

© 1988 ISIJ

## 論 文

## 任意形状領域における熱と流れの数値解析

高 谷 幸 司\*

## A Numerical Analysis of Heat and Fluid Flow on Arbitrarily Shaped Region

Kouji TAKATANI

## Synopsis :

It is difficult to conform the discretization points to boundaries of the arbitrarily shaped region on the finite difference method of rectangular coordinate system. In this study the discretization method based on Gauss's divergence theorem is improved to deal with the arbitrarily shaped region in Eulerian method, and the present method is able to use the effective numerical techniques that have been developed on rectangular coordinate system.

As numerical examples, steady heat conduction problem is calculated and compared with the solution of FEM, and some trials are made on analysis of problems in incompressible fluid flow. The present method is found to be useful to solve numerically partial differential equations derived from mass, heat and momentum balances.

**Key words :** fluid flow ; heat conduction ; Gauss's divergence theorem ; finite difference method ; discretization ; simulator ; computer.

## 1. 緒 言

鉄鋼プロセスにおいて、伝熱、物質移動および反応を伴う流動現象を把握することは、そのプロセスの高効率化やスケールアップ技術の確立等に大きく貢献する。そして、実プロセスにおける計測、模型実験および数値計算が、その解明に力を発揮し、とりわけ、数値計算は、計算機の処理能力の目ざましい進展により、有力な手段となりつつある。そして、これらの流動現象の数値解析法として、直交格子を用いる差分法が古くから用いられてきており、その蓄積された計算手法は、膨大な量になっている。しかし、直交格子を用いる差分法では、計算領域の境界形状が複雑で、格子点と境界点とが一致しない場合、その処理は困難であり、これが差分法における最大の欠点であった。一方、任意な境界形状を処理可能な数値計算法として、有限要素法<sup>1)</sup>、直接差分法<sup>2)</sup>および座標変換法<sup>3)</sup>等がある。有限要素法は構造解析の分野で発達し、近年、伝熱や流体解析分野への応用がなされてきた<sup>4)</sup>。しかし、この分野での計算の安定化手法等は、差分法の分野での研究が一步先んじており、今後の発展

に期待するところが大きい。直接差分法は、伝熱解析の分野で利用され、十分実用に耐える手法であるが、計算精度向上のためには、格子生成に多少の制約がある<sup>5)</sup>。座標変換法は、流体解析の分野で急速に発展し、実領域を計算領域に座標変換し、変換領域で基礎方程式を解く手法である。今後、流体解析の分野で最も期待される方法であるが、変換された基礎式の物理的意味を明確にすることが、今後の課題である。

本報告では、衝撃塑性学の分野で考案されたガウスの発散定理に基づくラグランジュ座標上の差分法<sup>6)</sup>をオイラー座標上で使用し、従来の差分法で蓄積されてきた手法が利用可能なように改良を行った。そして、これまでの任意境界形状を処理可能な数値計算法との比較を行い、その適用例として、熱伝導方程式を選び有限要素法による解と比較検討を行った。また、流体解析への応用を図り、これまでの差分法による流体解析手法と融合し、任意な境界形状を処理可能な流体解析手法を提示する。

## 2. 基本 原 理

ガウスの発散定理<sup>7)</sup>に従えば、空間に定義される物理

昭和 61 年 10 月本会講演大会にて発表 昭和 62 年 6 月 12 日受付 (Received June 12, 1987)

\* 住友金属工業(株) 総合技術研究所 (Technical Research Laboratories, Sumitomo Metal Industries, Ltd., 16 Oaza-Sunayama Hasaki-machi Kashima-gun Ibaraki pref. 314-02)

量  $\vec{U}$  の発散は、次式で算出される。

$$\nabla \cdot \vec{U} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \vec{U} \cdot \vec{n} dS \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $S$ : 閉曲面、 $V$ :  $S$  で囲まれる領域の体積、 $\vec{n}$ : 領域の内部より外部に向かう  $S$  上の法線ベクトル (Fig. 1 参照)

式(1)を有限差分表示するに際し、これから解こうとする方程式系の物理的意味を念頭に置いて行うことが重要である。ここでは、後述する非圧縮性流体における連続の式を例にとつて説明する。非圧縮性流体の連続の式は、流速を  $\vec{U} = (U_x, U_y, U_z)$  とし、次式で示される。

$$\nabla \cdot \vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

差分化に使用するセルを、Fig. 2 a) に示す。  $m$  個の平面から成る多面体とすると、セル内部における発散  $D$  は、次式で示される。

$$D = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^m (U_{xi} \cdot S_{xi} + U_{yi} \cdot S_{yi} + U_{zi} \cdot S_{zi}) \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $V$ : 多面体の体積、 $U_{ki}$ : 面  $i$  上の流速の  $k$

