンデロメータによって検出した振動を音に変換し, 官能検査により軸受の傷を検査している. この図は, 官能検査によって規則音に分類される「軌道輪や肌あれの傷」と不規則音に分類される「ボールやゴミの傷」が, RID解析結果からは集中型に分類される「軌道輪やボールの傷」と連続型に分類される「肌あれやゴミの傷」に区別できる. このように官能検査と t - f 二次元分布パターンとの情報を併せて判断すると, 傷種判別実現の可能性がある²¹⁾.

6.4 その他の適用例

(1) 超音波検査信号への適用²⁶⁾

超音波検査においては, バックグラウンドレベルから決まるあらかじめ設定した一定の閾値を超える信号位置から傷を検出している. すなわち超音波検査信号の持つ情報のうち振幅情報の大きさ以外は全く利用されていない. 一方セラミックスなどの非破壊検査の分野では検出を要求される欠陥寸法は益々小さくなり, 従来の判定方

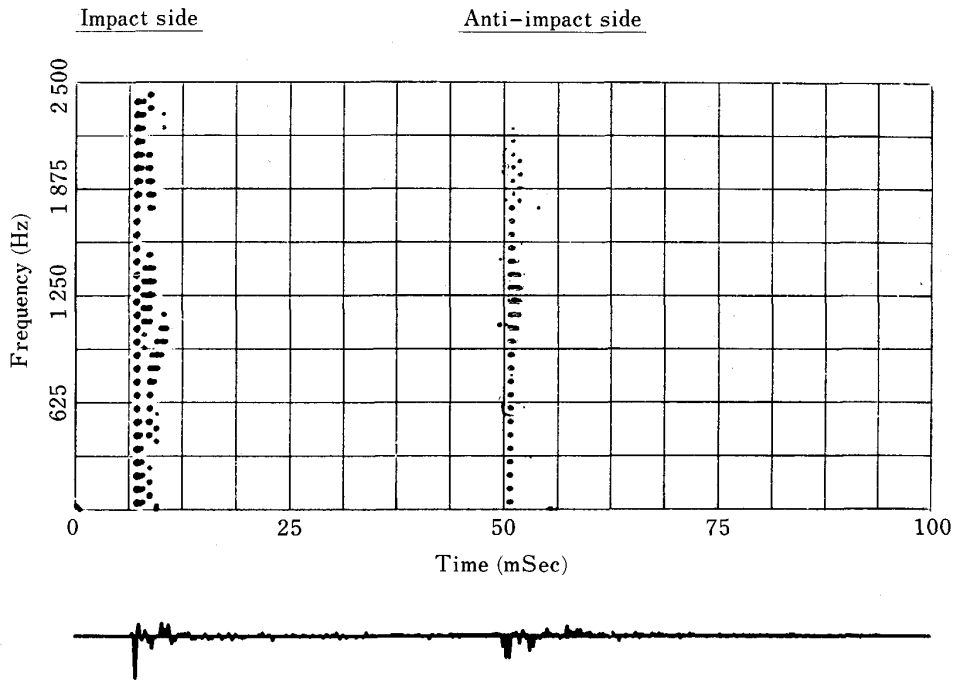


Fig. 15. WD of an impact signal from a sandwich steel sheet.

