

# 再帰法によるボロン繊維強化アルミニウム基 複合材料の強度分布評価

論 文

合 田 公 一\*・福 永 秀 春\*<sup>2</sup>

## Evaluation of Strength Distribution in Boron Fiber Reinforced Aluminum Matrix Composites by Recursion Analysis Technique

Koichi GODA and Hideharu FUKUNAGA

## Synopsis :

The present work tries to apply the recursion analysis technique to boron fiber reinforced aluminum matrix composites. Several sizes of composites ( $V_f$ : 0.10~0.15) prepared by hot-press were used as the test materials. The tensile strengths of filament and composite specimen were measured several times. On the other hand, Weibull parameters of the strength of fibers were estimated from the measured data, from which recursive distribution curves were predicted. The results showed that the strength of composites gradually decreased with increasing the size of composites. The recursive curves indicated appropriately such a tendency, i.e. agreed well with the Weibull plots of experimental data. This means the recursion analysis technique can be applied to the evaluation of strength distribution of boron fiber reinforced aluminum matrix composites in a laboratory scale. In addition, the effect of 2-parameter and bi-modal Weibull distribution on the recursive solution was discussed.

**Key words :** unidirectional composites ; fiber reinforced metal ; tensile strength ; acoustic emission ; Weibull distribution ; chain-of-bundles model ; recursion analysis technique.

### 1. 緒 言

カーボン繊維, 炭化けい素繊維あるいはボロン繊維などのセラミック繊維を複合材料の強化材として用いるとき, その強度の大ききなばらつきのために強化効果を平均値で記される複合則で説明するには困難な場合がある<sup>1)</sup>. そのため, 強化材強度の統計的性質を考慮した複合材料の引張強度特性に関する知見が, これまでに確率論的手法あるいは力学的手法を用いた理論的観点から, 特に複合材料の最も基本形態である一方向繊維強化材を対象にして明らかにされてきた. 前者の確率論的手法とは, 繊維強度の分布関数から確率定理を用いて複合材の平均強度や強度分布曲線を表すもの<sup>2)</sup>であり, 後者の力学的手法とは境界値問題にモンテカルロ法を組み合わせたシミュレーション技法<sup>3)</sup>である. 特に, 前者の確率論的手法に関する扱いは, 束強度の分布関数を利用した手法として ROSEN<sup>4)</sup>によって報告されて以来, 盛んに行われてきた. ZWEBEN<sup>5)</sup> および ROSENと ZWEBEN<sup>6)</sup> は, 複合材中に破断した繊維がある本数連なったときに破壊が生

じるようなクライテリオンを考え, 複合材の強度特性を論じた. さらに, FUKUDAら<sup>7)</sup> は ZWEBENの手法を改良し, ARGONと SCOP<sup>8)9)</sup> は強度の近似的累積分布曲線を導いた. しかしながら, ZWEBENの手法は数個の繊維の破断連鎖に限定された解法であり, ARGONと SCOPの解法は負荷応力に依存して累積分布にならない範囲が現れた. 一方, HARLOWと PHOENIX<sup>10)11)</sup> は繊維の破壊確率を応力集中係数に依存した数区間に分割し, これを用いて複合材中で破断繊維が  $k$  個連なる応力の累積分布曲線を導いた. そして一方向強化複合材の強度分布を与える一般的な解釈を示し, この手法を再帰法 (Recursion analysis technique) と呼んだ. さらに, SMITH<sup>12)13)</sup> および BATDORF<sup>14)</sup> は, ほぼ同じ時期に同じ考え方で一方向繊維強化材の破壊の確率モデルを独立に発表し, 再帰法の正当性を実証している. このように一方向繊維強化材の強度の確率論的扱いは理論上大きく発展してきたにもかかわらず, 理論の適用性を実験的に検討した報告はこれまでに FRP を対象にしたものが主流<sup>15)</sup> であり, FRM に関しては非常に少ない<sup>16)</sup> のが現状である. しかもその

昭和 63 年 12 月 16 日受付 (Received Dec. 16, 1988)

\* 広島大学工学部 (Faculty of Engineering, Hiroshima University, Shitami Saijo-cho Higashihiroshima 724)

\*<sup>2</sup> 広島大学工学部 工博 (Faculty of Engineering, Hiroshima University)

ほとんどが複合材強度の平均値を扱ったものであり、ばらつきの扱いには至っていない。

本研究は以上述べた観点から、繊維強度の統計的性質を考慮した FRM の強度分布特性に関する知見を確率論的手法によって明らかにすることをめざし、再帰法を用いてボロン繊維強化アルミニウム複合材の強度分布評価を試み、この手法の有効性について検討したものである。

## 2. 解析方法

### 2.1 再帰法

本研究では、緒言で述べた理由から Plet (破断繊維が 1 本あるいは数本連鎖した状態) 数を一般的に与える手法が示され、他の確率モデルによってその累積分布曲線の正当性が実証されている再帰法を用いて、ボロン繊維強化アルミニウム複合材の強度分布評価を行う。再帰法を用いるに当たり、本研究で用いる複合材が以下の前提を満足するものと仮定する。

(1) 複合材は、繊維の破断点からの耐荷未回復域<sup>†</sup> (以下、無効長さとして記す) を基準として複合材内の繊維配列を表す、いわゆる ROSENモデル<sup>4)</sup> に従う。