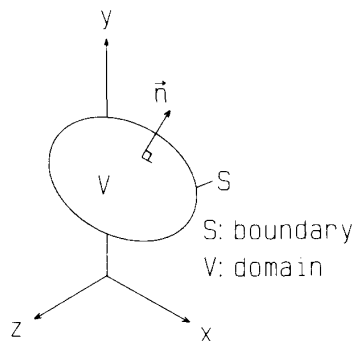
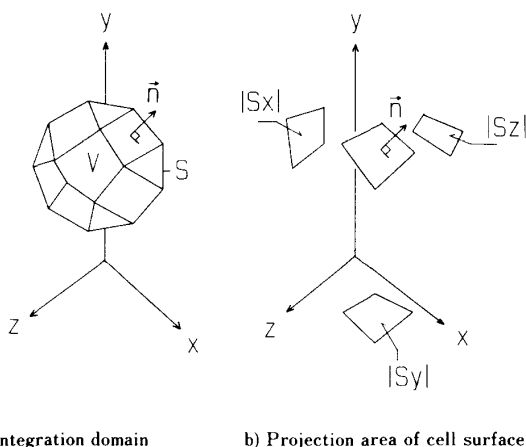


Fig. 1. Integration domain for 3-dimensional analysis.



a) Integration domain b) Projection area of cell surface  
Fig. 2. Integration domain for finite difference form.

方向成分、 $S_{ki}$ : 面  $i$  の  $k$  軸に垂直な平面へ正射影した面積を絶対値とし、 $\vec{n}$  が  $k$  軸の正の向きに対し、鋭角のとき正、鈍角のとき負の符号が与えられる (Fig. 2 b) 参照)。

また、式(3)は、各成分ごとにも成立する。例えば、

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^m (U_{xi} \cdot S_{xi})$$

となる。つまり、式(3)の右辺第1項は、セルに流入流出する  $x$  方向の収支を、第2項、第3項は、 $y$  方向と  $z$  方向の収支を表しており、任意な形状の多面体セルにおける物質収支を表現しているにすぎない。

換言すれば、基礎方程式の物理的意味を考慮して、差分セルの体積、符号を考えたセルを囲む面の投影面積を用いて、物質、運動量およびエネルギーの収支を表現すれば良い。

### 3. 従来法との比較

任意な境界形状を処理可能な数値計算法として、構造力学の分野で発達し、近年、流体解析への応用がなされてきた有限要素法がある。また、最近、座標変換法が、流体解析の分野で急速に発展し、今後、この分野で主流を占めると考えられる。ここでは、本法とこれら二つの方法とを2次元領域における発散  $D$  の離散化表示を例に比較を行う。

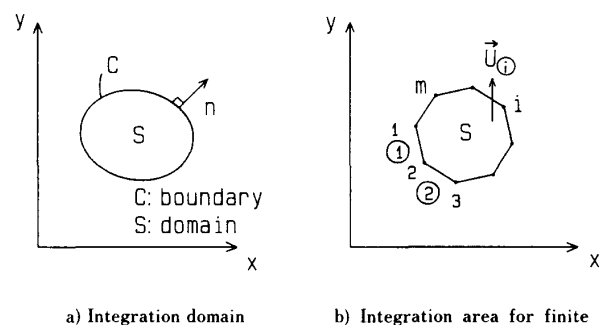
#### 3.1 ガウスの発散定理に基づく差分表示 (2次元領域)

2次元領域におけるガウスの発散定理により、 $\vec{U}$  の発散は、次式で表現される。

$$\nabla \cdot \vec{U} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \int_C (U_x dx - U_y dy) \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $C$ : 閉曲線、 $S$ :  $C$  で囲まれる領域の面積、 $\int_C$ : 反時計回り方向の線積分 (Fig. 3 a) 参照)

式(4)を Fig. 3 b) に示す  $m$  角形から成るセルについて、有限差分表示すると、セル中心における発散  $D$  は、次式で表される。



a) Integration domain b) Integration area for finite difference form

Fig. 3. Integration domain for 2-dimensional analysis.

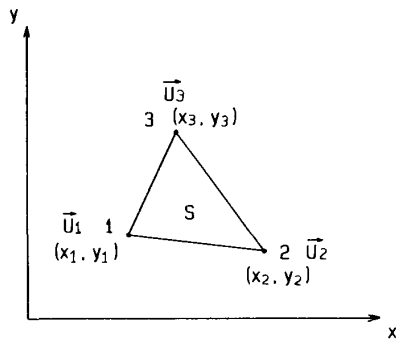


Fig. 4. Triangular element for FEM.

$$D = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^m (U_{x(i)} \cdot l_{x(i)} - U_{y(i)} \cdot l_{y(i)}) \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $S$ :セルの面積、 $U_{k(i)}$ :辺  $(i)$ 上の流速の  $k$  方向成分、 $(x_i, y_i)$ :セルの頂点  $i$ の座標、 $l_{x(i)} = y_{i+1} - y_i$ 、 $l_{y(i)} = x_{i+1} - x_i$

3.2 有限要素法との比較

有限要素法において、最も基本的な2次元シンプレックス要素を用いる。要素の接点番号を Fig. 4 に示すように与えると、要素内部における流速は、次式で表現される<sup>8)</sup>。

$$U_x = \sum_{i=1}^3 N_i \cdot U_{xi}, U_y = \sum_{i=1}^3 N_i \cdot U_{yi} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y) / S \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad b_1 = y_2 - y_3, \quad c_1 = x_3 - x_2$$

$$a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad b_2 = y_3 - y_1, \quad c_2 = x_1 - x_3$$

$$a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad b_3 = y_1 - y_2, \quad c_3 = x_2 - x_1$$

