

© 1990 ISIJ

論文

# 電磁気力により浮揚された熔融金属自由表面の安定性の解析

竹内 秀次\*・Jacqueline ETAY\*<sup>2</sup>・Marcel GARNIER\*<sup>2</sup>

## Stability Analysis of Free Surface of Liquid Metal Levitated by Electromagnetic Force

Shuji TAKEUCHI, Jacqueline ETAY and Marcel GARNIER

### Synopsis :

A theoretical analysis has been made to clarify the stability condition of Horizontal Electromagnetic Casting (HEMC) by means of the linear stability theory. The stabilities of thin plates and round rods of molten metal are analyzed when infinitesimal perturbation waves are added on the free surface of molten metal levitated by electromagnetic force.

The analysis reveals that influence of imposed magnetic field on the stabilization of perturbed surfaces is anisotropic and that the free surface of the metal is most stable when magnetic field is imposed parallel to the perturbation wave vector. The critical wave length which distinguishes stable condition from unstable one is 0.02 m for a molten steel plate with applied current density of  $10^6$  A/m<sup>2</sup>. This length practically limits the distance between a metal supply nozzle and solidified part of the metal.

The critical wave length for a round rod is almost the same as that for a plate if the diameter of the rod is the same as the thickness of the plate.

**Key words :** magnetohydrodynamics ; horizontal continuous casting ; electromagnetics ; levitation.

## 1. 緒 言

金属の連続鋳造プロセスにおいて、鋳型を電磁気力によって置き換える試みは、まずアルミニウム溶湯の鋳造から始まり<sup>1)</sup>、続いて鋼の鋳造にも適用されている<sup>2)</sup>。この鋳造方法は EMC (Electromagnetic Casting) と呼ばれ、通常は 2~3 kHz の高周波電流によって励起される高周波磁界が用いられ、垂直方向に鋳込まれる溶湯を鋳型と非接触で保持することが可能となっている<sup>1)</sup>。従来の鋳造方法 (DC, Direct Chill Casting) と比較し、鋳片表面品質に優れるとされている<sup>3)</sup>。

この EMC 技術の鉄鋼への応用は、密度がアルミニウムより大きいこと、高生産性を要求されることから困難と考えられるが、溶湯静圧を小さくした水平式の電磁鋳造 HEMC (Horizontal EMC) の試みが、密度の高いすずや Bi-Sn-Zn 合金を用いて行われており<sup>4)~7)</sup>、これまでに以下の三つの実験的研究がなされている。

HOYER<sup>4)</sup> は、10 kHz の高周波磁場による磁気圧力により溶湯静圧を補償し、50 Hz の別の電源による交流磁場

と直接通電によって 12 mm のギャップ間に溶融すずを浮揚させ、直径 20 mm のすずの丸棒を鋳造した。彼はこの実験により、HEMC の原理的な確認を示したが、鉄鋼への応用については、密度や熱伝導度などの物性値を比較し、困難であるとしている。

小塚・浅井ら<sup>5)~7)</sup> は、静磁場と直流の直接通電による HEMC の基礎的な研究を行っている。Bi-Sn-Zn を用いた実験では 3 mm 厚みの薄板や 6 mm 径の丸棒を、Al を用いた実験では 20 mm 径の丸棒を浮揚させながら鋳造し、同じく HEMC の原理確認を示している。

また、HULL ら<sup>8)</sup> は 10 kHz の高周波を用いて、厚さ 6 mm のすず溶湯を水平に浮揚させる実験をし、溶鋼への適用を検討しているが、鋳造プロセスまでは組み入れた実験ではない。

本解析の目的は、以上のような HEMC の安定鋳造条件を明らかにすることであり、特に静磁場と直流電流の印加によって浮揚された熔融金属の自由表面の安定性解析に焦点を当てた。鉄鋼製造プロセスでは、熱間圧延工程の単純化や省略のために製品形状に近い連続鋳造プロ

平成元年 4 月本会講演大会にて発表 ISIJ International, 29 (1989), p. 1006 にて一部発表 平成元年 8 月 30 日受付 (Received Aug. 30, 1989)

\* 川崎製鉄(株)鉄鋼研究所 (Iron & Steel Research Laboratories, Kawasaki Steel Corp., 1 Kawasaki-cho Chiba 260)

\*<sup>2</sup> MADYLAM 研究所 理学国家博士

セス (Near net shape casting) が望まれている。そこで、本解析でも電磁気力で浮揚されている薄板形状と小径丸棒形状の熔融金属について、その表面の安定性を解析した。また、スラブやブルームへの適用の可能性を検討するため、板厚や丸棒半径の影響についても解析した。

### 2. 安定性解析の手法

本報告で用いた安定性解析の方法は、Normal mode method と呼ばれ、比較的古典的な方法であり<sup>9)</sup>、以下のような手順によって進められる。

- (1) 解析領域の流体自由表面の平衡状態を定義する。
- (2) この平衡状態に対し、無限小の大きさの擾乱を加える。この擾乱は、以下のような形で与える。

$$\epsilon = \epsilon_0 e^{ist} e^{i(k \cdot r)} \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 $\epsilon_0$  は無限小の振幅で、浮揚部分の代表長さを  $L$  とするとき、 $\epsilon_0 \ll L$  の関係を満足している。また、 $k$  は擾乱波の波数ベクトル、 $r$  は表面上の点の位置ベクトル、 $s$  は複素周波数であり、その虚数部  $s_i$  が負の時は擾乱波の成長率を表し、正の時は減衰率を表す。

$$\left. \begin{aligned} r &= (y, z) & k &= (k_y, k_z) \\ s &= s_r + is_i & i &= \sqrt{-1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