(2) 破断した繊維の隣接繊維へ及ぼす応力集中係数は最近接の繊維のみを対象とし、無効長さ全域にわたって一定に働くものとする。

(3) 複合材内で  $k$ -plet が生じたときに複合材は破壊する。

HARLOW と PHOENIX<sup>10)11)</sup> は再帰的解析手法 (Appendix 参照) によって、無効長さを有した  $N$  本の繊維要素から成る複合材 (以下、要素複合体として記す) 内で  $i$ -plet が生成し得ない確率  $Q_N^{(i)}$  に関する再帰方程式を次のように導いた。

$$\{Q_{N+1}^{(i)}\} = [Q^{(i)}]^N \{Q^{(i)}\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\{Q_j^{(i)}\}$ :  $j$  本の繊維から成る要素複合体内で  $i$ -plet が生成し得ない確率の列ベクトル、 $[Q^{(i)}]$ : 繊維の破断確率を含んだ推移確率行列 (再帰行列)、 $\{Q_1^{(i)}\}$ : 初期条件の列ベクトルで次のように与えられる。

$$\{Q_1^{(i)}\}^T = [1, \dots, 1] \dots\dots\dots (2)$$

$\{Q_{N+1}^{(i)}\}$  の第 1 成分は  $Q_N^{(i)}$  に等しい。したがって、 $Q_N^{(i)}$  を式 (1) (2) から数値的に算出することによって、要素複合体内で  $i$ -plet が生成する確率  $G_N^{(i)}$  が次のように表される。

$$G_N^{(i)} = 1 - Q_N^{(i)} \dots\dots\dots (3)$$

仮定 (1) より ROSENモデルを想定しているため、長さ方向における各要素複合体は互いに独立である。したがって、複合材内で  $i$ -plet が生成する確率  $H_{MN}^{(i)}$  は  $M$  個の要素複合体から成る直列モデルの最小値分布に相当し、

がって、複合材内で  $i$ -plet が生成する確率  $H_{MN}^{(i)}$  は  $M$  個の要素複合体から成る直列モデルの最小値分布に相当し、

$$H_{MN}^{(i)} = 1 - \{1 - G_N^{(i)}\}^M \dots\dots\dots (4)$$

となる。本研究では、仮定 (3) で示した強度分布を与える Plet の臨界数  $k$  は  $(k+1)$  と片側 99.5% の範囲 (累積確率が 0.5% 以上の範囲) で一致するときに臨界値として用いた。

### 2.2 繊維の強度分布と無効長さ

本研究では、複合材内の繊維がその強化方向で次式の 2 母数ワイブル分布あるいは多重モードワイブル分布<sup>17)</sup> に従った強度特性を発揮するものとして議論を進める。

$$F(\sigma) = 1 - \exp\left\{-\frac{L}{L_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$F(\sigma) = 1 - \exp\left\{-\frac{L}{L_0} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0i}}\right)^{m_i}\right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $m$  および  $m_i$ : 形状母数、 $\sigma_0$  および  $\sigma_{0i}$ : 尺度母数、 $L$ : ゲージ長さ、 $L_0$ : ワイブル母数推定時のゲージ長さである。式 (5) の 2 母数ワイブル分布は、セラミックス繊維の強度分布を適度に表す関数として従来よりしばしば利用されているものである<sup>18)</sup>。また式 (6) に示す多重モードワイブル分布 (ここでは  $i=1, 2$  の場合を示す) は、著者らがセラミックス繊維の強度分布をより適格に表す分布関数として推奨しているものである<sup>19)20)</sup>。なおこれらのワイブル母数の推定法は、最尤法および多段最尤法<sup>17)</sup> をそれぞれ用いた。

一方、無効長さ  $\delta$  に関しては、シアラグ理論<sup>21)</sup> や弾塑性有限要素法<sup>22)</sup> によって耐荷未回復長さを予測する試みがなされているが、ここではその特性が簡便に記述できる次の KELLY-TYSONの式<sup>12)23)</sup> を用いた。

$$\delta = \frac{\sigma_i d_f}{2\tau_y} \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $\sigma_i$ : 繊維の平均引張応力、 $d_f$ : 繊維直径、 $\tau_y$ : マトリックスのせん断降伏応力である。したがって、複合材内の要素複合体の個数  $M$  は

$$M = L / \delta \dots\dots\dots (8)$$

である。ところで、式 (7) における  $\sigma_i$  は繊維の破断応力に依存して決定される。本実験では、複合材が破壊するまでの繊維の累積破断数が少ないことを考慮し、次式に示す最小値分布の平均値によって  $\sigma_i$  を見積もった。

これは 2 母数ワイブル分布の場合、

$$\sigma_i = \sigma_0 N^{-1/m} \Gamma(1+1/m) \dots\dots\dots (9)$$

<sup>12)</sup> この式は一般に臨界長さを表す式として利用されるものであるが、長繊維に対しては耐荷未回復長さの 2 倍長として近似することができる。

<sup>†</sup> ここでは ZWEBEN<sup>5)</sup> や FUKUDA<sup>7)</sup> によって指摘されているように、ROSENの定義の 2 倍長を無効長さとする。

Table 1. Properties of B<sub>4</sub>C-coated boron fiber.

Diameter	139.6 μm*
Tensile strength	3.85 GPa*2
Elastic modulus	392 GPa
Specific gravity	2.55

\* Measured value by laser system

\*2 Measured value at 50 mm gauge length

Table 2. Properties of 1060-O Aluminum.