$S$ :要素の面積

式(6)を用いて、要素内の発散  $D$  を求めると、次式を得る。

$$D = \frac{1}{2S} \sum_{i=1}^3 (b_i \cdot U_{xi} + c_i \cdot U_{yi})$$

$$= \{ U_{x12}(y_2 - y_1) + U_{x23}(y_3 - y_2) + U_{x31}(y_1 - y_3) \} / S$$

$$- \{ U_{y12}(x_2 - x_1) + U_{y23}(x_3 - x_2) + U_{y31}(x_1 - x_3) \} / S$$

$$\dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $U_{xij} = (U_{xi} + U_{xj})/2$ ,  $U_{yij} = (U_{yi} + U_{yj})/2$

一方、式(5)において、要素の辺上の流速をその辺の両端にある接点上の流速の平均値で表せば、式(7)が直接導かれ、本法と有限要素法とが、Fig. 4 に示したようなメッシュについては等価な離散化であることがわかる。

3.3 座標変換法との比較

座標変換法は、THOMPSON<sup>9)</sup> によつて境界形状に沿つた座標格子をポアソン方程式を解くことによつて生成する

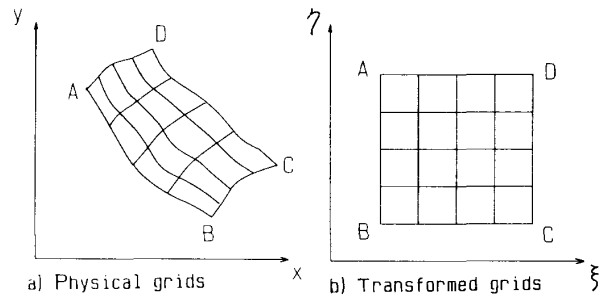


Fig. 5. Physical and transformed grids.

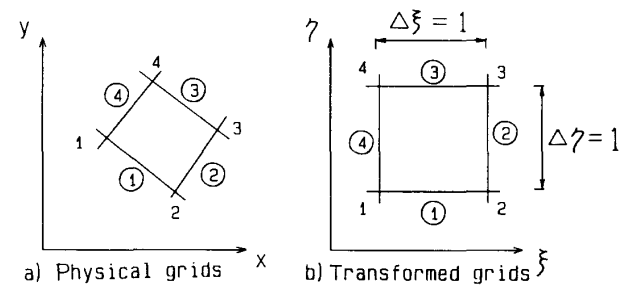


Fig. 6. Finite-difference grids.

方法が開発され、実用的な手法となつた。その概要を以下に簡単に説明する。

Fig. 5 に示す写像平面(計算平面)上の正方形格子点  $(\xi, \eta)$  は、実平面上の曲線座標格子点  $(x, y)$  に1対1に対応づけられるように生成されている。解析領域を実平面から写像平面に変換すると、物理現象の支配方程式の独立変数を  $(x, y)$  から  $(\xi, \eta)$  に変換することになる。その変換式は、ある物理量  $\vec{U}$  に対し、保存形で表示すると次式で示される。

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} = \{ (y_\eta U_x)_\xi - (y_\xi U_x)_\eta \} / J$$

$$\frac{\partial U_y}{\partial y} = \{ (x_\xi U_y)_\eta - (x_\eta U_y)_\xi \} / J \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$  で定義されるヤコビアン、 $( )_\xi = \partial( ) / \partial \xi$ ,  $( )_\eta = \partial( ) / \partial \eta$

式(8)の変換式を用いて、基礎方程式を計算平面に写像して解くことにより、複雑な境界形状を処理することができる。

次に、この座標変換法と本法との比較を行う。式(8)において、計算平面上の格子間隔  $\Delta \xi, \Delta \eta$  を1とおいて、Fig. 6における差分セル内の発散  $D$  を求めると、次式を得る。

$$D = \{ (y_\eta U_x)_{(2)} - (y_\eta U_x)_{(4)} - (y_\xi U_x)_{(3)} + (y_\xi U_x)_{(1)}$$

$$+ (x_\xi U_y)_{(3)} - (x_\xi U_y)_{(1)} - (x_\eta U_y)_{(2)} + (x_\eta U_y)_{(4)} \} / J$$

$$= \{ U_{x(1)}(y_2 - y_1) + U_{x(2)}(y_3 - y_2)$$

$$+ U_{x(3)}(y_4 - y_3) + U_{x(4)}(y_1 - y_4) \} / J$$

$$- \{ U_{y①}(x_2 - x_1) + U_{y②}(x_3 - x_2) + U_{y③}(x_4 - x_3) + U_{y④}(x_1 - x_4) \} / J \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $J$ は面積変換を表すヤコビアンで、セルの面積を意味する。

