

相変態の臨界現象とフラクタル

解説

鈴木 増 雄*

Critical Phenomena in Phase Transformation and Fractals

Masuo SUZUKI

1. 緒 言

相変態すなわち、物質の相転移¹⁾²⁾について、初歩的なところから、最新の理論まで簡単に説明する。そもそも、相変態とは何か。それは、温度や圧力等のような外部の条件が変化するにつれて、物質の熱力学的に一様な状態すなわち相がカタストロフィックに変化することである。この相転移には、発熱や吸熱を伴う一次相転移と、それらを伴わず、比熱に異常性（とびや発散）が現れる二次相転移とがある。ここでは、主として、後者を扱う。それは、二次相転移においては、相転移の起こる温度（転移点という）の近傍でゆらぎが非常に大きくなり、比熱等に発散が現れ、フラクタルな構造と関係があるからである。

フラクタル^{3)~7)}については、後で詳しく述べるが、それは一口に言うとき幾何学的な構造の複雑さの度合いを示すパラメーターであり、半端な次元のことである。通常は、整数次元しか扱わないが、一次元よりも複雑で二次元よりもすさまじい構造のフラクタル次元 D は、 $1 < D < 2$ の間の半端な数である。このフラクタルという概念が、臨界現象の研究にとって、いかに重要であるかを議論したい。

2. 臨界現象の本質

さて、相変態、特に二次相転移の起こる転移点近傍でのゆらぎと物理量の異常性について議論する。相転移は、一般に対称性の変化によって特徴づけられる。一般に、高温側では、対称性が高く無秩序相になり、低温側では対称性が破れて秩序相になる。例えば、鉄やニッケルの強磁性体は、高温では、常磁性という無秩序相にあり、低温では、小磁石（すなわちスピン）の向きが全体的にそろってきて強磁性を示す。これが秩序相である。この秩序相を特徴づけるパラメーターを秩序パラメーターという。強磁性体の場合、自発磁化の強さが秩序パラメーターとなる。このように、秩序が現れる転移点では、対

称性が破れるため、ゆらぎが大きくなりやすい。ひらたく言えば、転移点近くになると、体系は、どのように対称性を破ったらよいか、その選択に迷うようになり、いろいろな状態をとり得るようになる。すなわち、ゆらぎが大きくなる。これが臨界現象の本質である。例えば、強磁性体で言うと、キュリー温度という転移点の近くでは、磁化が全体として、どちらか一方に向きやすくなるため、外部から磁界をかけると、磁化が大きくなる。その応答係数である磁化率 χ は、キュリー温度 T_C で異常に大きくなり、

$$\chi_0 \sim \frac{C}{(T - T_C)^\gamma} \dots \dots \dots (1)$$

のような発散 (∞) を示す。ここで、その発散の度合いを示すパラメーター γ を臨界指数という。一般に γ は $1 < \gamma < 2$ …… (2)

の非整数の値をとる。古典的な平均場近似¹⁾²⁾では、 $\gamma=1$ となり、キュリー・ワイスの法則にしたがう。(2)式のような半端な値をとる理由を調べると、転移点近傍での秩序パラメーターに対応する系の幾何的なクラスターのフラクタル次元と関係していることがわかる^{4)~7)}。これを詳しく議論する前に、フラクタルとは何かについてまず説明する。

3. フラクタルとは何か

すでに述べたとおり、幾何学的な構造の複雑さを定量的に表現するため導入された概念がフラクタルであり^{3)~7)}、それを表すパラメーターがフラクタル次元である。これを一般的に定義する前に、具体的な例で説明する。図1のように、一本の線分を3等分し、中央の線分を二つ折りにして、2倍に引き伸ばす。こうすると、もともとの長さを1とすると、引き伸ばされた線分の長さは、 $4/3$ となる。この手続きを無限にくり返していくと、線分の長さは全体としていくらかでも長くなり、しまいには無限大となる。こうして作られた、いたるところ折れ曲がった微分不可能な極限の図形がコッホ曲線と呼

平成2年2月8日受付 (Received Feb. 8, 1990) (依頼解説)

* 東京大学理学部教授 理博 (Faculty of Science, The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo Bunkyo-ku, Tokyo 113)

Key words : fractal ; critical phenomena ; mean field theory ; anomaly ; coherent-anomaly method ; phase transition.