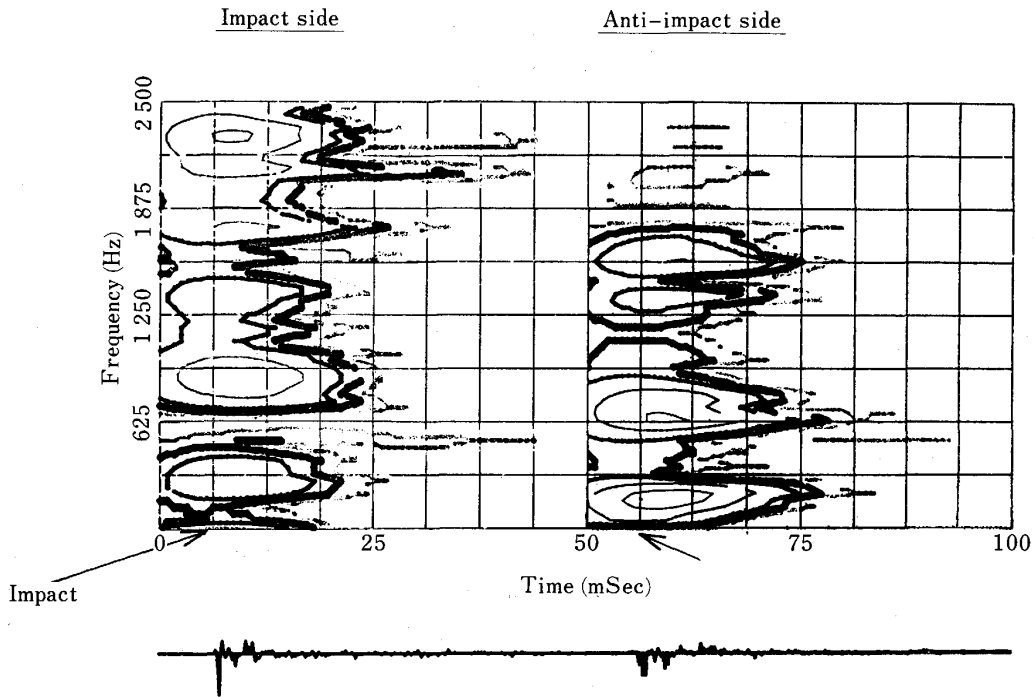


Fig. 16. Spectrogram of an impact signal from a sandwich steel sheet.

法では検査性能の限界に近くなってきている。そこで信号に含まれる情報の多面的活用の可能性を探る目的で、欠陥からの反射信号と被検材底面からの反射信号をWDを用いて解析し欠陥寸法との関係を調べた。

Fig. 20はその一例で、水中で送受信した超音波の路程中に欠陥に見立てた極めて細いタングステンワイヤを置き、底面反射波のエネルギーと欠陥寸法との関係を解

析したものである。この図では、超音波のパス中にワイヤが無い時の反射強度分布の最高強度を1に規格化して表示し、直径の異なるワイヤがある場合の反射強度分布をそれに重ねて表示している。WDから求めたスペクトル分布では欠陥寸法が大きくなる程、底面反射波のエネルギーが減少する傾向が明瞭に表れている。このような解析は、スペクトログラムなどでは不可能である。

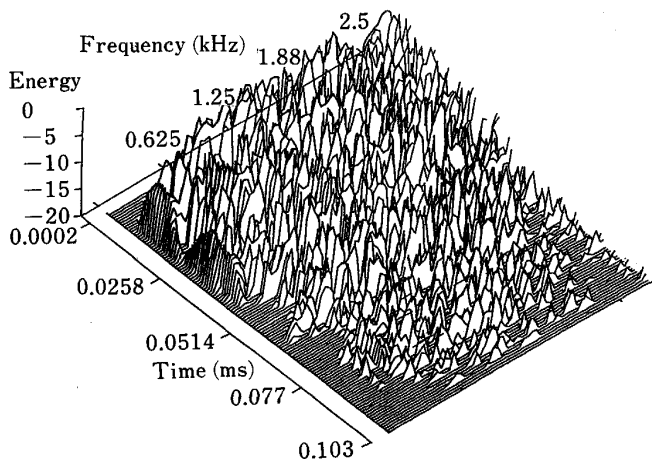


Fig. 17. WD of an impact signal from a cold-rolled steel sheet.