この式(9)は、式(5)から直接導くことができ、本法と保存形表示による座標変換法とが、全く等価であることが理解できる。

### 4. 適用例

本法の適用例として定常熱伝導および非圧縮性流体解析を取りあげ、定常熱伝導解析では、有限要素法との比較を行い、流体解析では、従来の差分法で開発されてきた手法の利用法を提示する。

#### 4.1 定常熱伝導解析への適用

Fig. 7 a) に示す、定常熱伝導問題を上述の差分法を用いて解き、有限要素法による解と比較検討を行う。まず、次式で示される2次元平板における定常熱伝導方程式の差分化を以下に述べる。

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

式(10)を離散化するには、格子点5における温度  $T$  に関する2階の微係数が必要である。Fig. 7 b) に示す差分格子において、格子点5の周囲にあるセルの内部(I, II, III, IVで示す.)における温度  $T$  の1階の微係数を求め、格子点5における2階の微係数を次式( $x$ 方向のみ記述)で算出すれば良い。また、差分表現は、座標変換法で示した記号をできるだけ使用することにする。

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_5 = \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_I (y_2 - y_4) + \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{II} (y_6 - y_2) \right\} / J$$

$$\dots\dots\dots (11)$$

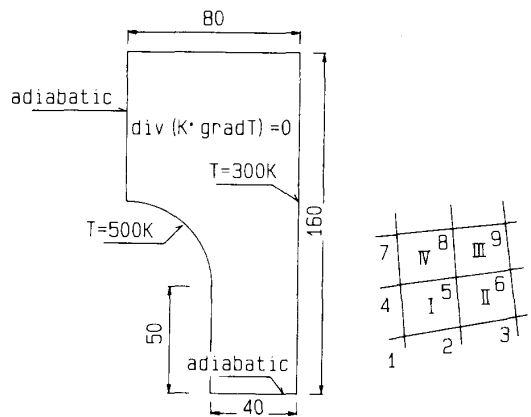
ここに、 $J = (J_I + J_{II} + J_{III} + J_{IV}) / 2$

前述の方法に従い、上式を差分化し、格子点5における温度  $T_5$  について解けば、格子点5のまわりについての9点差分表示を得る。その解法には、ガウス・ザイデル法<sup>10)</sup>やSOR法<sup>10)</sup>が利用できる。

本法と有限要素法による計算結果<sup>11)</sup>との比較をFig. 8に示す。図から明らかなように、本法は、有限要素法とほぼ同等の結果が得られ、十分実用に耐えることが確認できた。また、有限要素法では、温度勾配が急になると予想される部分のメッシュを小さくする必要があり、メッシュ分割にある程度の熟練が必要であるが、本法では、差分セルが凹な多角形にならないように注意を要するだけである。

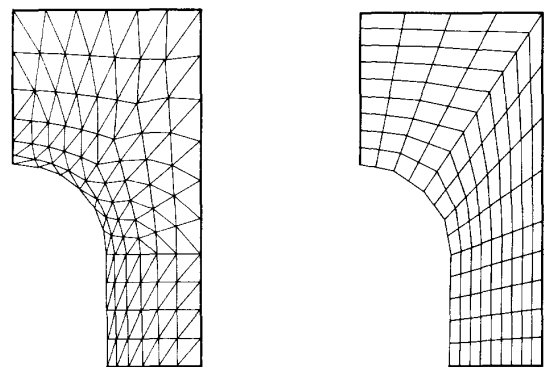
#### 4.2 非圧縮性流体への適用

ここでは非圧縮性流体への応用を示し、これまで蓄積されてきた直交格子上の差分法による流体解析手法の利

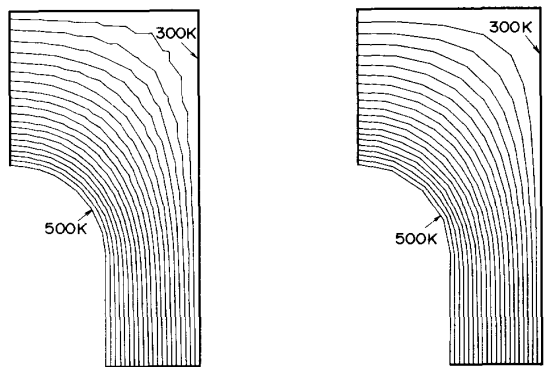


a) Steady heat-conduction problem      b) Grid numbering

Fig. 7. Steady heat-conduction problem and grids.



(a) Grid system



(b) Contours of temperature

Finite Element Method      Finite Difference Method

Fig. 8. Comparison of the finite difference and finite element methods.

用を示す.

4.2.1 基礎方程式

取りあつかう流体は、非圧縮性で温度変化に伴う密度変化に対し、Boussinesq 近似<sup>12)</sup> が成り立つとすると、物質、運動量およびエネルギー収支より、以下の支配方程式を得る.