Tensile strength	68.6 MPa
Shear strength	49.0 MPa
Elastic modulus	68.6 GPa
Specific gravity	2.70

であり、二重モードワイブル分布の場合、数値計算を必要とし、

$$\sigma_t = \int_0^\infty \{1 - F^{(1)}(\sigma)\} d\sigma \dots\dots\dots (10)$$

となる。ここで、 $F^{(1)}(\sigma) : F(\sigma)$  の最小値分布の累積分布関数を表す。

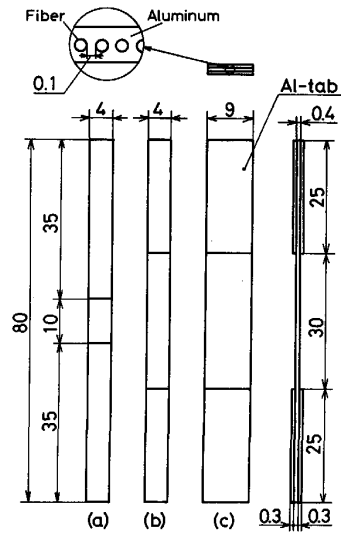
### 3. 実験方法

#### 3.1 基材および複合材の調製方法

強化用繊維には AVCO 社製の B<sub>4</sub>C が被覆されたボロン繊維（以下、B-B<sub>4</sub>C 繊維と略記する）を用いた。この繊維は従来のボロン繊維に比べ、アルミニウムなどのマトリックス金属との反応を防止するために表面に 7 μm 程度の B<sub>4</sub>C が被覆されているのが特徴である。またマトリックス金属としては厚さ 0.6 mm の 1060 加工用アルミニウム (Al > 99.6%) を用いた。B-B<sub>4</sub>C 繊維および Al 合金の特性値を Table 1 および Table 2 にそれぞれ示す。なお、前述の無効長さ δ は、これら表の値を採用した。

ボロン繊維強化アルミニウム複合材（以下、B-B<sub>4</sub>C/Al 複合材と記す）の調製はホットプレス装置（石川島播磨重工業製、P20V SR16/20、最大荷重 20 t）によって行った。調製条件は調製温度 600°C、加圧力を 49 MPa および加圧時間 30 min とし、加圧後 N<sub>2</sub> ガス雰囲気中で炉冷して所要の複合材を得た。試験片は Fig. 1 にその概略を示すように、寸法の異なる 3 種類の単層板を用いた。すなわち、繊維間距離を 0.1 mm とし、構成繊維の本数 N およびゲージ長さ L がそれぞれ (a) N=10 および L=10 mm, (b) N=10 および L=30 mm, (c) N=30 および L=30 mm になるよう調製されたものである。このとき、試験片の繊維体積率 V<sub>f</sub> はおおよそ 10~15% になるように最終加工された。

複合材の引張試験はインストロン型試験機（島津オートグラフ、IS-5000）を用い、試験速度 1 mm/min で行った。またワイブル母数の推定も併せて行うため、一部の



(a) N=10, G.L.=10 mm (b) N=10, G.L.=30 mm  
(c) N=30, G.L.=30 mm  
N: Number of fiber in specimen G.L.: Gauge Length

Fig. 1. Size of specimens.

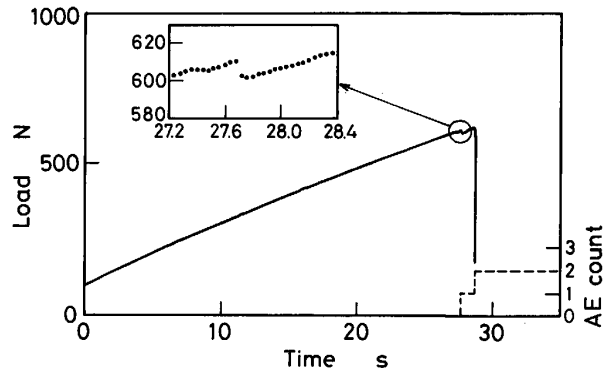


Fig. 2. Load-time curve and AE count in specimen (b).

複合材については 10%NaOH 水溶液によって繊維を抽出し、供給繊維とともにゲージ長さ 30 mm、試験速度 1 mm/min の条件で引張試験を行った。

#### 3.2 AE 測定法

本研究では既報<sup>24)</sup>とほぼ同様な AE 測定装置を用いて複合材内の繊維破断を検出し、複合材の破壊過程について検討した。AE 測定装置は、共振型センサー（NF 社製、AE-901U 型、140 kHz 共振周波数）から検出された AE 信号をプリアンプおよびメインアンプによって 20 dB まで増幅し、その信号を AE カウンター（NF 社製、モデル-505）および A/D 変換器を通してロードセルからの出力信号とともにデータ収集装置（日本電気三栄製、データ・アキュジションコントローラー、7 V14 形）に取り込むものである。なお、AE カウンターのしきい値は、20 dB の増幅率に対して 50 mV に設定

した. B-B<sub>4</sub>C 繊維はその破壊時に可聴音を発するが, この設定値によってカウントされる AE 事象を破断時の可聴音とほぼ対応づけることを確認した. しかしながら, いくつかの試験片において他の要因で AE 事象が発生するような場合がみられた. Fig. 2 に複合材の代表的な荷重と測定時間の関係を示すが, 図中丸印で示すように, AE 事象の発生とともに繊維破断が原因で生じたと考えられる若干の荷重低下が観察された. そこで本研究では, 繊維破断による可聴音と図示されたような荷重の推移を注意しながら繊維破断を同定し, AE カウント数を整理した.

#### 4. 結果および考察

##### 4.1 B-B<sub>4</sub>C/Al 複合材の引張試験結果

本研究では, 複合材の破断時に繊維が負担していた平均応力で複合材の強度を表す. このとき平均応力  $\sigma_f$  は次式に示す複合則によって見積もることができる.

$$\sigma_f = \frac{\sigma_{cu} - \sigma_m^*(1 - V_f)}{V_f} \dots\dots\dots (11)$$

ここで,  $\sigma_{cu}$ : 複合材の引張強さ,  $\sigma_m^*$ : 複合材破断時にマトリックスが受け持つ応力を表す. なお, ここではマトリックスを弾完全塑性体と仮定し,  $\sigma_m^*$  には引張強さの値 (=68.6 MPa) をそのまま採用した. また,  $V_f$  は繊維本数, 繊維直径および試験片寸法を考慮し, 各試験片ごとに測定した値を用いた.