(3) 磁場の擾乱  $b$ 、速度場の擾乱  $u$ 、誘導電流の擾乱  $j$  は、 $\epsilon_0$  の 2 乗以上の項を無視して線形化し、以下のように求める。

- ①  $b$  は、誘導の式と境界条件より決定される。
- ②  $j$  は、 $b$  を用いてアンペアの法則から求める。
- ③  $u$  は、Navier-Stokes 方程式に電磁力項を含めて解く。

(4) 以上の方程式から、擾乱を与えた界面での圧力ジャンプを表す方程式が得られ、最終的に  $s$  を  $k$  の関数として表す。

$$s = f(k) \dots \dots \dots (3)$$

(1) 式の微小擾乱は、 $s$  の符号によって増幅・減衰の時間的な変化が決まる。すなわち、

$$s_i = 0 \text{ の時、 } \epsilon \sim \epsilon_0 e^{is_r t} \sim \epsilon_0 \cos(s_r t) \text{ 一定振動}$$

$$s_i \neq 0 \text{ の時、 } \epsilon \sim \epsilon_0 e^{is_r t} e^{-s_i t} \text{ 増幅または減衰}$$

$\epsilon$  は  $s_i$  が正の時減衰し、 $s_i$  が負の時は増幅するが、本研究の解析ではどの条件でも  $s$  は共約複素数を取り、 $s_i$  には必ず正負の解が存在して特定できない。したがって本論文中では、 $s_i$  が  $k$  に対して 0 の領域では、界面は安定と言い (正確に言えば「一定不変」)、それ以外の領域で不安定と定義する。

### 3. 薄板に対する安定性解析

#### 3.1 解析上の仮定

Fig. 1 は、重力に抗して電磁気力  $F$  により浮揚されている薄板状熔融金属の安定性解析をする際の座標系と、印加電流  $I_0$ 、磁束密度  $B_0$ 、铸造速度  $V_0$  を示す。

解析を行う上での仮定は、以下のとおりである。

- ① 薄板は厚さ  $2a$  で、長さ幅とも無限広がりとする。
- ② 流体 (熔融金属) は完全流体とし、粘性は無視する。
- ③ 薄板の速度  $V_0$  と直流電流密度  $J_0$  は一様で、 $z$  軸に平行とする。
- ④ 静磁場  $B_0$  は、一様で  $y$  軸の負方向とする。
- ⑤ 電気伝導度  $\sigma$  は、薄板状金属の外部で 0、内部では 0 でないとする。

薄板状熔融金属表面に与えられる擾乱波として、Fig. 2 に示すような、二つのモードを考える。図の左側は、上下が非対称のモードであり「非対称モード」と称す。一方、右側は上下対称の擾乱モードであり、「対称モード」と称す。

#### 3.2 薄板の平衡状態

外部から与えられる  $J_0$  は一定・均一であり、この電流により薄板の内部および周囲に形成される磁場と、外部印加磁場  $B_0 = (0, -B_0, 0)$  とからなる薄板内部の磁場は、以下のように表される。

$$B_i = (0, -B_0 + \mu J_0 x, 0) \dots \dots \dots (4)$$

ここで、 $\mu$  は透磁率である。ゆえに、垂直上向きの単位体積当たりの電磁気力は次のように書き表せる。

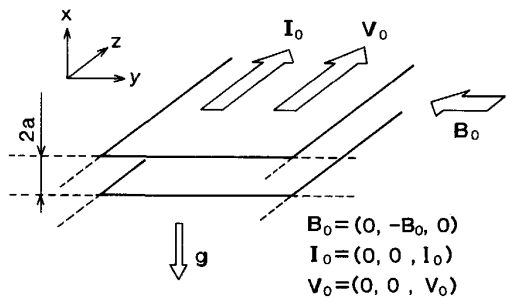


Fig. 1. Coordinate system and conditions for analysis of a thin molten metal plate levitated by electromagnetic force.

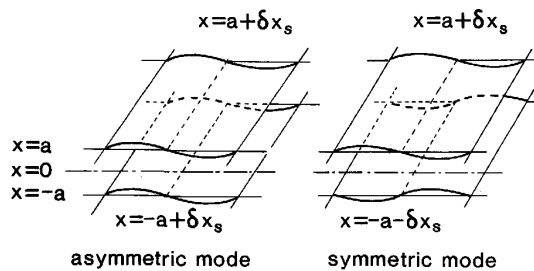


Fig. 2. Two possible modes of perturbation wave on free surface.

$$F_x = (\mathbf{J} \times \mathbf{B}_t)_x = J_0 B_0 - \mu J_0^2 x \dots\dots\dots(5)$$

この垂直上向きの電磁力  $F_x$  を,  $x = -a$  から  $a$  まで積分した力は常に重力と釣り合っており, 次の浮揚の条件を満足している.

$$J_0 B_0 = \rho g \dots\dots\dots(6)$$

ここで,  $\rho$  は金属の密度である.