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \vec{U}) = -\nabla P + \nu \nabla^2 \vec{U} + \beta(T_0 - T)\vec{g} \dots\dots\dots (14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (T\vec{U}) = \nabla \cdot (\alpha \nabla T) \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 $P$ : 圧力を密度で除した値、 $\nu$ : 動粘性係数、 $\beta$ : 体積膨張係数、 $\vec{g}$ : 重力加速度、 $\alpha$ : 熱拡散率、 $T_0$ : 基準温度

4.2.2 差分表示

式(13), (14), (15)を差分表示するに際し、Fig. 9 a) に示す 4 辺形セルを用い、格子点上に流速、セル中心に圧力や温度等を定義するスタガード格子を採用する. 以下に、式(14), (15)の各項の差分表示 ( $x$  方向のみ) を示す.

(1) 圧力項 (格子点)

$$\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_0 = \frac{P_{1(2)}(y_2 - y_1) + P_{2(3)}(y_3 - y_2) + P_{3(4)}(y_4 - y_3) + P_{4(1)}(y_1 - y_4)}{J_0} \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 $P_{(i,j)} = (P_i + P_j)/2$

(2) 粘性項 (格子点)

(11)式と同形式のため省略.

(3) 移流項 (格子点)

この項については、Fig. 9 b) において、格子点 0 の回りを 1→2→3→4→1 の順に積分を実行する. この場合、次式で示される座標変換法における通常の表示式から得られる差分表示と一致する. (Appendix 1 参照)

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{(y_\eta U_{x\xi} - y_\xi U_{x\eta})}{J} \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{\partial U_y}{\partial y} = \frac{(x_\xi U_{y\eta} - x_\eta U_{y\xi})}{J}$$

ここでは、式(17)を用いて移流項を差分化する.

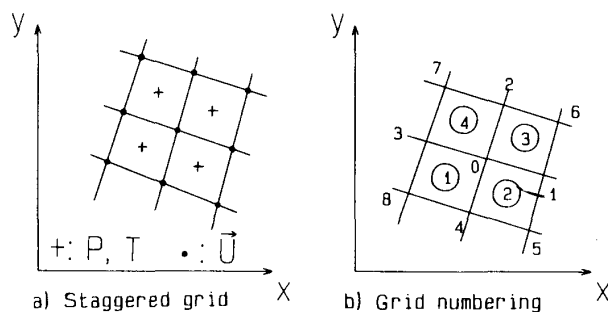


Fig. 9. Grid system for present method.

$$U_x(\frac{\partial U_x}{\partial x}) + U_y(\frac{\partial U_y}{\partial y}) = \{U_x(y_\eta U_{x\xi} - y_\xi U_{x\eta}) + U_y(x_\xi U_{y\eta} - x_\eta U_{y\xi})\}_0 / J_0 = (U_\xi^* U_{x\xi} + U_\eta^* U_{x\eta})_0 \dots\dots\dots (18)$$

ここに、 $U_\xi^* = (U_{x y_\eta} - U_{y x_\eta}) / J$ ,  $U_\eta^* = (U_{y x_\xi} - U_{x y_\xi}) / J$  であり、 $\xi, \eta$  軸方向の流速を意味する. (Appendix 2 参照)

この流速  $U_\xi^*$ ,  $U_\eta^*$  の符号を調べて風上差分を行えば良い. 1次精度<sup>13)</sup> および3次精度<sup>14)</sup> の風上差分を用いて、式(18)を差分化すると次のようになる.

[1次精度]

$$\{U_\xi^* (U_{x1} - U_{x3}) - |U_\xi^*| (U_{x1} - 2U_{x0} + U_{x3}) + U_\eta^* (U_{x2} - U_{x4}) - |U_\eta^*| (U_{x2} - 2U_{x0} + U_{x4})\} / 2 \dots\dots\dots (19-a)$$

[3次精度]

$$U_\xi^* |U_{x5} - U_{x3} + 8(U_{x1} - U_{x3}) + U_{x7}| / 12 + |U_\xi^*| \{U_{x5} + U_{x7} - 4(U_{x1} + U_{x3}) + 6U_{x0}\} / 4$$

$$U_\eta^* |U_{x6} - U_{x4} + 8(U_{x2} - U_{x4}) + U_{x8}| / 12 + |U_\eta^*| \{U_{x6} + U_{x8} - 4(U_{x2} + U_{x4}) + 6U_{x0}\} / 4 \dots\dots\dots (19-b)$$

(4) 移流項 (セル中心)

セル中心で定義される物理量  $f$  (温度  $T$  に代表される) の移流項については、保存型の収支式とし、発散  $D$  (厳密に 0 とはならない) の項を補正することにより、収支精度が向上する. つまり、発散  $D$  は、圧縮性流体の連続の式より、次式で評価される.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho U_y)}{\partial y} = \rho + \rho \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) = 0$$

$$\therefore D = -\frac{\rho}{\rho} \dots\dots\dots (20)$$

ただし、 $\rho$ : 物質導関数

一方、保存型の収支式を変形し、式(20)を代入すると、次式を得る.

$$\frac{\partial(\rho f)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_x f)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho U_y f)}{\partial y} = \rho \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(U_x f)}{\partial x} + \frac{\partial(U_y f)}{\partial y} - f D \right\} \dots\dots\dots (21)$$

式(21)の移流項に風上差分を適用すれば、確実に収支のとれた差分化が行える.

(5) 拡散項 (セル中心)

前述の粘性項と同形式で、格子点の差分表現をセル中心に変換すれば良い.