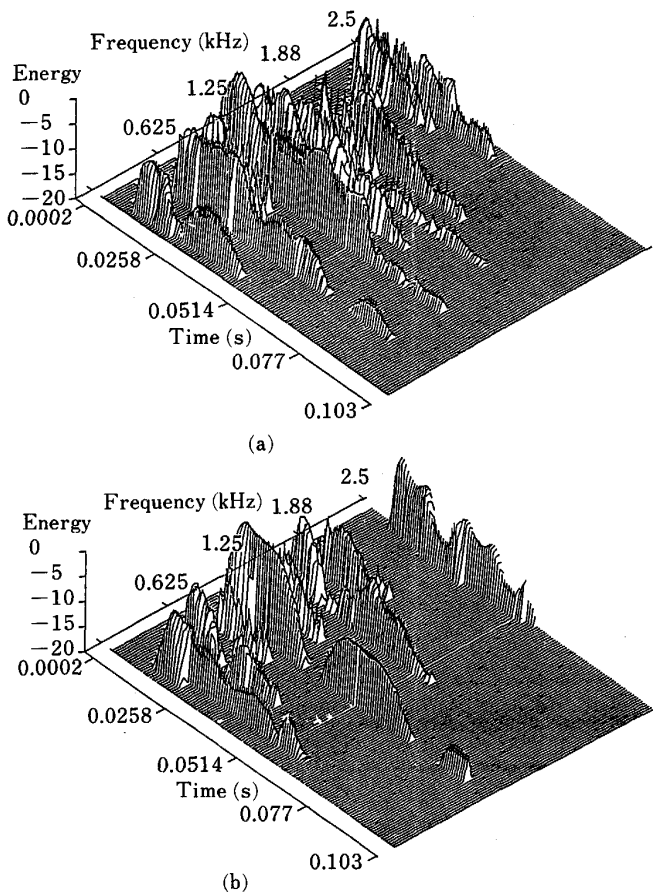


Fig. 18. RID of an impact signal from a cold-rolled steel sheet. Impact side (upper) and anti-impact side (lower).

(2) 高分解能パワースペクトル解析²¹⁾

非定常信号パワースペクトルの分解能を比較するためにラグ窓を用いない離散WD(DWD)と窓関数を操作した疑似WD(PWD)とを計算した例がFig. 21である。これは、減衰チャープ信号をFFT, DWDおよびPWD

で解析したものである。当然FFTが最も分解能が悪いが、PWDではラグ窓による打ち切り誤差の影響が表れる。忠実な周波数特性を得るためには、DWDが最良であることが分かる。

(3) cross-WDによる解析

2つの異なる信号から計算されるWD (cross-WD)は、一般的には干渉項の影響が大きいため実用性がないといわれている。しかしながら、2つの異なる信号が高い相関関係にある場合はRIDが効果的に利用できることが明らかにされている²⁷⁾。すなわち相互相関係数がある値以上の2つのシミュレーション信号では、auto-RIDよりcross-RID(CRID)の方が雑音に埋もれている信号成分の抽出に優れていることが示されている。制振鋼板と球の衝突および音声信号処理に適用した実用例も計算されている。制振鋼板と球の衝突の場合、衝突音と衝突振動とは極めて高い相互相関関係にありCRIDからはより明瞭な特徴量が抽出されている。音声信号処理の場合、音声信号とあごの骨の振動信号はやはり高い相互相関係数を持ちCRID解析から声道の共振周波数に対応した特徴的なフォルマントがS/Nの高い値で得られている。

7. 結 言

最近活発に研究が行われている計測信号の t - f 二次元解析法について述べた。これらはウェーブレット変換やWDなどであり、前者については原理的に簡単に触れ、主として後者について解説した。従来のスペクトログラム(STFT)などより格段に解析精度の高いこれらの解析法によると、今まであいまいであった信号の性質が明確に分類でき、多くの適用分野において有用な新しい知見が得られつつある。