3.3 表面上の非対称擾乱

まず, 非対称の微小擾乱波  $\delta x_s$  について考える. 擾乱波の形は, (7)式で与えられ, この時の上面・下面の表面を表す方程式は(8)式のように書ける.

$$\delta x_s = \varepsilon = \varepsilon_0 e^{ist} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \dots\dots\dots(7)$$

$$\left. \begin{aligned} x_{upper} &= a + \delta x_s \\ x_{lower} &= -a + \delta x_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

3.4 磁場, 電流密度, 電磁力の擾乱

金属中の磁場の擾乱  $\mathbf{b}_m$  は, 磁気レイノルズ数  $R_m = \mu \sigma a V_0$  が1と比べて小さいので(9)式のように表せ, 空気中の  $\mathbf{b}_a$  は  $\sigma$  が0であるため(10)式で書ける.

$$\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{b}_m}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{b}_m \dots\dots\dots(9)$$

$$\nabla^2 \mathbf{b}_a = 0 \dots\dots\dots(10)$$

(9), (10)式に現れる6個の未知変数は, 金属と空気との界面における磁場の連続性と空気中遠方で  $\mathbf{b}_a = 0$  の条件から決定される.

金属内部の磁場の擾乱は, 以下のように書ける.

$$\mathbf{b}_{metal} = \mu J_0 \left( \begin{aligned} & i \frac{k_y}{D} \sinh(\gamma x) \\ & \left\{ \frac{k_y^2}{kD} \sinh(\gamma a) - 1 \right\} \frac{\cosh(\gamma x)}{\cosh(\gamma a)} \\ & \frac{k_y k_z}{kD} \tanh(\gamma a) \cosh(\gamma x) \end{aligned} \right) \delta x_s \dots\dots\dots(11)$$

ここで,  $D = k \sinh(\gamma a) + \gamma \cosh(ka) \dots\dots\dots(12)$

$$\gamma^2 = k^2 + i\mu \sigma s \dots\dots\dots(13)$$

$$k^2 = k_y^2 + k_z^2 \dots\dots\dots(14)$$

電流密度の擾乱は, 次式となる.

$$\mathbf{j}_{metal} = J_0 \cdot \left( \begin{aligned} & i k_z \frac{\cosh(\gamma x)}{\cosh(\gamma a)} \\ & - \frac{k_y k_z}{D} \sinh(\gamma x) \left[ 1 + \frac{\gamma}{k} \tanh(\gamma a) \right] \\ & \sinh(\gamma x) \left[ \left\{ \frac{k_y^2}{kD} \sinh(\gamma a) - 1 \right\} \frac{\gamma}{\cosh(\gamma a)} + \frac{k_y^2}{D} \right] \end{aligned} \right) \delta x_s \dots\dots\dots(15)$$

電磁力の擾乱  $\mathbf{f}$  は,  $\mathbf{f} = \mathbf{J}_0 \times \mathbf{b} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}_0$  から導かれ

る.

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} (B_0 - \mu J_0 x) j_z - J_0 b_y \\ J_0 b_x \\ -(B_0 - \mu J_0 x) j_x \end{pmatrix} \dots\dots\dots(16)$$

3.5 擾乱に対する運動方程式と特性方程式

擾乱を受けた流体の Navier-Stokes 方程式は以下の形になる.

$$\begin{aligned} (\rho + \delta \rho) \frac{\partial (\mathbf{U} + \mathbf{u})}{\partial t} + (\mathbf{U} + \mathbf{u}) \cdot \nabla (\rho + \delta \rho) (\mathbf{U} + \mathbf{u}) \\ = -\nabla (P + p) + (\mathbf{F} + \mathbf{f}) - \mathbf{g} (\rho + \delta \rho) \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

ここで,  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  は速度場の擾乱であり,  $P$  は平衡状態の圧力,  $p$  は圧力の擾乱部分,  $\delta \rho$  は密度の擾乱部分である. この運動方程式から平衡状態の運動方程式を差し引き,  $\varepsilon_0$  の2次以上の項を無視する. 次に, 金属中の  $x$  軸方向の運動方程式を得るために, 圧力項を消去し, 連続の式を用いることにより最終的に(18)式の運動方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \rho (s + k_z V_0) (d^2 - k^2) u_x = ik^2 f_x - d(\mathbf{k} \cdot \mathbf{f}) \\ - gk^2 \left\{ i \delta p - \frac{Tk^4}{g} \delta(x - x_s) \delta x_s \right\} \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

ここで,  $T$  は表面張力,  $d \equiv \partial/\partial x$ ,  $\delta(x - x_s)$  は Dirac の  $\delta$  関数である. (18)式右辺の第3, 4項はそれぞれ重力項と表面張力項であり界面以外では0である.

(18)式へ, 界面での  $\mathbf{u}$  と  $\delta x_s$  との関係の式および質量保存の式を代入し, 界面を含む無限小の長さについて積分を行うことにより, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \Delta_s (\rho (s + k_z V_0) du_x) \\ = -\Delta_s (\mathbf{k} \cdot \mathbf{f}) + igk^2 \Delta_s (\rho) \delta x - i\gamma k^4 \delta x_s \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

$\Delta_s(h) \equiv$  気液間界面における  $h$  の量のジャンプ  
この式を, Kelvin-Helmholtz 不安定性が最も大きいと考えられる薄板の下面について適用すると, ここでは,  $x_s = -a + \delta x_s$  であるので, 次の方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \rho (s + k_z V_0)^2 \tanh(ka) = i \frac{\rho (s + k_z V_0)}{4 \sinh(ka) \cosh(ka)} \\ \{ 2\hat{u}_0(a) - \hat{u}_0(-a) (e^{2ka} + e^{-2ka}) \} \\ + 2\mu J_0^2 \frac{k k_y^2}{D} \cdot \frac{\sinh(\gamma a)}{\gamma^2 - k^2} - J_0 \frac{(B_0 + \mu J_0 a)}{D} \\ \{ k\gamma \cosh(\gamma a) + a k_z^2 \sinh(\gamma a) \} - gk \left( \rho - \frac{k^2 T}{g} \right) \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \hat{u}_0(x) = iJ_0 \frac{k_y^2}{D\rho(s + k_z V_0)} \cdot \left\{ -(B_0 - \mu J_0 x) \sinh(\gamma x) \right. \\ \left. + \frac{2\gamma}{k^2 - \gamma^2} \mu J_0 \cosh(\gamma x) \right\} \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