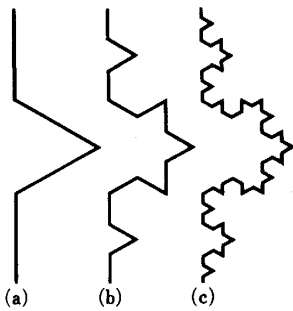


図 1 コッホ曲線⁵⁾

ばれ、フラクタル図形のもっとも簡単な例として、よくひき合いに出される。さて、このようなフラクタル図形の複雑さを表すパラメーターは、どのように定義したらよいであろうか。すぐ気がつくことは、もとのまっすぐな線分(長さ1)と比較すると、コッホ曲線は、平面上の有限の領域に存在しているが、その全体の長さは無限である。そこで、この曲線の長さの無限大になるなり方をうまく捉えれば、この図形の複雑さの度合いが表現できそうであると予想される。マンデルブロにしたがって、長さを測る物差しを目盛りを少しずつ小さくしていくことにする。例えば、コッホ曲線を目盛りが1/3までしか測れない物差しで、1/3を新しい単位にして測ると、その長さは、(a)図と同じになり、4となる。(粗視化した測定になっている。)さらに、 $(1/3)^2=1/9$ の目盛りを単位にして、その精度でコッホ曲線の長さを測ると(b)図の長さと同じになり、 $4^2=16$ となる。そこで、

$$D = \log 4 / \log 3 = 1.26 \dots \dots \dots (3)$$

を考えると、これは、通常の次元の拡張になっている。一般に、通常の次元も含めて、次元 D の単位長さの図形を、目盛りを $1/r$ に精度をあげて、 $1/r$ の新しい単位で測り、その長さ(面積または体積)を V とすると、

$$V = r^D \text{ すなわち } D = \frac{\log V}{\log r} \dots \dots \dots (4)$$

の関係が成立する。通常の空間の次元 d では、その体積 V は一辺の長さを L とすると

$$V = L^d \dots \dots \dots (5)$$

で与えられ、単位を $1/r$ にすれば、一辺の長さは rL となり、それに対応して、体積は r^d 倍になり、(4)式の定義と一致する。こうして、フラクタルな図形のフラクタル次元 D が一般的に定義される。

4. フラクタル図形の例とフラクタル次元の求め方

図2にマンダラのフラクタル図形を示す。この図形のフラクタル次元の求め方を説明しよう。このマンダラの幾何学的構造は、次のとおりである。まず、半径 R の円に内接し、互いに外接する8個の円をかく。この小円の半径を r とする。大円の中心 O を中心とする小円

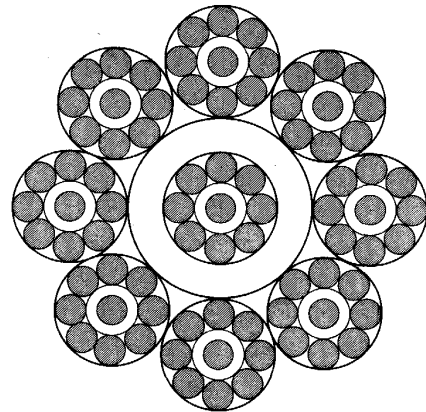


図 2 マンダラのフラクタル図形

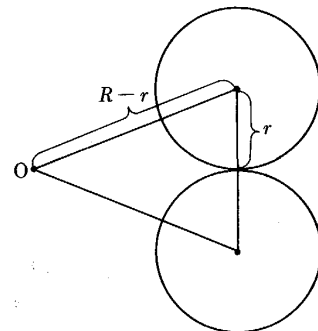


図 3 フラクタル次元の求め方

をかく。この操作をくり返す。すなわち、各小円の中にさらに小さな円を9個かく。極限の図形はフラクタルになる。

さて、図3より、大円と小円の比は、

$$\frac{r}{R-r} = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = 0.3827 \dots \dots \dots \equiv a \dots \dots \dots (6)$$