4.2.3 解法

従来の直交格子上で蓄積されてきた流体解析に関する

手法は、本法の差分形式においても利用可能であり、その中でも SMAC 法<sup>15)</sup>、SOLA 法<sup>16)</sup>は有用であるが、ここでは、SMAC 法の利用法について述べる。

SMAC 法は、Fig. 10 に示す差分格子を用いて開発されたものであるが、本法の差分格子 (Fig. 9) での利用が可能である。以下にその利用法のみを示す。

- 1)  $\bar{U}$  を求める。……式(22)
- 2)  $\phi$  を求める。……式(23)(SOR 法による収束計算)
- 3)  $\bar{U}^{n+1}$  を求める。……式(24)
- 4)  $P^{n+1}$  を求める。……式(25)
- 5) 以下繰り返す。

$$\frac{\bar{U} - \bar{U}^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\bar{U} \bar{U})^n = -\nabla P^n + \nu \nabla^2 \bar{U}^n + \beta(T_0 - T)^n g \quad \dots\dots (22)$$

$$\Delta^2 \phi = \bar{D} \quad \dots\dots (23)$$

ここに、 $\bar{D} = \partial \bar{U}_x / \partial x + \partial \bar{U}_y / \partial y$

$$\bar{U}^{n+1} = \bar{U} - \nabla \phi \quad \dots\dots (24)$$

$$P^{n+1} = P^n + \phi / \Delta t \quad \dots\dots (25)$$

ただし、 $\phi$  は、式(24)で定義されるポテンシャル。

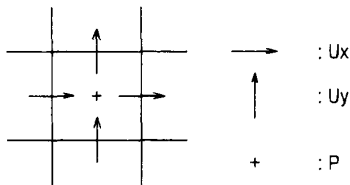


Fig. 10. Staggered grid system for SMAC and SOLA methods.

また、熱流体の解析では、式(15)を次のように差分化して、 $T^{n+1}$  を求める。

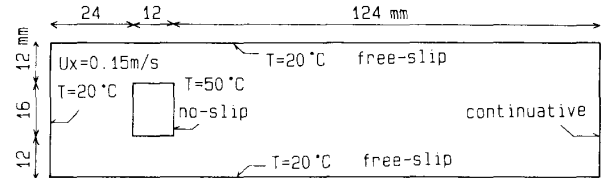
$$(T^{n+1} - T^n) / \Delta t + \nabla \cdot (\bar{U} T)^{n+1} = \alpha \nabla^2 T^{n+1} \quad \dots\dots (26)$$

上式は、陽的には解けないため、収束計算となり、SOR 法を適用する。

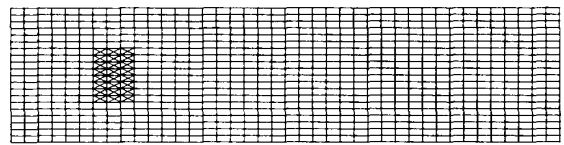
以上に示した手法は、原報と比較して、差分格子が異なるだけで、基本的に全く同じであり、境界条件の設定等については、原報を参照願いたい。また、流体解析手法の比較は文献 17) が詳しい。

4.2.4 解析例

非圧縮性流体の解析例として、角柱まわりのカルマン渦の計算<sup>18)</sup>と強制対流伝熱とをカップリングした。計算条件および差分格子は、Fig. 11 に示すとおりで、計

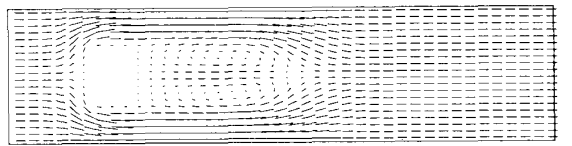


a) Boundary conditions

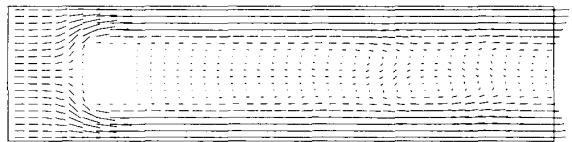


b) Grids

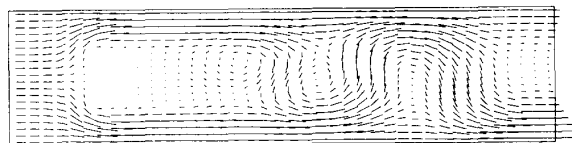
Fig. 11. Boundary conditions and grids for forced convection.



t=0.4sec

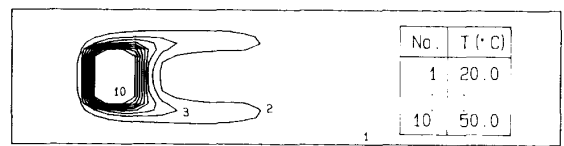


t=2.4sec

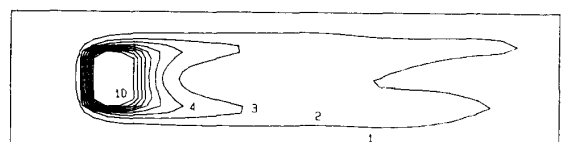


t=3.2sec

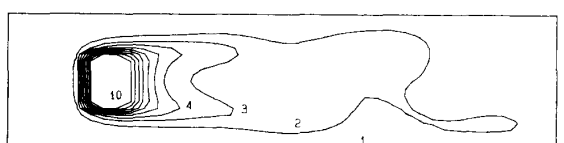
a) Velocity vectors



t=0.4sec



t=2.4sec



t=3.2sec

b) Contour lines of temperature

Fig. 12. Velocity vectors and temperature obtained by SMAC method.