Table 3 に B-B<sub>4</sub>C/Al 複合材の引張試験結果を示す. これから寸法の増加とともに, 強度の平均値は徐々に低下していることがわかる. これは繊維の本数が増えると繊維強度の最小値が低下し, またゲージ長さが増大すると体積効果 (あるいは表面積効果) によって繊維強度が

Table 3. Test results of B<sub>4</sub>C-coated boron fiber reinforced Al composites.

Size of composites	N=10 L=10 mm	N=10 L=30 mm	N=30 L=30 mm
n	35	32	36
Ave. (GPa)	3.59	3.36	3.17
C. V. (%)	7.56	7.30	7.69

N: Number of fiber in specimen L: Gauge length of specimen  
n: Number of specimen Ave.: Average tensile strength  
C. V.: Coefficient of Variation

Table 4. Estimated Weibull parameters of B<sub>4</sub>C-coated boron fiber.

2-parameter Weibull			Bi-modal Weibull				
G. L.(mm)	m	$\sigma_0$ (GPa)	G. L.(mm)	$m_1$	$\sigma_{01}$ (GPa)	$m_2$	$\sigma_{02}$ (GPa)
30	16.3	3.97	50	13.57	3.94	16.42	4.67

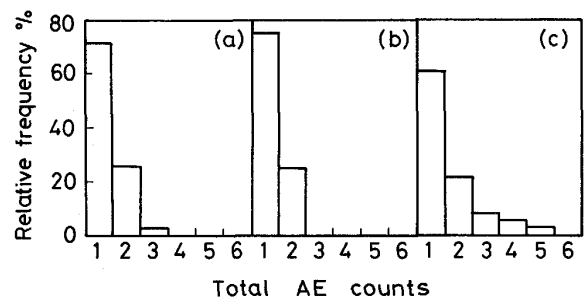
G. L.: Gauge Length

低下するためと考えられる. 一方, 変動係数はほぼ一定値を示すことがわかる.

Fig. 3 に複合材が破壊に至るまでにカウントされた繊維の累積破断数をヒストグラムにして示す. これから, どの寸法においても 1 本あるいは 2 本程度の繊維破断によって, 多くの試験片は破壊に至ることがわかる. また, 構成繊維数が増加すると破断数は増加するにもかかわらず, ゲージ長さが増加してもさほど変化はみられない. この理由は, 構成繊維数の増加にともなって破断繊維の荷重分担能が増加し, その間に複合材内の他の箇所でも繊維破断が生じやすくなってきたと考えられる. もっとも構成繊維が多くなると, 上述のように繊維強度の最小値が低下するので, 複合材強度の絶対値は低下する.

##### 4.2 再帰法による理論分布曲線と実験結果の比較

Table 4 に単繊維引張試験によって推定された繊維強度のワイブル母数を示す. さらにこれらのワイブル母数を用いて解析された再帰法による理論分布曲線を, 実験結果のワイブルプロットとともに Fig. 4 に示す. また図には繊維強度の最小値分布曲線  $H_{MN}^{(2)}$  も併せて示す. このとき, 片側 99.5% の範囲で  $H_{MN}^{(2)} = H_{MN}^{(3)}$  になることが認められたので, 2-plet の生起確率  $H_{MN}^{(2)}$  を強度の理論分布曲線とした. これから寸法の増加とともにプロット点は高強度側で最小値分布  $H_{MN}^{(2)}$  と一致するにもかかわらず, 全体的には直線性を示さず若干左側に膨らんだ曲線性を示す傾向になることがわかる. これは繊維強度の最小値が破壊の多数を支配しているにもかかわらず, 2 番め以降の繊維破断による破壊がいくつか生じるために分布の度合いが低強度側において少々右側に偏るためであると考えられる. 図中実線で示すように, 再帰法による分布曲線はどちらの繊維強度のワイブル母数を使用しても, このような傾向を的確に捕えていることがわかる. すなわち高強度側で最小値分布と一致し, 低強度側に移るとともに分布の傾きが大きくなるような性質



(a) N = 10, G. L. = 10 mm (b) N = 10, G. L. = 30 mm  
(c) N = 30, G. L. = 30 mm

Fig. 3. Relative frequency of total AE counts at tensile-test.