で与えられる。ゆえに、

$$\frac{R}{r} = \frac{a+1}{a} = 3.613 \dots \dots \dots (7)$$

となる。このフラクタル図形の面積 S は単位を r/R 倍に精度をあげて測ると9倍になるから、マンダラのフラクタル次元 D は(4)式の定義より、

$$D = \frac{\log S}{\log(R/r)} = \frac{\log 9}{\log 3.613} = 1.71 \dots \dots \dots (8)$$

と求められる。このマンダラのフラクタル次元は1次元より、むしろ2次元に近いことがわかる。

この他にも、同様にしてフラクタル図形はいくらでも作れる。詳しくは、文献3)~7)を参照して欲しい。

5. スケーリング、くりこみ群およびフラクタル次元

以上に説明したとおり、フラクタル次元 D は、二つ

の幾何学的な量 r と V との関係を表す指標である。二つの量が(4)式のような単純な関係になれば、フラクタル次元 D は定義しにくい。(4)式は、言わば拡張された比例関係である。すなわち、それは次元解析的な関係である。

図1や図2は、数学的にも厳密に成立するフラクタル構造を持っている。しかし、現実には、必ずしもこのような数学的なフラクタル構造を示すとは限らない。多くの場合は、リアス式海岸のように、近似的なフラクタル性を示す。このような現実的な場合は、物差し(スケール)を変えて、図形の長さ、面積、体積等を測り、その大きさがどのように変化するかを調べればよい。この場合、平均的な操作、または、漸近的な相似性によって、フラクタル次元 D を近似的に定義する。

一方において、相転移の起こる転移点 T_C 近傍では、例えば磁化率 χ_0 は(1)式のように、拡張された比例関係(べき乗則)を示す。そこで、温度差 $(T - T_C)$ を ε と表し、この目盛りを $1/b$ に精度をあげて、新しい温度差 ε' を

$$\varepsilon' = b\varepsilon \dots\dots\dots(9)$$

と書くことにする。これをスケール変換という。このとき、磁化率 χ_0 は、

$$\chi_0' = \frac{1}{b^\gamma} \chi_0 \dots\dots\dots(10)$$

とスケール変換を受けることになる。したがって、(9)式と(10)式の両方の変換を同時に行えば、物理法則は、(1)式と同形になり不変である。これをスケーリング則という。スケーリング則は、臨界現象のもっとも本質的な特徴である。フラクタルとスケーリング則は、数学的に表現すれば、同じ構造をしている。前者は幾何学的な自己相似性に立脚しており、後者は、物理量の粗視化とスケール変換に対する不変性に基づいている。さらに、ノーベル賞受賞の対象になったウィルソンのくりこみ群⁸⁾の理論は、上の粗視化によるスケーリングの手順を具体的にミクロに行う処法を一般的に与えたものである。このくりこみ群の方法を用いると、臨界指数 γ を近似的に求めることができる。詳しくは、文献1)を参照していただきたい。

次に、臨界現象とフラクタルとの関係⁴⁾⁵⁾についてもっと詳しく議論しよう。わかりやすくするため、計算機シミュレーションによる配位を用いて、相転移点でのフラクタル構造を説明する。相転移のモデルとしてもっとも簡単なモデルはイジング模型である。それは、格子点上に+1か-1の変数を対応させ、隣接格子間同士に相互作用が働き、同じ値(+1同士または-1同士)をとる確率を p とし、異なる値(+1と-1、または-1と+1)をとる確率を $1-p \equiv q$ とし、格子全体の分布を決める。確率 p は、温度 T によって変化する。見やすくするため、+1の状態を黒丸で示し、-1の状態