WDの唯一の欠点である干渉項の発生を抑えるため開発されているアルゴリズム(RID)の効果を実験信号と種々の実測信号について確認した結果から、(1)非定常信号の周波数成分の時間変化を解析するための不可欠かつ主要な手法としての用途、(特に音声信号解析の有力な手段である)、(2)(定常確定信号と定常ランダム信号の明瞭な区別が可能であることから)過渡信号解析への活用、(3) t - f 二次元分布パターン分類の有用な利用、(4)従来利用できなかった計測信号中の情報の解析やWD解析法の特長を利用した高分解能解析法の適用、などが可能であることを述べた。また相互相関性の高い2つの信号にたいしてのcross-WDの適用は極めて効果的である事実を紹介した。

RIDによって(auto-)WDの実用性が高まりさらにCRIDも有用であることが明らかになり、これらの手法の活用で計測信号処理技術は益々発展することは確実である。またウェーブレット変換などの他の方法の研究も盛んに行われており、今後は各種の方法の比較が行われ

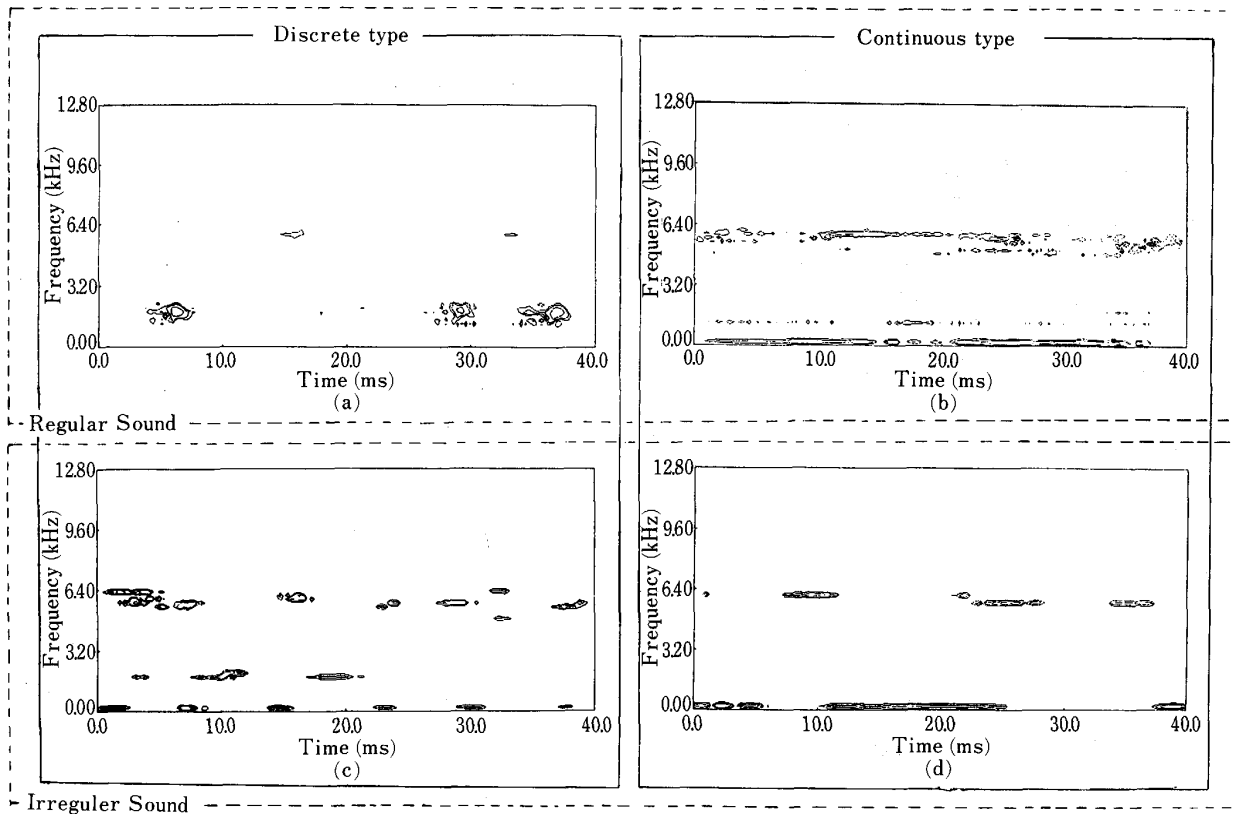


Fig. 19. t - f two dimensional distribution patterns of defect-signals from ball bearings. Defects are (a) noise due to scratch on raceway, (b) noise due to rough surface on raceway, (c) noise due to scratch on ball, (d) noise due to contaminant.