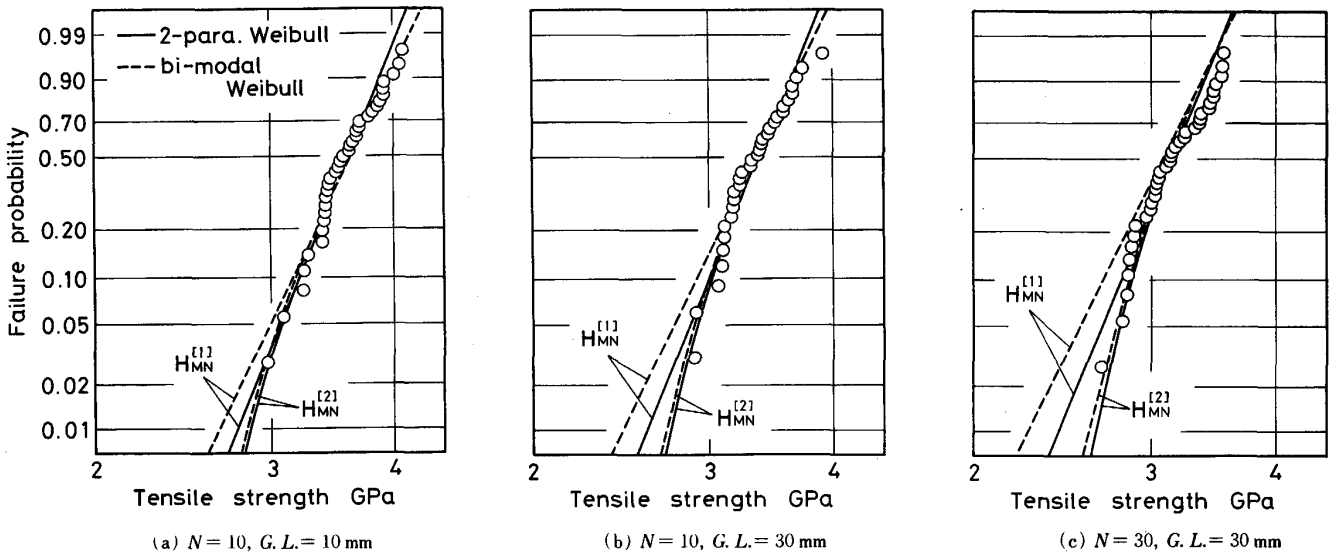


Fig. 4. Weibull plots on tensile strength of composites and distribution curves predicted from recursive technique.

Table 5. Weibull parameters of boron and fibers.

Fiber	G. L. (mm)	2-para. Weibull		Bi-modal Weibull			
		$m$	$\sigma_0$ (GPa)	$m_1$	$\sigma_{01}$ (GPa)	$m_2$	$\sigma_{02}$ (GPa)
Boron	50	22.81	4.24	8.95	4.94	36.40	4.30
SiC	10	4.70	4.24	3.64	4.64	9.41	5.08

G. L. : Gauge Length

をほど良く表していることがわかる。また繊維本数  $N$  が増加すると、最小値分布曲線と強度の累積分布曲線  $H_{MN}^{[2]}$  の一致する箇所が高確率側へ偏っていくことも大きな特徴の一つであり、Fig. 3 で示した繊維の累積破断数の傾向を裏付けることがわかる。以上から、本研究の範囲内において、ボロン繊維強化アルミニウム基複合材料の強度分布評価が再帰法によって可能であると結論される。

#### 4.3 他繊維を用いた再帰法による強度分布曲線の予測

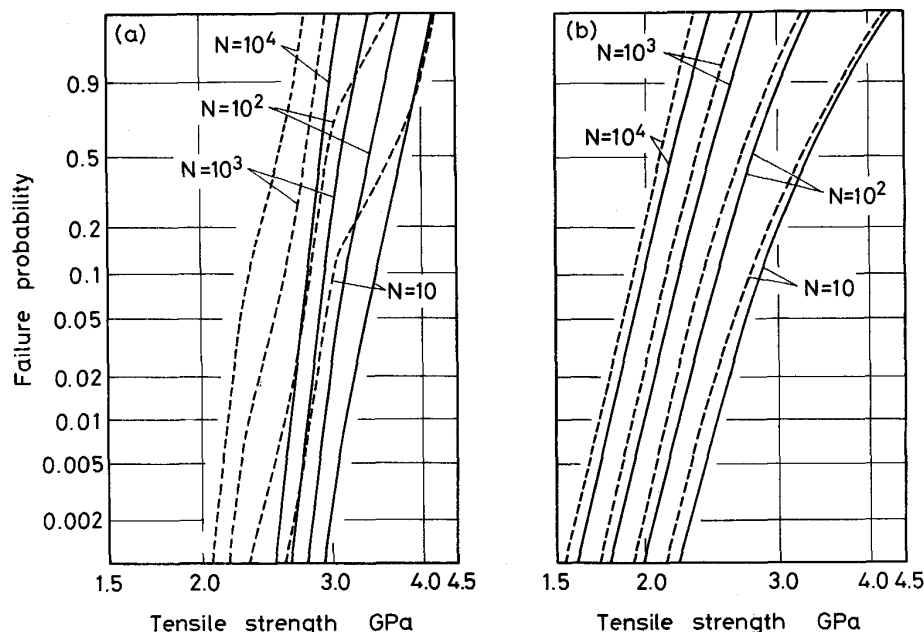
HARLOWとPHOENIX<sup>10)11)</sup>は複合材の強度分布に及ぼす二重モードワイブル分布（文献には“Double Weibull” distributionと記述）の影響について考察し、強度の分布状態についてはほとんど変化しないにもかかわらず、中央値は2母数ワイブル分布で扱った場合より10%程度減少することを示した。彼らの用いたワイブル母数は  $m_1=5$ 、 $m_2=50$  および  $\sigma_{02}/\sigma_{01}=2/3$  と想定した値であり、実験的に求めた値ではない。一方、Fig. 4 で示したように、B-B<sub>4</sub>C 繊維を用いた再帰法では、2母数および二重モードワイブル分布によって予測される分布曲線にそのちがいがさほど表れていない。そこで再帰解に及ぼす強化繊維の2母数および多重モードワイブル分布の影響をさらに検討するために、文献(19)(20)より抜粋

したボロン繊維（被覆なし）およびSiC繊維で得られたワイブル母数に基づいて複合材の強度分布を再帰法によって予測した。このとき、仮の値として無効長さはゲージ長さの10分の1とし、繊維本数を10、10<sup>2</sup>、10<sup>3</sup>および10<sup>4</sup>とした。使用したワイブル母数をTable 5に、再帰法による予測結果をFig. 5にそれぞれ示す。これから  $m_1$  と  $m_2$  の差が大きく異なって推定されたボロン繊維（Fig. 5(a)）では、予測される分布曲線も大きく異なって表れるが、それらの差の小さいSiC繊維（Fig. 5(b)）では両分布曲線による開きはさほど感じられない。また両繊維ともに繊維本数の増加によって確率紙上での両分布曲線の開きに特に変化はみられないことがわかる。以上より、再帰法を利用する際には、強化繊維の種類に応じて強度分布関数の選択に注意を要することがわかる。