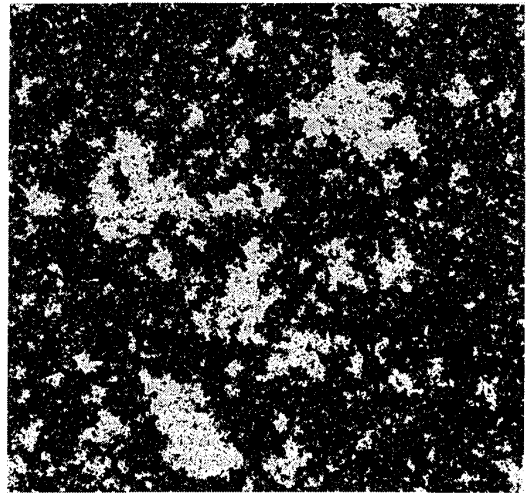


図4 1024×1024 イジング格子上的配位(転位点上)

を白地で示すことにする。一辺が1024の正方格子(これを1024×1024格子と書くことにする)に対して、転移点 T_C での配位をモンテカルロシミュレーションで求めた図を示すと、図4のようになる。あたかも実験結果のような図であり、格子全体につながっている黒丸のクラスターの存在が興味深い。もっとはっきりとわかるようにするために128×128格子の T_C における配位(4万モンテカルロステップ)を図5(a)に示す。

これらの図から、直観的に、転位点 T_C では、配位がフラクタル的になっていることがわかる。しかし、今まで説明してきた数学的な例と異なり、解析的に、フラクタル次元を求めるのは困難である。それではどうしたらよいであろうか。ウィルソンのくりこみ群の考え方⁸⁾にしたがって、128×128格子を図6のように3×3のセルからなる42×42格子に分割し、3×3セルの中の黒丸が5個以上なら、そのセルに大きな黒丸を対応させ、それ以外は白地として、粗視化した配位を書くと図5(b)のようになる。この系の秩序パラメーターとして、黒丸の数から白地の数を差し引いたものを用いることにする。これを M とする。系のサイズを L とすると明らかに、秩序パラメーター M は、サイズ L と共に大きくなる。それは、転移点で

$$M(L) \sim L^{d_M} \dots\dots\dots(11)$$

と表せる。指標 d_M は、秩序パラメーターの臨界指数 β と次のような関係にある⁴⁾⁵⁾。

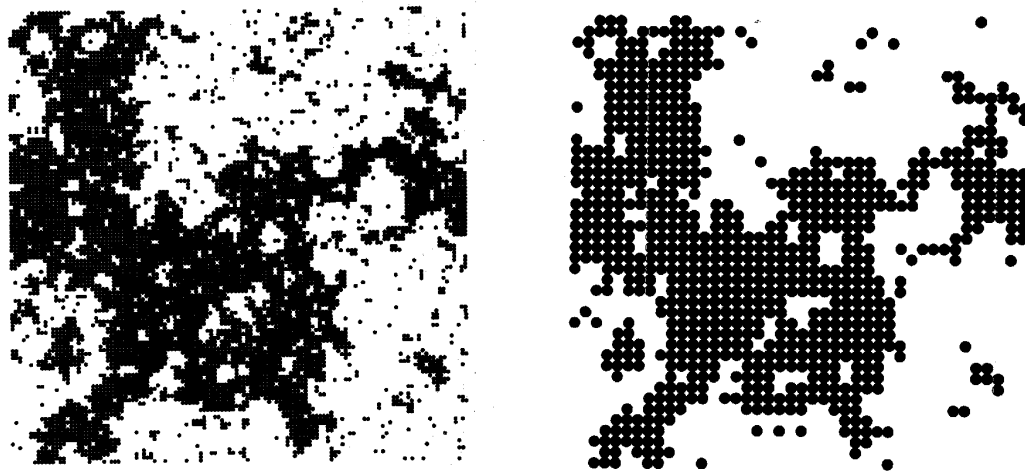
$$d_M = d - \frac{\beta}{\nu} \dots\dots\dots(12)$$