3.6 対称性擾乱

薄板表面の擾乱が対称形である場合には、板の上面・下面の表面を表す方程式は、以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} x_{upper} &= a + \delta x_s \\ x_{lower} &= -a - \delta x_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

非対称性擾乱について使われた界面を表す式(8)式は、上式によって置き換えられ、対称性擾乱に対する方程式が、同様な計算の進め方によってえられる。この方程式は、非対称性擾乱について求められた(20)、(21)式と次の例外を除いて形式は同一である。すなわち、 $\sinh(x)$ は $\cosh(x)$ に、 $\cosh(x)$ は $\sinh(x)$ で置き換えられ、 $\tanh(x)$ は $\coth(x)$ で置き換えられる。

3.7 解析結果

Fig. 3 から Fig. 6 に、(20)、(21)式で示した方程式の数値計算結果を示す。これらの計算には、HEMCの鋼への応用を考慮して次の物性値を用いた。 $\rho = 7000$

( $\text{kg/m}^3$ ),  $\sigma = 0.7 \times 10^6$  ( $1/\Omega\text{m}$ ),  $T = 1.84$  ( $\text{N/m}$ ). また、定数は次のとおりである。 $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$  ( $\text{N/A}^2$ ),  $g = 9.8$  ( $\text{m/s}^2$ ). 変数は  $J_0, V_0, a$  であり、印加する  $B_0$  は(6)式の浮揚条件が常に自動的に満足されるように決まると仮定した。そのほかの条件は Table 1 のとおりである。

$B_0$  に直交する非対称擾乱の場合 (Fig. 3), 擾乱の波数  $k$  が低下すると (波長  $\lambda$  が増加すると) ある  $k$  において  $s$  の虚数成分  $s_i$  が 0 でなくなり、この波数より小さな  $k$  (長い  $\lambda$ ) の擾乱に対してこの系は不安定となる。この波数を、臨界波数  $k_c$  とする。Fig. 3 は、 $a$  が大きい方がより大きな  $k$  (より短い  $\lambda$ ) でも不安定領域になること、また  $a$  が小さくなると擾乱の発達速度に対応する  $s_i$  の最大値は、まず低下し、その後増加するという複雑な変化をすることも示している。この理論計算から導かれた挙動の物理的な意味は、明らかにできなかった。

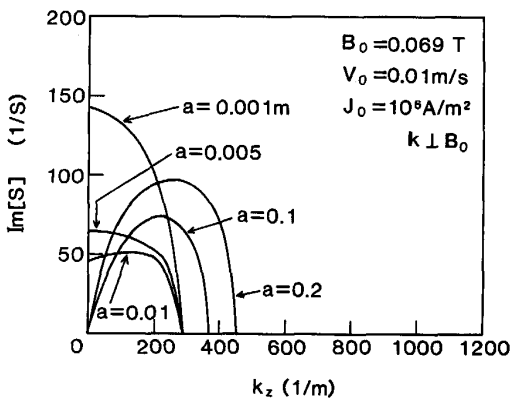


Fig. 3. Result of numerical calculation -1: effect of plate thickness on asymmetric perturbations which is perpendicular to imposed magnetic field.

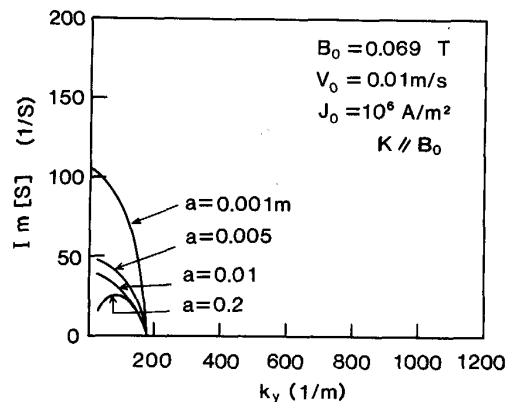


Fig. 5. Result of numerical calculation -3: effect of plate thickness on asymmetric perturbations which is parallel to imposed magnetic field.

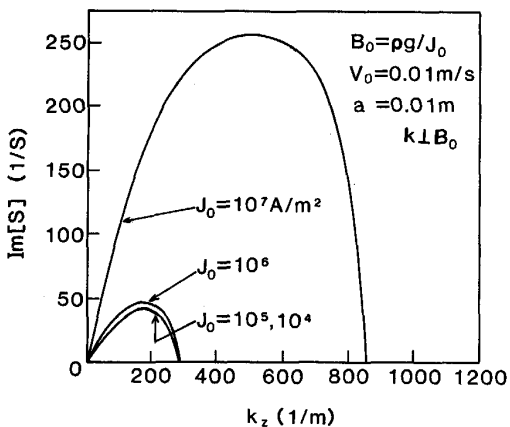


Fig. 4. Result of numerical calculation -2: effect of current density on asymmetric perturbations which is perpendicular to imposed magnetic field.