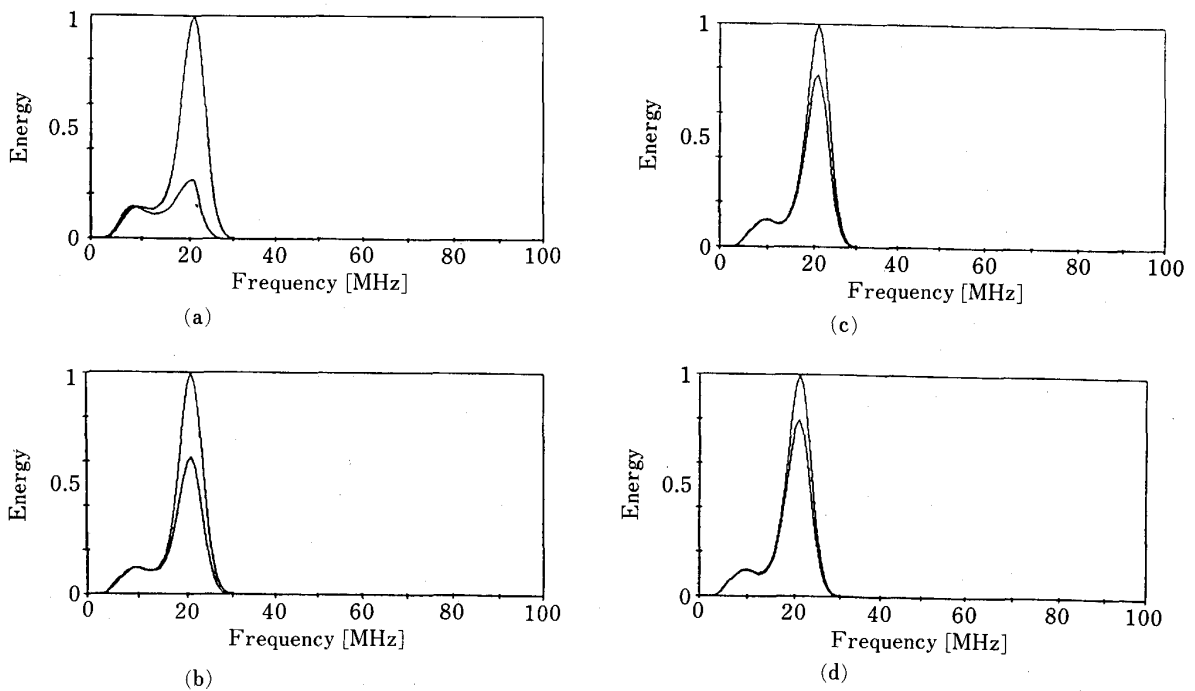


Fig. 20. Relation between defect size and ultrasonic energy reflected from the sample bottom. Sample size are (a) $100\ \mu\text{m}\ \phi$, (b) $50\ \mu\text{m}\ \phi$, (c) $20\ \mu\text{m}\ \phi$ and (d) $10\ \mu\text{m}\ \phi$.