## 5. 結 言

ホットプレス法によって繊維本数  $N$  およびゲージ長さ  $L$  がそれぞれ 1)  $N=10 : L=10$  mm, 2)  $N=10 : L=30$  mm, 3)  $N=30 : L=30$  mm になるよう調製された3種類のボロン繊維強化アルミニウム基複合材料 ( $V_f: 0.10\sim 0.15$ ) を用い、強化効果の確率論的評価法である再帰法を用いて複合材の強度分布を定量的に評価した結果、次のことがわかった。

(1) 繊維本数およびゲージ長さの増加によって複合材の平均強度は低下した。これはゲージ長さが増加すると繊維の体積効果（あるいは表面積効果）のために、また本数の増加によって最小値の低下のために強度が低下すると考えられた。一方、強度の変動係数はほぼ一定の



(a) Boron fiber  
(b) SiC fiber  
Fig. 5. Comparison of recursive distribution curves using 2-parameter and bi-modal Weibull distributions.

値を示した。

(2) 2母数および二重モードワイブル分布を繊維強度の分布関数として用い、再帰法による分布曲線を予測した。その結果、どちらの場合も複合材強度のワイブルプロットとはほぼ良好に一致することが認められた。すなわち、本研究の範囲内で、再帰法はボロン繊維強化アルミニウム基複合材料の強度分布評価法に適用可能である。

(3) 再帰解に及ぼす強化繊維の2母数および二重モードワイブル分布の影響を、他の強化用セラミックス繊維について考察した。その結果、繊維本数とはほぼ無関係に繊維のワイブル母数に依存して両分布曲線が大きく異なる場合がみられた。

Appendix

ここでは、要素複合体内で 2-plet が生成する確率事象の余事象を満たす確率  $Q_N^{[2]} (=1-G_N^{[2]})$  を求めるための再帰行列  $Q^{[2]}$  の導出方法について記す。いま、要素複合体内に配列された  $N$  本の繊維の強度を  $X_1, X_2, \dots, X_N$  とし、その分布関数を  $F(\sigma)$  と記すと、これらの繊維の破壊確率は次のような負荷応力  $\sigma$  と応力集中係数  $K_1$  および  $K_2$  に依存した四つの区間に分けることができる。

$$\left. \begin{aligned} Pr\{0 < X_i \leq \sigma\} &= F(\sigma) \quad (\Rightarrow P_1 \text{ と記す}) \\ Pr\{\sigma < X_i \leq K_1\sigma\} &= F(K_1\sigma) - F(\sigma) \quad (\Rightarrow P_1 \text{ と記す}) \\ Pr\{K_1\sigma < X_i \leq K_2\sigma\} &= F(K_2\sigma) - F(K_1\sigma) \quad (\Rightarrow P_2 \text{ と記す}) \\ Pr\{K_2\sigma < X_i\} &= 1 - F(K_2\sigma) \quad (\Rightarrow \bar{P}_3 \text{ と記す}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A-1)$$

ここで、 $P_0$ : 応力  $\sigma$  で繊維  $i$  が破断する確率、 $P_1$ : 応力  $\sigma$  で破断せず繊維  $i$  のどちらか片方の隣りの繊維が破断したとき、応力集中係数  $K_1$  が重畳した応力  $K_1\sigma$

で破断する確率、 $P_2$ : 繊維  $i$  の両隣りの繊維が破断したとき、応力集中係数  $K_2$  が重畳した応力  $K_2\sigma$  で破断する確率、 $\bar{P}_3$ : 応力  $K_2\sigma$  で繊維  $i$  は破断しない確率をそれぞれ意味する。以後、それぞれの区間内に属する繊維を  $I_0, I_1, I_2$  および  $I_3$  型繊維と呼ぶ。さて、 $N$  番めの配列された繊維が破壊確率  $P_j$  で生じることを条件とした条件付確率  $Q_N^{[2]} [j]$  の具体的な再帰的解析手法について記す。

1)  $Q_N^{[2]} [2]$  の場合 (要素  $N$  が  $I_2$  型繊維の場合)  
( $N-1$ ) 番めに配列された繊維要素 (以下、要素 ( $N-1$ ) などと略記する) の破断・未破断に関係なく 2-plet は生成し得ないので、 $Q_N^{[2]} [2]$  は  $Q_{N-1}^{[2]}$  と等確率である。したがって、

$$Q_N^{[2]} [2] = Q_{N-1}^{[2]} \dots\dots\dots (A-2)$$

あるいは

$$Q_N^{[2]} [2, i] = Q_{N-1}^{[2]} [i] \quad (i = 0, 1, 2, 3) \dots\dots\dots (A-3)$$

と書くことができる。

2)  $Q_N^{[2]} [3]$  の場合 (要素  $N$  が  $I_3$  型繊維の場合)  
1) と同様な理由によって、  
 $Q_N^{[2]} [3] = Q_{N-1}^{[2]} (= Q_N^{[2]} [2]) \dots\dots\dots (A-4)$   
となる。

3)  $Q_N^{[2]} [1]$  の場合 (要素  $N$  が  $I_1$  型繊維の場合)  
要素 ( $N-1$ ) が破断しているならば、 $I_1$  型繊維を要素  $N$  に配列させることによって 2-plet が生成する。このような事象確率は  $Q_N^{[2]} [1]$  に含むことはできないので、  
 $Q_N^{[2]} [1, 0] = 0 \dots\dots\dots (A-5)$   
と考える。したがって加法定理より、

$$Q_N^{[2]} [1] = \sum_{i=0}^3 P_i Q_N^{[2]} [1, i]$$

$$= \sum_{i=1}^3 P_i Q_N^{[2]}[1, i] (\because \text{式(A-5) より})$$

$$= \sum_{i=1}^3 P_i Q_{N-1}^{[2]}[i] \dots \dots \dots \text{(A-6)}$$

$$[Q^{[3]}] = \begin{bmatrix} \hat{P}_3 P_2 P_1 P_0 \\ \hat{P}_3 P_2 & P_1 P_0 \\ \hat{P}_3 P_2 & P_1 & P_0 \\ \hat{P}_4 P_3 & P_2 & \hat{P}_1 \\ \hat{P}_3 P_2 & P_1 \\ \hat{P}_4 P_3 & P_2 \\ \hat{P}_5 P_4 & P_3 \end{bmatrix}$$