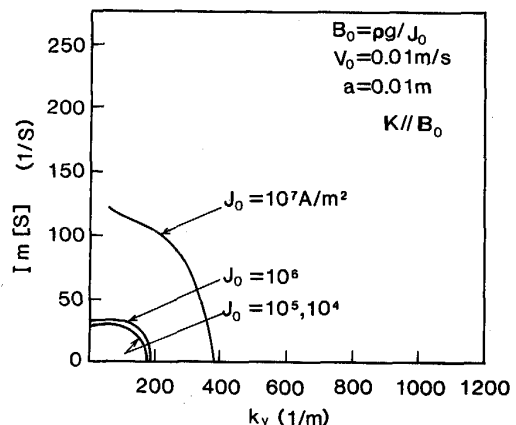


Fig. 6. Result of numerical calculation -4: effect of current density on asymmetric perturbations which is parallel to imposed magnetic field.

Table 1. Conditions of numerical calculations.

No. of figure	Spatial relation between $B$ and $k$	Parameter
3	Perpendicular	Plate thickness
4	Perpendicular	Current density
5	Parallel	Plate thickness
6	Parallel	Current density

Fig. 4 からは、電流密度  $J_0$  の影響は  $10^6 \text{ A/m}^2$  より小さい時にはほとんど認められないが、この値を超えると急激に不安定性が増加することがわかる。

Fig. 5 を Fig. 3 と、また Fig. 6 を Fig. 4 と比較すると、 $B_0$  に平行な擾乱は、直交する擾乱より安定な範囲が広いこと、また擾乱の発達速度  $s_i$  も小さいことがわかる。このことは、自由表面上の擾乱波に及ぼす磁場の影響が非等方的であることを示しており、このことについては後に詳述する。

#### 4. 丸棒表面の安定性解析

##### 4.1 解析上の仮定

丸棒形状の溶融金属の安定性についても、薄板状の解析法と同様に行う。解析に用いた座標系を Fig. 7 に示す。計算の仮定は、丸棒の半径を  $R_0$  とする以外は薄板の場合と同様である。

##### 4.2 平衡状態

丸棒中を流れる電流によって発生する磁場と、外部からの印加磁場との合計の磁場は金属中では次式の形で書ける。

$$B_t = (-B_0 \sin \theta, \frac{r}{2} \mu J_0 - B_0 \cos \theta, 0) \dots\dots\dots(23)$$

電磁力  $F = J_0 \times B_t$  は、次式で表される。

$$F = J_0 \times B_t = \left( -\frac{x}{2} \mu J_0^2 + J_0 B_0, -\frac{y}{2} \mu J_0^2, 0 \right) \dots\dots\dots(24)$$

##### 4.3 円筒上の擾乱波

円柱座標系において、自由表面の擾乱波を表す方程式は次のように表される。

$$r_s = R_0 + \delta r_s \text{ ここで, } \delta r_s = \epsilon_0 e^{ist} e^{i(m\theta + kz)} \dots(25)$$

ここで  $\epsilon_0$  は、 $\epsilon_0 \ll R_0$  の関係を満足している。

この擾乱を Fig. 8 の上部に模式的に示す。この場合には、円周方向にも螺旋状に進行する擾乱が存在するので、表面上の曲率による表面張力により安定化が期待できるのに対し、Fig. 8 の下部に示されている  $m=0$  の擾乱では、この効果が期待できず最も不安定であると考えられる。したがって、ここでは最も不安定な軸対称の

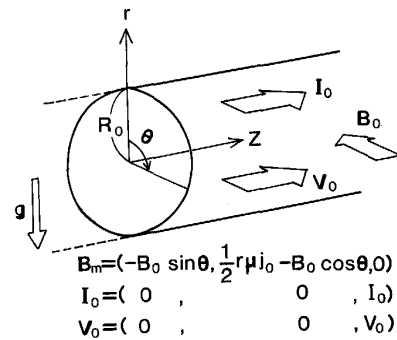


Fig. 7. Coordinate system and conditions for analysis of a molten metal round rod levitated by electromagnetic force.

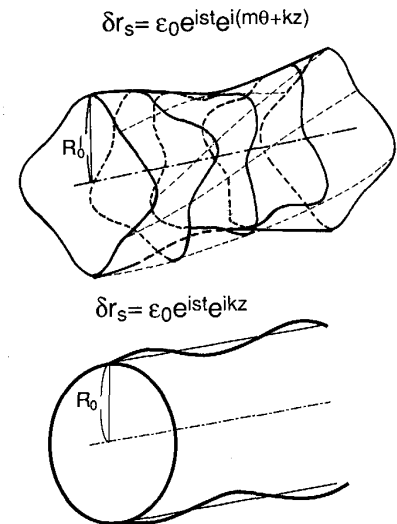


Fig. 8. Perturbations on the rod surface ( $m \neq 0$  and  $m = 0$ ).

擾乱のみ ( $m=0$ ) を考察対象とした。これにより、計算を著しく簡略化できる利点がある。

##### 4.4 磁場、電流密度、電磁力の擾乱

丸棒内部の磁場の擾乱は、(9)、(10)式を薄板の場合と同様の境界条件の下に円柱座標系で計算すると、次式の形で求められる。

$$b_m = \mu J_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{I_1(\gamma r)}{I_1(\gamma R_0)} \\ 0 \end{pmatrix} \delta r_s \dots\dots\dots(26)$$

ここで、 $I_n(x)$  は  $n$  次の第1種の変形されたベッセル関数である。

電流と電磁力の擾乱とは、以下のとおりである。

$$j = \begin{pmatrix} j_r \\ j_\theta \\ j_z \end{pmatrix} = \frac{k J_0}{I_1(k R_0)} \begin{pmatrix} i I_1(\gamma r) \\ 0 \\ I_0(\gamma r) \end{pmatrix} \delta r_s \dots\dots\dots(27)$$

$$f = \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_0 b_\theta - j_z \left( \mu J \frac{r}{2} - B_0 \cos \theta \right) \\ -B_0 j_z \cos \theta \\ j_r \left( \mu J_0 \frac{r}{2} - B_0 \cos \theta \right) \end{pmatrix} \dots\dots (28)$$