ただし、 d は系の次元、 β は秩序パラメーターの温度変化

$$M \sim (T_C - T)^\beta \dots\dots\dots(13)$$

および、 ν は、相関距離 ξ の温度変化

$$\xi \sim (T - T_C)^{-\nu} \dots\dots\dots(14)$$



(a) 128×128 格子における配位 (4 万モンテカルロステップ) (b) (a) をスケール 3 で粗視化した配位

図 5 フラクタルな配位とその粗視化

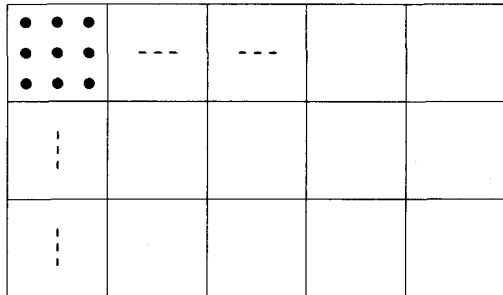


図 6 セル分割とくりこみ

を表すパラメーターである。上の関係式(12)は、次のようにして直観的に導かれる。相関距離 ξ は、系のサイズ L によって頭打ちとなるから、温度差 $(T - T_C)$ は、 $(T - T_C)^{-\nu} \sim L$ (15) までしか小さくならない。すなわち、

$$T - T_C \sim L^{-1/\nu} \dots\dots\dots(16)$$

のところで意味を持つ。一方、秩序パラメーターは、系の体積 $V = L^d$ に比例し、その比例係数は(13)式のような温度変化を示すから、

$$M \sim L^d (T_C - T)^\beta \dots\dots\dots(17)$$

となる。これに、次元解析の関係式(16)を代入すると

$$M \sim L^{d-\beta/\nu} \dots\dots\dots(18)$$

となり、(12)式が導かれる。

また、秩序パラメーターの応答係数 χ_0 は、

$$\chi_0 \sim V(T - T_C)^{-\gamma} \dots\dots\dots(19)$$

と表せるから、前と同様にして、 χ_0 は、転移点で、系のサイズ L と共に

$$\chi_0 \sim L^{d+\gamma/\nu} \dots\dots\dots(20)$$

のように大きくなることがわかる。

こうして、物理量のサイズ依存性を求めれば、その臨界指数が求められる。これをフィッシャーの有限サイ

ズ・スケーリング理論⁹⁾¹⁰⁾ という。系のサイズ L をいろいろに変えて L 依存性を求めるかわりに、図 5 (a) から図 5 (b) を求めたように粗視化を行って有効的にサイズ依存性を調べる方が効率がよい。実際、図 5 から、 d_M を求めると、 $d_M \approx 1.875$ となり¹¹⁾、 $d = 2$ 、 $\nu = 1$ (厳密解)を用いると、 $\beta = 0.125$ となり、ヤンの厳密解による値 $\beta = 1/8$ が数値的にも検証できることになる。

以上は、イジング模型というもっとも簡単なモデルについて説明したが、一般の相転移についても、臨界指数 ($\beta, \gamma, \nu, \dots$) とフラクタル次元との関係がいろいろ研究されている^{4)~7)}。

また、パターン形成、セルオートマトンおよびカオス等のフラクタル次元も同様に求められる⁷⁾。以上に述べた数学的なフラクタルの例からも容易にわかるように、フラクタルな構造は、簡単な手順のくり返しから求められる。現実的な系では、必ずしも、そのような簡単な漸化式が顕わには見えないが、漸近的には、そのようなものが法則の背後に存在しているものと考えられる。