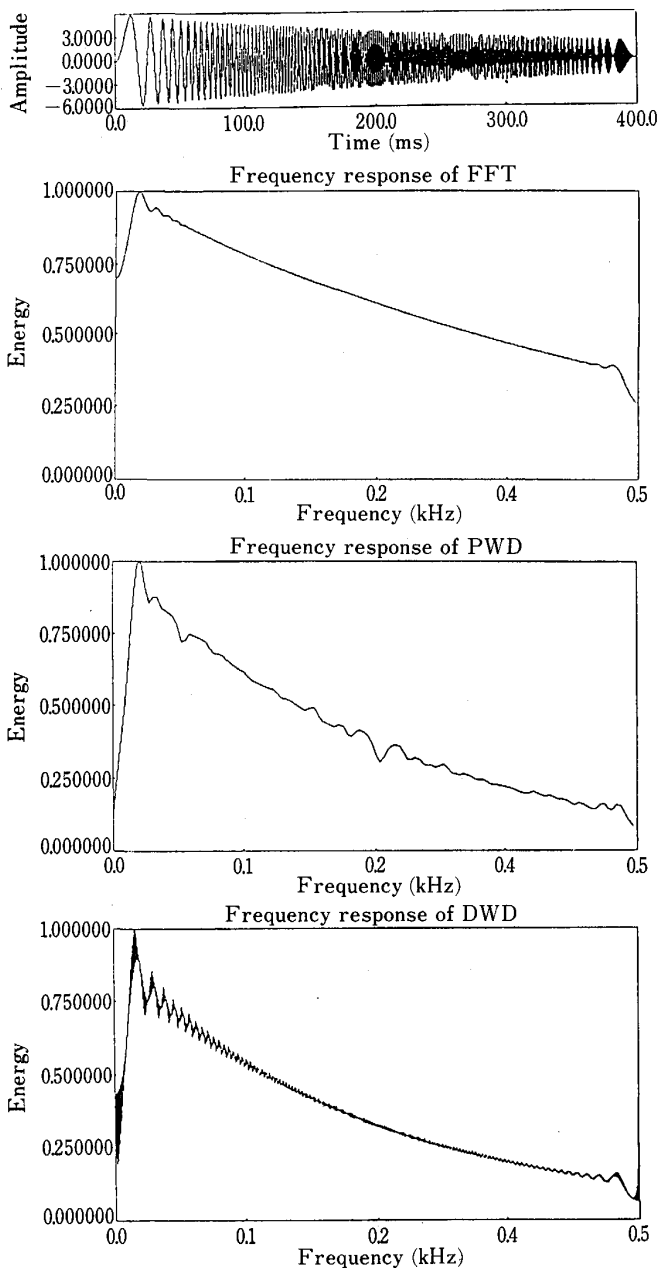


Fig. 21. Power spectra analyzed by FFT, PWD and DWD.

最終的には信号の特長により新しい有力な手法が選択して適用されるようになるものと予想される。

最後に、これらの t - f 二次元解析法相互の関係について簡単に触れておく。

本来量子力学の理論を適用した WD は、量子力学との間に Table 1 のような関連をもつ¹⁵⁾。したがって、当然、時間と周波数の間には

$$\Delta t \times \Delta f \geq 1/4\pi \dots\dots\dots(10)$$

なる Heisenberg の不確定性関係の制約がなければならぬ。この関係を無視しているのが WD における干渉項発生の原因である。そこで Kernel 関数を導入して表現を一般化し、適当な Kernel 関数の選択により干渉項の平滑化を狙った分布が幾つか提案されている¹⁵⁾

(Table 2)。これらの中、二次元分布関数としてもつことが望ましい(式(3)、(4)を含む)9つの性質を有しているのは、WD の他では Choi and Williams の ED (Exponential Distribution) のみである。筆者らが行った ED, WD と RID の解析結果を比較すると、RID のそれが分解能などの点において最も優れていた。

WD, STFT およびウェーブレット変換のそれぞれに適当な Kernel を使い、統一的な内積によって表現する研究も最近行われている^{28)~31)}。それらでは、ガウス関数の時にのみ時間と周波数の分解能が最高で(式(10)で、 $\Delta t \times \Delta f = 1/4\pi$)、この条件によるシミュレーションデータの解析結果では干渉項の影響を除けば WD が最も分解能が高い。したがって RID を用いた解析がウェーブレット変換を含めた種々の解析方法の中で、最も分解能が良いものと考えられる。(しかし筆者らによる RID とウェーブレット変換との比較では、(1)周波数分解能は RID の方が高く、時間分解能はウェーブレット変換の方が高い、(2)ウェーブレット変換では、高い周波数成分では時間分解能が上がり低い周波数成分では周波数分解能が上がる、(3)ウェーブレット変換は、局在する信号の解析に適している、などの特長が得られており、対象とする信号の性質によって有効に使い分けべきものと考えられる。)