と記すことができる。

4)  $Q_N^{[2]}[0]$  の場合 (要素  $N$  が  $I_0$  型繊維の場合)

要素  $(N-1)$  が  $I_3$  型繊維であれば、要素  $(N-2)$  の破断・未破断に関係なく 2-plet は生成し得ないので、

$$Q_N^{[2]}[0, 3] = Q_{N-1}^{[2]}[3] \dots \dots \dots \text{(A-7)}$$

である。要素  $(N-1)$  が  $I_2$  型繊維のとき、要素  $(N-2)$  が未破断状態であれば 2-plet は生じない。したがって、

$$Q_N^{[2]}[0, 2, 0] = 0 \dots \dots \dots \text{(A-8)}$$

$$Q_N^{[2]}[0, 2, i] = Q_{N-1}^{[2]}[2, i] \quad (i = 1, 2, 3) \dots \dots \dots \text{(A-9)}$$

となるので、

$$Q_N^{[2]}[0, 2] = \sum_{i=0}^3 P_i Q_N^{[2]}[0, 2, i]$$

$$= \sum_{i=1}^3 P_i Q_N^{[2]}[0, 2, i] (\because \text{式(A-8) より})$$

$$= \sum_{i=1}^3 P_i Q_{N-1}^{[2]}[2, i] (\because \text{式(A-9) より})$$

$$= \sum_{i=1}^3 P_i Q_{N-2}^{[2]}[i] (\because \text{式(A-3) より})$$

$$= Q_{N-1}^{[2]}[1] (\because \text{式(A-6) より}) \dots \text{(A-10)}$$

と書くことができる。また、 $Q_N^{[2]}[0, 1] = Q_N^{[2]}[0, 0] = 0$  なので、

$$Q_N^{[2]}[0] = \sum_{i=0}^3 P_i Q_N^{[2]}[0, i]$$

$$= P_2 Q_N^{[2]}[0, 2] + \hat{P}_3 Q_N^{[2]}[0, 3]$$

$$= P_2 Q_{N-1}^{[2]}[1] + \hat{P}_3 Q_{N-1}^{[2]}[3] \dots \dots \dots \text{(A-11)}$$

式(A-4) (A-6) (A-11) を行列表示すると次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} Q_N^{[2]}[3] \\ Q_N^{[2]}[1] \\ Q_N^{[2]}[0] \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{P}_2 & P_1 & P_0 \\ \hat{P}_2 & P_1 & 0 \\ \hat{P}_3 & P_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{N-1}^{[2]}[3] \\ Q_{N-1}^{[2]}[1] \\ Q_{N-1}^{[2]}[0] \end{Bmatrix} \dots \dots \dots \text{(A-12)}$$

ただし、 $\hat{P}_2 = P_2 + \hat{P}_3$  である。式(A-12) は、

$$\{Q_N^{[2]}\} = [Q^{[2]}] \{Q_{N-1}^{[2]}\} \dots \dots \dots \text{(A-13)}$$

と書くことができる。すなわち、再帰行列  $[Q^{[2]}]$  は

$$[Q^{[2]}] = \begin{bmatrix} \hat{P}_2 & P_1 & P_0 \\ \hat{P}_2 & P_1 & 0 \\ \hat{P}_3 & P_2 & 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots \text{(A-14)}$$

となる。式(A-4) により  $Q_N^{[2]} = Q_{N+1}^{[2]}[3]$  なので、列ベクトル  $\{Q_{N+1}^{[2]}\}$  の第 1 成分を求めることによって  $Q_N^{[2]}$  を求めることができる。同様な再帰的解析手法によって、5-plet までを対象にした再帰行列が求められる。これを具体的に書き下すと、次のようになる。

$$[Q^{[4]}] = \begin{bmatrix} \hat{P}_4 P_3 P_2 P_1 P_0 \\ \hat{P}_4 P_3 & P_2 P_1 P_0 \\ \hat{P}_4 P_3 & P_2 & P_1 P_0 \\ \hat{P}_4 P_3 & P_2 & P_1 & P_0 \\ \hat{P}_5 P_4 & P_3 & P_2 & \hat{P}_1 \\ \hat{P}_4 P_3 & P_2 & & & P_1 P_0 \\ \hat{P}_4 P_3 & P_2 & & & P_1 & P_0 \\ \hat{P}_5 P_4 & P_3 & & & P_2 & \hat{P}_1 \\ \hat{P}_4 P_3 & P_2 & & & & & P_1 P_0 \\ \hat{P}_4 P_3 & P_2 & & & & & P_1 & P_0 \\ \hat{P}_5 P_4 & P_3 & & & & & P_2 & \hat{P}_1 \\ \hat{P}_6 P_5 & P_4 & & & & & P_3 & \\ \hat{P}_4 P_3 & P_2 & & & & & P_1 & \\ \hat{P}_5 P_4 & P_3 & & & & & P_2 & \\ \hat{P}_6 P_5 & P_4 & & & & & P_3 & \\ \hat{P}_7 P_6 & P_5 & & & & & P_4 & \end{bmatrix}$$