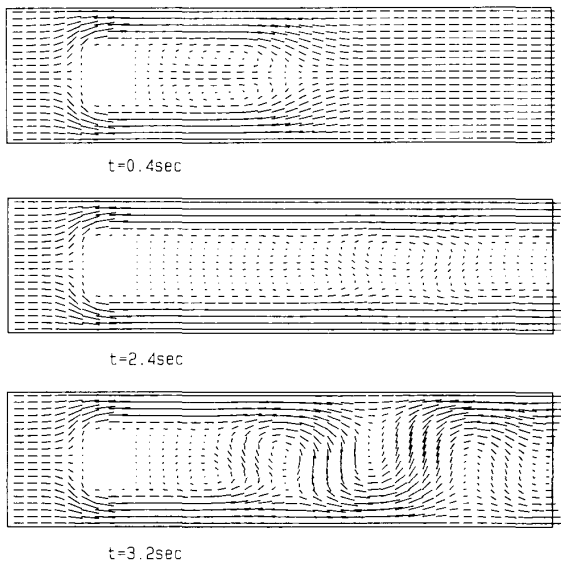


Fig. 13. Velocity vectors obtained by SOLA method.

算手法は SMAC 法を用い、運動方程式の移流項については、3次精度の風上差分を用いた。本法と SOLA 法を用いた差分法の計算結果を Fig. 12, 13 に示す。各ステップにおいて、渦発生に位相差が見られるが、原報と同等の結果が得られている。また、温度分布についても、安定した解が得られている。

4.3 充填層内における流動

充填層内の流動現象は、前述した非圧縮性流体の運動とともに、鉄鋼プロセスでは、ひんぱんに直面する問題である。ここでは、高炉内のガス流れを例にとりあげる。

4.3.1 基礎式および解析法

充填層内の流体の通気抵抗は、ERGUN 式<sup>19)</sup>により表現され、この抵抗力を用いると、運動方程式は、次式で表される。

$$\partial \vec{G} / \partial t = -\nabla P - (F_1 + F_2 |\vec{G}|) \vec{G} \dots\dots\dots (27)$$

ここに、

$$F_1 = 150 \cdot \mu \frac{(1-\epsilon)^2}{\epsilon^3 (\phi_p d_p)^2 \rho}$$

$$F_2 = 1.75 \frac{1-\epsilon}{\epsilon^3 \phi_p d_p \rho}$$

$\vec{G}$ : 質量速度  $P$ : 圧力  $\mu$ : 粘性係数  $\rho$ : 密度  
 $\epsilon$ : 空隙率  $\phi_p$ : 粒子形状係数  $d_p$ : 粒子径

上式と質量速度に関する連続の式  $\nabla \cdot \vec{G} = 0$  とを連立させて解けばよく、前述の SMAC 法等が利用できる。

4.3.2 解析例

実際的な問題として、高炉内のガス流れをとりあげる。

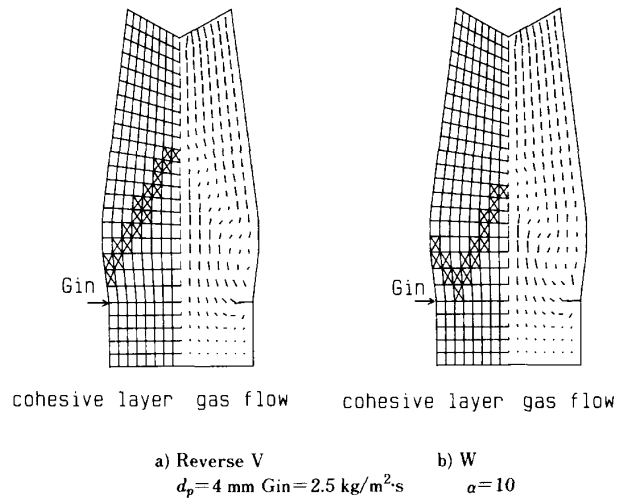


Fig. 14. Effect of cohesive layer on gas flow.

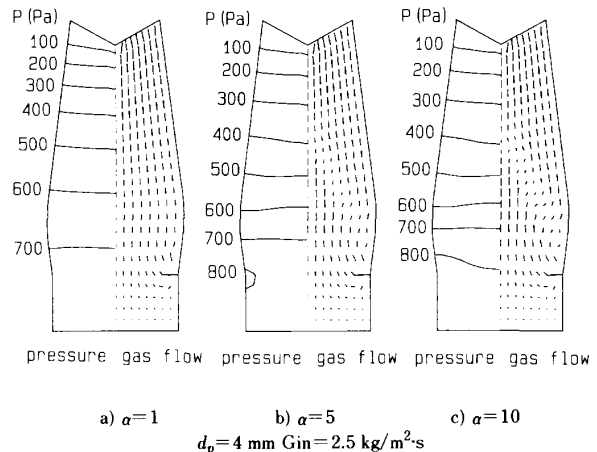


Fig. 15. Effect of gas flow resistance in cohesive layer on gas flow.