いずれにしても、これらは現在活発に研究されている分野であり、その基盤となるデジタル信号処理技術の発展・普及と併せて今後の成果は大いに楽しみである。

文 献

- 1) 周波数解析ハンドブック(松賢機器編)(1987), p. 40 (R. B. Randall & B. Tech.: Frequency Analysis (1987) [B & K] の訳)
- 2) A. Grossmann, R. Kronland-Martinot and J. Morlet: Wavelets, ed. by J. M. Combes, A. Grossmann and Ph. Tchamitchian (1990), p. 2 [Springer-Verlag]
- 3) 山口昌哉, 山田道夫: 科学, **60** (1990), p. 398
- 4) I. Daubechies, A. Grossmann and Y. Meyer: J. Math. Phys., **27** (1986), p. 1271
- 5) I. Daubechies: IEEE Trans. Inf. Theory, **36** (1990), p. 961
- 6) 佐藤雅昭: 音響学会誌, **47** (1991), p. 405
- 7) 河原英紀: 音響学会誌, **47** (1991), p. 424
- 8) 寅市和男, 鎌田 賢: 音響学会誌, **47** (1991), p. 430
- 9) 入野俊夫, 河原英紀: 音響学会講演論文集, 1-8-1 (1991. 3), p. 351
- 10) 堀内竜三, 菊地恒男, 佐藤宗純, 三浦 甫: 音響学会講演論文集, 2-2-4 (1991. 3), p. 459
- 11) E. P. Wigner: Phys. Rev., **40** (1932), p. 749
- 12) T. A. C. M. Claasen: Philips J. Res., **35** (1980), p. 217
- 13) T. A. C. M. Claasen: Philips J. Res., **35** (1980), p. 276
- 14) T. A. C. M. Claasen: Philips J. Res., **35** (1980), p. 372
- 15) 例えば, L. Cohen: Proc. IEEE (Invited Paper), **77** (1989) 7, p. 941
- 16) 川浦淳一, 鈴木英夫, 小野隆彦: 自動車技術, **42** (1988) 12, p. 1549
- 17) 北川 孟, 石光俊介: 材料試験技術, **34** (1989), p. 199

Table 1. Relationship between quantum mechanics and signal analysis.

Quantum mechanics (Inherently probabilistic)		Signal analysis (Deterministic)	
Position	q (random)	Time	t
Momentum	p (random)	Frequency	ω
Time	t	No correspondence	
Wave function	$\psi(q, t)$	Signal	$s(t)$
Momentum wave function	$\phi(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \psi(q, t) e^{-iqp/\hbar} dq$	Spectrum	$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int s(t) e^{-j\omega t} dt$
Probability of position at time (t)	$ \psi(q, t) ^2$	Energy density	$ s(t) ^2$
Probability of momentum at time (t)	$ \phi(p, t) ^2$	Energy density spectrum	$ S(\omega) ^2$
Expected value of position	$\langle q \rangle = \int q \psi(q, t) ^2 dq$	Mean time	$\langle t \rangle = \int t s(t) ^2 dt$
Expected value of momentum	$\langle p \rangle = \int p \phi(p, t) ^2 dp$	Mean frequency	$\langle \omega \rangle = \int \omega S(\omega) ^2 d\omega$
Standard deviation of position	$\sigma_q = \sqrt{\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2}$	Duration	$T = \sqrt{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2}$
Standard deviation of momentum	$\sigma_p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$	Bandwidth	$B = \sqrt{\langle \omega^2 \rangle - \langle \omega \rangle^2}$
Uncertainty principle	$\sigma_p \sigma_q \geq \hbar/2$	Time-bandwidth relation	$BT \geq \frac{1}{2}$