$$[Q^{[5]}] = \begin{bmatrix} \hat{P}_5 P_4 P_3 P_2 P_1 P_0 \\ \hat{P}_5 P_4 & P_3 P_2 P_1 P_0 \\ \hat{P}_5 P_4 & P_3 & P_2 P_1 P_0 \\ \hat{P}_5 P_4 & P_3 & P_2 & P_1 P_0 \\ \hat{P}_6 P_5 & P_4 & P_3 & P_2 & P_1 \\ \hat{P}_5 P_4 & P_3 & & & P_2 P_1 P_0 \\ \hat{P}_5 P_4 & P_3 & & & P_2 & P_1 P_0 \\ \hat{P}_5 P_4 & P_3 & & & P_2 & P_1 & P_0 \\ \hat{P}_6 P_5 & P_4 & & & P_3 & P_2 & P_1 \\ \hat{P}_5 P_4 & P_3 & & & P_2 & & P_1 P_0 \\ \hat{P}_5 P_4 & P_3 & & & P_2 & & P_1 & P_0 \\ \hat{P}_6 P_5 & P_4 & & & P_3 & & P_2 & \hat{P}_1 \\ \hat{P}_5 P_4 & P_3 & & & P_2 & & P_1 & P_0 \\ \hat{P}_6 P_5 & P_4 & & & P_3 & & P_2 & \hat{P}_1 \\ \hat{P}_7 P_6 & P_5 & & & P_4 & & P_3 & \hat{P}_2 \\ \hat{P}_5 P_4 & P_3 & & & P_2 & & P_1 & P_0 \\ \hat{P}_6 P_5 & P_4 & & & P_3 & & P_2 & \hat{P}_1 \\ \hat{P}_6 P_5 & P_4 & & & P_3 & & P_2 & P_1 \\ \hat{P}_7 P_6 & P_5 & & & P_4 & & P_3 & \hat{P}_2 \\ \hat{P}_8 P_7 & P_6 & & & P_5 & & P_4 & \\ \hat{P}_5 P_4 & P_3 & & & P_2 & & P_1 & \\ \hat{P}_6 P_5 & P_4 & & & P_3 & & P_2 & \\ \hat{P}_7 P_6 & P_5 & & & P_4 & & P_3 & \\ \hat{P}_8 P_7 & P_6 & & & P_5 & & P_4 & \\ \hat{P}_9 P_8 & P_7 & & & P_6 & & P_5 & \end{bmatrix}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} P_i &= F(K_i \sigma) - F(K_{i-1} \sigma) \\ \hat{P}_i &= 1 - F(K_{i-1} \sigma) \\ \bar{P}_i &= F(K_i \sigma) \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, 3, \dots)$$

であり、応力集中係数  $K_i$  は LLS (Local Load Sharing) 則を用いるため、

$$K_i = 1 + \frac{i}{2} \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

となる。また空白部は 0 を示す。

## 文 献

- 1) C. ZWEBEN: *Eng. Frac. Mech.*, **4** (1972), p. 1
- 2) 福田 博: *材料システム*, **4** (1985), p. 13
- 3) K. P. OH: *J. Comp. Mater.*, **13** (1979), p. 311
- 4) B. W. ROSEN: *AIAA, J.*, **2** (1964), p. 1985
- 5) C. ZWEBEN: *AIAA, J.*, **6** (1968), p. 2325
- 6) C. ZWEBEN and B. W. ROSEN: *J. Mech. Phys. Solids*, **18** (1970), p. 189
- 7) H. FUKUDA, T. W. CHOU and K. KAWATA: *Composite Materials, Mechanics, Mechanical Properties & Fabr.*, Proc. Japan-U. S. Conference, Tokyo (1981), p. 181
- 8) P. M. SCOP and A. S. ARGON: *J. Comp. Mater.*, **1** (1967), p. 92
- 9) P. M. SCOP and A. S. ARGON: *J. Comp. Mater.*, **3** (1969), p. 30
- 10) D. G. HARLOW and S. L. PHOENIX: *Int. J. Frac.*, **17** (1981), p. 347
- 11) D. G. HARLOW and S. L. PHOENIX: *Int. J. Frac.*, **17** (1981), p. 601
- 12) R. L. SMITH: *Proc. R. Soc. Lond., Ser.*, **372** (1980), p. 539
- 13) S. L. PHOENIX and R. L. SMITH: *Int. J. Solids Struct.*, **19** (1983) **6**, p. 479
- 14) S. B. BATDORF: *J. Rein. Plas. Comp.*, **1** (1982), p. 153
- 15) たとえば, S. B. BATDORF and R. GHAFARIAN: *J. Rein. Plas. Comp.*, **1** (1982), p. 165
- 16) たとえば, M. A. WRIGHT and J. L. WILLS: *J. Mech. Phys. Solids*, **22** (1974), p. 161
- 17) 松尾陽太郎, 村田博隆: *材料*, **33** (1984), p. 1545
- 18) たとえば, K. N. STREET and J. P. FERTE: *Proc. Int. Conf. Compo. Mater.*, **1** (1976), p. 137
- 19) 合田公一, 福永秀春, 東原昭仁: *日本機械学会論文集 (A編)*, **52** (1986), p. 1848
- 20) K. GODA and H. FUKUNAGA: *J. Mater. Sci.*, **21** (1986), p. 1848
- 21) 落合庄治郎, 安部研吾, 長村光造: *日本金属学会誌*, **48** (1984), p. 1021
- 22) 三浦維四, 浅岡憲三: *日本金属学会誌*, **37** (1973), p. 1212
- 23) A. KELLY and W. R. TYSON: *J. Mech. Phys. Solids*, **13** (1965), p. 329
- 24) 合田公一, 糸永真須美, 福永秀春: *日本機械学会論文集 (A編)*, **54** (1988), p. 753