4.5 運動方程式と特性方程式

円柱座標表示による Navier-Stokes 式の擾乱部分を表す方程式から、薄板に対する解析と同様に圧力項を消去する。これより、丸棒の半径方向の線形化された運動方程式が次のように得られる。

$$\rho(s + kV_0) \left\{ d[d(ru_r)] - \frac{1}{r} k^2 u_r \right\} = ik^2 \left( \mu J_0^2 - \frac{J_0 B_0}{r} \cos \theta \right) \frac{I_1(\gamma r)}{I_1(\gamma R_0)} \dots\dots (29)$$

(29)式を界面を含む無限小の長さについて積分をし、界面での境界条件を代入することにより、次の方程式が得られる。

$$\rho(s + kV_0) \frac{1}{r} [d(ru_r)] r_s = ik^2 g \left\{ \rho \cos \theta + \frac{T}{g} \frac{(1 - k^2 R_0^2)}{R_0^2} \right\} \delta r_s - kf_z(r_s) \dots\dots (30)$$

安定性を解析するために、 $s_i = s_i(k)$  の関数の曲線を決めるには、以下の3段階の計算を行う。

- (1) (29)式を解く。液相中の半径方向の運動の一般解  $u_r$  が決められる。
- (2)  $u_r$  とその微分の  $du_r$  を(30)式に代入する。
- (3) (30)式を Newton-Raphson 法で解き、 $s_r$  と  $s_i$  を求める。以上の過程を値が収束するまで繰り返す。

Fig. 9 の曲線は、丸棒表面上の点と円柱中心とを結ぶ直線と鉛直線との間の角度  $\theta$  を変えた場合の波数と擾乱波の発達速度との関係を示す。この図より、容易に想像されるように、丸棒の最下点に対応する  $\theta = \pi$  の場合に最も不安定である。Fig. 10 は、丸棒の半径  $R_0$  を変化させたときに、最下点における不安定性を比較したものである。

丸棒半径を小さくすると、 $k_c$  は増加し、したがって臨界波長  $\lambda_c$  が短くなり、より不安定になる。

一例として、5 mm の鋼製丸棒（物性値は薄板の場合と同一）を  $10^6 \text{ A/m}^2$  の電流密度を用い、0.05 m/s の铸造速度で浮揚铸造するとき、 $\lambda_c$  は 17 mm となる。この  $\lambda_c$  は、厚さ 10 mm の薄板を同一条件で铸造するときの  $\lambda_c$  とほぼ同じ長さとなる。

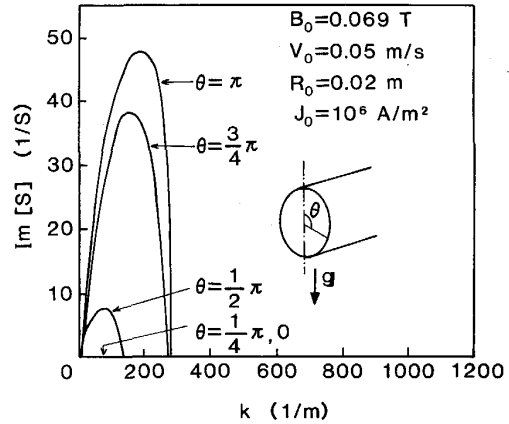


Fig. 9. Result of numerical calculation -5 : effect of the angle between the vertical line and a position vector  $r$  on symmetric perturbation.

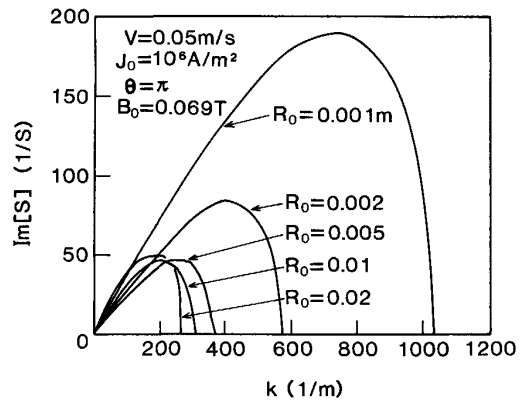


Fig. 10. Result of numerical calculation -6 : effect of the radius of rod on the perturbation.

5. 考 察

5.1 無次元解析

安定性の解析に、無次元数を導入することにより、これまでに得られた方程式に含まれる各項の、重要度や物理的な意味を明らかにすることができる。無次元解析を行う際には、以下のような無次元数を定義する。

$$k^* = ka, \gamma^* = \gamma a, s^* = as/V_0, u^* = u/V_0$$

この標記に従うと、(13)式は次のように書かれる。

$$\gamma^{*2} = k^{*2} + i\mu\sigma a V_0 s^* = k^{*2} + iR_m s^* \dots\dots (31)$$

前述したように、 $R_m$  は工業規模でも実験室規模でもほとんどの場合にその大きさは1よりかなり小さいので、第一次近似として、 $s^*$  が非常に大きくなければ、 $\gamma^*$  は  $k^*$  にほぼ等しいと置ける。