Table 2. Various distributions and their kernels.

$$P(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint e^{-j\theta t - j\tau\omega + j\theta u} \phi(\theta, \tau) \cdot s^* \left(u - \frac{1}{2}\tau\right) s \left(u + \frac{1}{2}\tau\right) dud\tau d\theta$$

Reference	Kernel $\phi(\theta, \tau)$	Distribution $P(t, \omega)$
Wigner, Ville	1	$\frac{1}{2\pi} \int e^{-j\tau\omega} s^* \left(t - \frac{1}{2}\tau\right) s \left(t + \frac{1}{2}\tau\right) d\tau$
Margenau and Hill	$\cos \frac{1}{2} \theta \tau$	$Re \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s(t) e^{-j\tau\omega} S^*(\omega)$
Kirkwood, Rihaczek	$e^{j\theta\tau/2}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} s(t) e^{-j\tau\omega} S^*(\omega)$
sinc	$\frac{\sin a \theta \tau}{a \theta \tau}$	$\frac{1}{4\pi a} \int \frac{1}{\tau} e^{-j\omega\tau} \int_{t-a\tau}^{t+a\tau} s^* \left(u - \frac{1}{2}\tau\right) s \left(u + \frac{1}{2}\tau\right) dud\tau$
Page	$e^{j\theta \tau /2}$	$\frac{\partial}{\partial t} \left \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t s(t') e^{-j\omega t'} dt' \right ^2$
Choi and Williams	$e^{-\theta^2\tau^2/\sigma}$	$\frac{1}{4\pi^{3/2}} \iint \sqrt{\frac{\sigma}{\tau^2}} e^{-\sigma(u-t)^2/(4\tau^2-j\tau\omega)} s^* \left(u - \frac{1}{2}\tau\right) \cdot s \left(u + \frac{1}{2}\tau\right) dud\tau$
Spectrogram	$\int h^* \left(u - \frac{1}{2}\tau\right) e^{-j\theta u} \cdot h \left(u + \frac{1}{2}\tau\right) du$	$\left \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-j\omega\tau} s(\tau) h(\tau-t) d\tau \right ^2$

18) 石光俊介, 北川 孟: 日本機械学会論文集 C, **57** (1991) 535, p. 787

19) 石光俊介, 北川 孟: 京都大学数理解析研究所講究録 747 「数理解析と科学計算」(1991), p. 88

20) F. Hlawatsh: Proc. Sig. Proc., Florence, Italy (1984), p. 363

21) 杵築兼史, 宇野祐喜, 北川 孟, 石光俊介: 第 69 期機械学会全国大会講演会要項集 (C) (1991), p. 175

22) P. Flandrin and W. Martin: Proc. IEEE ASSP Spectrogram Estimation Workshop (1983), p. 181

23) 石光俊介, 北川 孟: 日本機械学会論文集 C, **55** (1989) 520, p. 199

24) 小林史典, 三浦信幸: 計測自動制御学会論文集, **22** (1986) 11, p. 1228

25) 久保木正喜, 北川 孟, 田宮稔士, 中沢 保, 石光俊介: 材料試験技術, **36** (1991), p. 143

26) 柏田浩貴, 渡辺芳明, 北川 孟: 日本機械学会論文集 C, **57** (1991) 535, p. 774

27) 石光俊介, 杵築兼史, 北川 孟: 第 69 期機械学会全国大会講演会要項集 (C) (1991), p. 172

28) O. Rioul and M. Vetterli: IEEE SP Magazine (Oct. 1991), p. 14

29) C. Dorize and K. Gram-Hansen: Proc. of Con. "Wavelets and some of their application" (1989 年 6 月)

30) K. Gram-Hansen and C. Dorize: Proc. of Con. "Wavelets and some of their application" (1989 年 6 月)

31) C. Dorize and L. F. Villemoes: IEEE-ICASSP '91 (1991 年 5 月)