6. コヒーレント異常法^{12)~15)} による臨界現象の研究

それでは、相転移のような協力現象を解析的に研究するにはどうしたらよいであろうか。もっとも簡単な方法は、平均場近似と呼ばれる方法である。磁性体を例にして説明すると次のようになる。まず互いに相互作用をしていない自由なスピン (小磁石) を磁界 H の中において熱平衡状態での磁化の強さ M を求めると、それは、 H の関数としては、対称性から奇関数であることがわかり、

$$M = a(T)H - bH^3 + \dots \dots\dots(21)$$

と展開できるであろう。展開係数は温度 T の関数であ

る。もし、さらに、スピン間に相互作用があれば、 H の他に、 M に比例した分子場（平均場） kM がかかるであろう。ただし、 k は相互作用の強さに比例する定数である。こうして、(21)式は

$$M = a(T)(H + kM) - b(H + kM)^3 + \dots \quad (22)$$

と近似的に書けるであろう。 H の一次、したがって、 M についても一次まで考えると、(22)式より、

$$M = a(T)kM + a(T)H \quad (23)$$

となり、これより、

$$M = \chi_0(T)H; \chi_0(T) = \frac{a(T)}{1 - ka(T)} \quad (24)$$

のような線形の関係式が得られる。

$$1 - ka(T_C) = 0 \quad (25)$$

の根を T_C として、 $1 - ka(T)$ を T_C の近傍で展開して

$$1 - ka(T) = c(T - T_C) \quad (26)$$

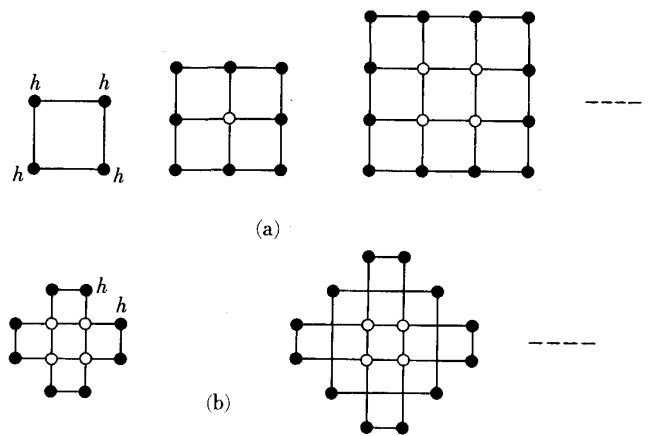
とおくと、

$$\chi_0(T) \simeq \frac{C}{T - T_C}; C = \frac{a(T_C)}{c} \quad (27)$$

となる。これは、有名なキュリー・ワイスの法則である。(1)式と比較すると、 $\gamma=1$ に対応しており、フラクタル性は現れない。このように、平均場近似で相転移を扱っても、いつも古典的な異常性しか求まらないので、平均場近似は、ウィルソンのくりこみ群の理論が提出される前後から、あまり重要視されなくなってきた。しかし、本当に、そうであろうか。実は、相転移の本質は、平均場近似でも、現代的な意味において解明できるのである。それは、「コヒーレント異常法 (Coherent-Anomaly Method, 略して CAM と書く)」という相転移研究の新しい強力な方法が発見されて可能となった^{12)~15)}。CAM 理論のエッセンスは次のとおりである。相転移のフラクタル性は、ゆらぎに由来する。ゆらぎをとり入れるには、クラスターを有効的に大きくしなければならない。そこで、クラスター平均場近似を考える。すなわち、図7のように少しずつクラスターサイズを大きくしていく。それぞれのクラスターの境界のスピン(図の黒丸)に平均場(または有効場)をかけ、黒丸のスピンの平均値と中央にある白丸のスピンの平均値とが等しくなるという Self-consistency の条件により、有効場を決める。こうして系統的にクラスター平均場近似を行って、秩序パラメーターの応答係数、例えば磁化率 $\chi_0(T)$ を求めると、形としては、やはり、キュリー・ワイスの法則

$$\chi_0(T) \simeq \frac{\bar{\chi}(T_C)}{\varepsilon}; \varepsilon = \frac{T - T_C}{T_C} \quad (28)$$

を示す。しかし、注目すべきことは、古典的な発散の係数 $\bar{\chi}(T_C)$ が近似の度合いがあがるにつれて、すなわち、近似的な転移温度 T_C が真の転移点 T_C^* に近づくにつれて異常に大きくなることである^{12)~15)}。これをコヒーレント異常という。ここで「コヒーレント」とは、「系統的な」という意味である。さて、一般に、このコヒー