この近似と無次元化により、(20)式に対応する方程式は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
 & (s^* + k_z^*)^2 \tanh(k^*) \\
 &= -\frac{ga}{V_0^2} \left( k^* + \frac{k_z^{*2}}{k^*} \right) + \frac{T}{\rho V_0^2 a} k^{*3} \\
 & \quad - \frac{\mu J_0^2 a^2}{\rho V_0^2} \left( \frac{k_y^{*2}}{k^{*2}} e^{-k^*} \sinh(k^*) + \frac{k_z^{*2}}{k^*} \right) \\
 &= -\beta_1 \left( k^* + \frac{k_z^{*2}}{k^*} \right) + \beta_2 k^{*3} \\
 & \quad - \beta_3 \left( \frac{k_y^{*2}}{k^{*2}} e^{-k^*} \sinh(k^*) + \frac{k_z^{*2}}{k^*} \right) \dots (32)
 \end{aligned}$$

ここで,

$$\beta_1 = \frac{ga}{V_0^2}, \beta_2 = \frac{T}{\rho V_0^2 a}, \beta_3 = \frac{\mu J_0^2 a^2}{\rho V_0^2} \dots (33)$$

安定性条件のためには、 $s^*$  は実数でなければならず、したがって (32) 式の右辺は正でなければならない。

上の各無次元数の物理的意味と安定化に対するそれらの影響は以下のとおりである。

①  $\beta_1$  は慣性力に対する重力の比であり、フルード数の逆数である。これを含む第 1 項は、符号が負であることから不安定化項であり、 $k$  が磁場の方向と同一になるときに最大になる。

②  $\beta_2$  はウェーバー数の逆数であり、慣性力に対する表面張力の比である。この項は、符号が常に正であることから安定化項である。

③  $\beta_3$  は  $J_0$  の電流密度により誘導された磁場に基づく Alfvén 速度と鋳造速度との比の 2 乗である。すなわち、 $\beta_3 = (U_A/V_0)^2$  ここで、 $U_A = \mu J_0 a / \sqrt{\mu \rho}$  … (34) この項は不安定項である。

対称形の擾乱の場合に対する安定条件は、 $\sinh(k^*)$  を  $\cosh(k^*)$  で置き換えれば、(32) 式と同様の形である。

外部から与える磁場  $B_0$  は、薄板状の熔融金属を浮揚することはできるものの、(33) 式の  $\beta_3$  に含まれこの項は不安定化項であるので、平衡の位置における安定性を補償するものではないことが以上の解析から明らかとなった。

### 5.2 不安定性に及ぼす磁場の非等方的影響

先に定義した臨界波数  $k_c$  は、安定領域と不安定領域を分ける境界を決定する。例えば、 $k$  が  $B_0$  と直交する場合には、 $k_c^*$  を与える式 ((32) 式の右辺を 0 とおいた式) は次のように簡単になる。

$$\beta_2 k_c^{*3} - k_c^* (2\beta_1 + \beta_3) = 0 \dots (35)$$

したがって、波数として正の値のみ採用すれば、

$$k_c^* = \sqrt{(2\beta_1 + \beta_3)/\beta_2} \dots (36)$$

もしくは、実次元の大きさと書けば、

$$k_c = \sqrt{(2\rho g + \mu J_0^2 a)/T} \dots (37)$$

一方  $k$  が  $B_0$  と平行の場合、すなわち、 $k_y = k$  かつ  $k_z = 0$  の場合には、次式のように簡略化される。

$$\beta_2 k_c^{*3} - \beta_1 k_c^* - \beta_3 e^{-k^*} \sinh(k_c^*) = 0 \dots (38)$$

この式から  $k_c^*$  を求めるには、数値計算をする必要がある。

一般の擾乱の場合に、 $z$  軸と波数ベクトルとの間の角度を  $\theta$  とすると、無次元の臨界値は以下の非線形方程式を解くことにより求められる。

$$\begin{aligned}
 f(k^*, \theta) &= \frac{1}{\tanh(k^*)} [-\beta_1 k^* (1 + \cos^2 \theta) + \beta_2 k^{*3} \\
 & \quad - \beta_3 (\cos^2 \theta e^{-k^*} \sinh(k^*) + k^* \sin^2 \theta)] \\
 &= 0 \dots (39)
 \end{aligned}$$

Fig. 11 は  $\theta$  を変化させたとき、実次元に直した臨界波数  $k_c$  の変化を示す。この図より、擾乱波が  $z$  軸に平行な時、すなわち印加した磁場に直交する時に、 $k_c$  は最も大きくなり、反対に  $z$  軸に直交するとき、すなわち磁場に平行な時に、 $k_c$  は最も小さくなることが示される。このことは、金属の自由表面の擾乱波に及ぼす磁場の影響が非等方的であることを意味している。この影響については、CHANDRASEKHAR<sup>9)</sup> や高周波磁場に曝された有限の電気伝導度を持つ非粘性導電性流体に及ぼす交流磁場の影響について解析した GARNIER & MOREAU<sup>10)</sup> も指摘している。

与えられた物理的な条件に対し、 $k_c$  の値は実用上非常に重要である。なぜならば、金属の液体部分の長さが、 $\lambda_c = 2\pi/k_c$  を超える場合には、浮揚鋳造がこれまでに示したように不安定になる可能性があるからである。

本解析では、浮揚している熔融金属は無限広がりとする仮定を設けた。実際上は、熔融金属の供給ノズルと金

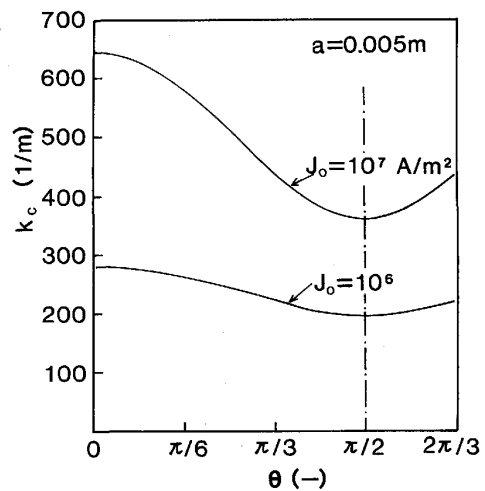


Fig. 11. Changes of the critical wave number with the angle between imposed magnetic field and wave vector for thin plate.