(a) 平均場を周辺の格子点(黒丸)につけ加えた系統的なクラスターの列
(b) 同様の列、できる限り丸い形のクラスターの例

図7 クラスター平均場

レント異常は、

$$\bar{\chi}(T_C) \sim \frac{1}{(T_C - T_C^*)^\psi} \quad (29)$$

のような幅乗則で表されることが多い。指数 ψ はコヒーレント異常指数と呼ばれる¹²⁾。CAM 理論の一般論¹²⁾によると、 $\chi_0(T)$ の臨界指数 γ は

$$\gamma = 1 + \psi \quad (30)$$

で与えられる。すなわち、固有なゆらぎに起因するフラクタルな異常性は、コヒーレント異常によって特徴づけられ、具体的に求められることになる。したがって、以上のコヒーレント異常法によれば、クラスターサイズを系統的に大きくしていきながら、クラスター平均場近似を行い、古典的な臨界係数を求め、その近似の度合いに対する発散(異常性)を調べ、 ψ を近似的に評価してやれば、フラクタルな臨界指数 γ が(30)式より求められる。この新しい CAM 理論は、極めて直観的で、わかりやすく、使いやすいので、すでに多くの系に応用されている¹⁶⁾。この方法は収束も速く、実用的である。

この CAM 理論の発見により、今までほとんど見捨てられていた平均場近似が、見直されることになり、その復権がなし遂げられ、研究方法の転換が行われつつある。こうして、フラクタルな構造も、古典的な平均場近似を用いて研究できる道が拓かれ、たいへん便利になった。

7. 結 言

以上で簡単に相転移とフラクタルについて説明したが、もっと詳しくは、参考文献を見ていただきたい。コンピューターの発達と共にますます、フラクタルな構造は作りやすく、研究しやすくなり、重要性を持っていくであろう。フラクタルの概念を用いると、いろいろな分野で思いがけない新しいイノベーションが起こるかもしれない。今後もフラクタルおよび相転移という概念はま

すます重要となることであろう。

最後に図 5 と図 6 は、私の研究室の院生である伊藤伸泰君の提供であることを付記して、ここに感謝する。

文 献

- 1) 鈴木増雄: 統計力学の進歩 (1981), p. 217 [裳華房]
- 2) 鈴木増雄: 物性物理の新概念 (1988), p. 1 [培風館]
- 3) B. B. MANDELBROT: *The Fractal Geometry of Nature* (1977) [Freeman, San Francisco]
フラクタル幾何学 (広中平祐監訳) (1984) [日経サイエンス社]
- 4) 鈴木増雄: 「次元」の概念の拡張, 別冊『数理学』形のフラクタル (1986), p. 109 [サイエンス社]
- 5) M. SUZUKI: *Prog. Theor. Phys.*, **69** (1983), p. 65
- 6) 高安秀樹: フラクタル (1986) [朝倉書店]
- 7) 高安秀樹著: フラクタル科学 (1986) [朝倉書店]
- 8) K. G. WILSON: *Phys. Rev.*, **B4** (1971), p. 3174, p. 3184
- 9) M. E. FISHER: *J. Vac. Sci. and Tech.*, **10** (1973), p. 665
- 10) M. SUZUKI: *Prog. Theor. Phys.*, **58** (1977), p. 1142
- 11) N. ITO and M. SUZUKI: *Prog. Theor. Phys.*, **77** (1987), p. 1391
- 12) M. SUZUKI: *J. Phys. Soc. Jpn.*, **55** (1986), p. 4205
- 13) M. SUZUKI, M. KATORI and X. HU: *J. Phys. Soc. Jpn.*, **56** (1987), p. 3092
- 14) M. SUZUKI: *J. Stat. Phys.*, **53** (1988), p. 483
- 15) M. SUZUKI: *J. Phys. Soc. Jpn.*, **57** (1988), p. 2310
- 16) M. SUZUKI: *Recent Progress in Many-Body Theories*, ed. by Y. AVISHAI (1990) [Plenum Pub. Co.]