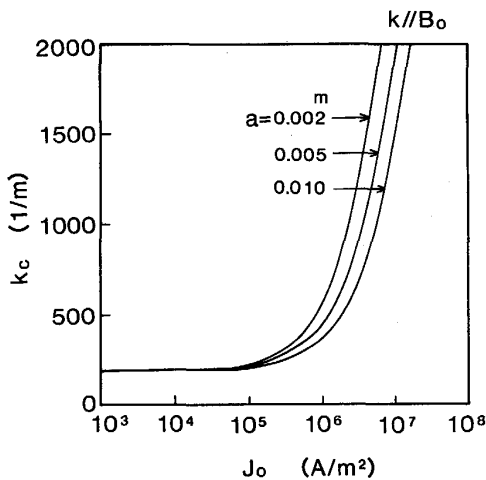


Fig. 12. Changes of the critical wave number with the current density for thin plate.

属の凝固部分との端部効果について考慮すべきである。無限広がり仮定した本解析では、浮揚部分の金属長さが  $\lambda_c$  より短い場合について、安定か不安定かを判断することはできない。

### 5.3 HEMC の工業的実施に関する試算

本報で示した HEMC 技術を薄鋼板の直接鋳造に応用し、工業規模で実現するときに要求される電流密度、エネルギー、電磁力により浮揚される液体部分の最大長さなどを計算する。

鋳造する薄板の厚さを 5 mm、幅を 900 mm とし、もし磁極間距離が 900 mm 以上で磁束密度が 0.5 T の強力な静磁場が実現できるとすると、この薄板を浮揚するのに必要な電流は 617 A ( $J_0 = 1.37 \times 10^6$  A/m<sup>2</sup>) となる。電流密度を変化したときの臨界波数を計算した Fig. 12 に示すように、浮揚された薄板は、電流密度が大略  $10^5$  A/m<sup>2</sup> を超えると急激に不安定となる。したがって、印加電流は低く抑え印加磁場を大きくするように選択しなければならないことが明らかである。

上記の条件での安定/不安定の臨界波長は、印加する磁場に直交する擾乱波に対しては、23 mm であり、平行する擾乱波に対しては、30 mm と計算される。この長さが、浮揚される溶鋼の最大長さを規定することになる。

## 6. 結 言

本報で示した解析によって得られた結論は、以下のとおりである。

(1) 浮揚された熔融金属の自由表面の安定性は、磁場の方向に対して非等方的であることが確認された。

(2) 薄板状熔融金属を浮揚する場合、擾乱が対称的であっても非対称的であっても、安定条件と不安定条件との臨界となる熔融金属の長さは同等である。

(3) 本プロセスを溶鋼に適用することを想定し、溶鋼の物性値と標準的な作業条件を用いて計算すると、安定な熔融金属部分の長さは 23~30 mm である。

(4) したがって、成長する外乱波の最短波長は上記長さであり、この長さが熔融金属の出口と鋳造金属の凝固部分との距離を規定する。

(5) この長さは、薄板形状の場合でも丸棒形状の場合でもその厚みと直径とが同程度であれば、ほぼ同じ長さである。

なお、本解析結果を HEMC に適用するに当たっては、以下の注意が必要である。

① 浮揚されている部分は、無限広がりではなく熔融金属の出口と金属の凝固部分とで固定されているので、端部効果を考慮しなければならない。

② 浮揚条件である  $\rho g = J_0 B_0$  は常に満足されていなければならない。擾乱による熔融金属の断面積変化に追従し、常に電流密度を一定にできる電流供給系が必要である。厳密な解析を行うには、この印加電流の電流密度の擾乱を取り込まなくてはならない。

## 文 献

- 1) 吉田政博: 鉄と鋼, 73 (1987), p. 403
- 2) M. G. LEWIS and J. C. YARWOOD: Proc. an International Symposium on Casting of Near Net Shape Products, Honolulu (1988), p. 515 [The Metallurgical Society]
- 3) H. A. MEIER: Light Metal (1977), p. 223
- 4) P. HOYER: Doctor thesis (1977) [Technical University of Hanover]
- 5) 浅井滋生, 小塚敏之, 軋 巖: 鉄と鋼, 72 (1986), p. 2218
- 6) 小塚敏之, 浅井滋生, 軋 巖: 鉄と鋼, 74 (1988), p. 1793
- 7) 佐々健介, 大塚岩雄, 浅井滋生, 小塚敏之, 長江光司, 林 典史: 材料とプロセス, 2 (1989), p. 314
- 8) J. B. HULL, R. J. LARI, W. F. PRAEG, D. M. ROTE and L. R. TURNER: Proc. an International Symposium on Casting of Near Net Shape Products, Honolulu (1988), p. 525 [The Metallurgical Society]
- 9) S. CHANDRASEKHAR: Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability (1961), p. 1 [Oxford University Press, London]
- 10) M. GARNIER and R. MOREAU: J. Fluid Mech., 127 (1983), p. 365