高炉内の充填層は層状に装入されるコークスと鉬石とから成り、鉬石の溶解により層に垂直な方向の通気抵抗が大なる融着帯が存在し、ガス流れに大きく作用する。そこで、融着帯の層に水平な方向の通気抵抗に対する垂直方向の通気抵抗の比を  $\alpha$  として通気抵抗の異方性を表現し<sup>20)</sup>、融着帯の形状と通気抵抗の比  $\alpha$  の影響を検討した。ただし、炉体形状は模型実験を想定し、炉高 1000 mm、炉口径 141 mm、炉腹径 215 mm、炉底径 198 mm の大きさとした。

Fig. 14 に融着帯形状が、逆 V と W 型の場合の差異を示す。融着帯内では、層に水平な方向の速度成分が大きくなり、融着帯近傍で、ガス流れが大きく湾曲し、融着帯形状の影響が非常に大きいことがわかる。また、Fig. 15 には、逆 V 型の融着帯形状の場合について、通気抵抗の比  $\alpha$  の影響を示す。  $\alpha$  が大きくなるに従い、融着帯近傍での等圧線の間隔が小さくなり、圧力損失が増加し

ているのがわかる。なお、炉上部で、等圧線の間隔が小さくなるのは、炉体形状により、炉上部でのガス流速が増すためである。

## 5. 結 言

任意形状領域の処理が可能なガウスの発散定理に基づく差分法を開発し、有限要素法および座標変換法における離散表示との等価性を示すとともに、定常伝熱および非圧縮性熱流体への適用を試み、本法の有用性を示した。

### Appendix 1

ある物理量を  $f$  とし、2次元場におけるガウスの発散定理に基づき  $x$  方向の微係数を求める。Fig. 9 b) における格子点 0 のまわりを  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$  の順に積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_0 &= \frac{1}{S} \left\{ \frac{f_1 + f_2}{2} (y_2 - y_1) + \frac{f_2 + f_3}{2} (y_3 - y_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_3 + f_4}{2} (y_4 - y_3) + \frac{f_4 + f_1}{2} (y_1 - y_4) \right\} \\ &= \frac{1}{S/2} \left( \frac{y_2 - y_4}{2} \cdot \frac{f_1 - f_3}{2} - \frac{y_1 - y_3}{2} \cdot \frac{f_2 - f_4}{2} \right) \end{aligned}$$

を得る。一方、座標変換法における各係数は、

$$\begin{aligned} J &= S/2 \\ y_\eta &= (y_2 - y_4)/2, \quad y_\xi = (y_1 - y_3)/2 \\ f_\eta &= (f_2 - f_4)/2, \quad f_\xi = (f_1 - f_3)/2 \end{aligned}$$

と表せるから、上の差分表示は、座標変換法における非保存形表示の式(18)と一致する。

### Appendix 2

空間に置かれた平面を通過する流量  $Q$  は、平面に垂直な流速を  $U_n$  とすると、次式で算出される。

$$Q = U_n \cdot S = S_x \cdot U_x + S_y \cdot U_y + S_z \cdot U_z$$

ここに、 $S$ : 平面の面積、 $S_k$ : 平面の  $k$  軸方向への投影面積

従つて、平面に垂直な軸方向の流速  $U_n$  が上式より計算でき、差分格子が互いに、直交していれば、 $U_n$  が格子軸に沿つた流速となる。現実には、矩形領域を除いて

差分格子が完全に直交するように分割できないが、差分格子が極度に變形していないかぎり、風上差分を行う上での流れ方向の決定に近似的に、 $U_n$  を使用しても問題ないと考えられる。

## 文 献

- 1) 例えば、O. C. ZIENKIEWICZ: THE FINITE ELEMENT METHOD IN ENGINEERING SCIENCE (1971) [McGraw-Hill]
- 2) 大中逸雄: 鉄と鋼, 65 (1979), p. 1737
- 3) J. F. THOMPSON, F. C. THAMES and C. W. MASTIN: Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate System for Solution of Partial Differential Equations on Fields Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies, NASA-CR-2729, N77-2809 (1977年7月)
- 4) 矢川元基: 流れと熱伝導の有限要素法入門 (1983), p. 171 [培風館]
- 5) 齊藤武雄: 数値伝熱学 (1986), p. 127 [養賢堂]
- 6) M. L. WILKINS: UCRL-7322 Rev. 1, Lawrence Radiation Laboratory (1969)
- 7) R. ARIS: Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid mechanics (1962), p. 53 [PRENTICE-HALL INC.]
- 8) 川端康洋: 応用有限要素解析演習 (1981), p. 9 [丸善]
- 9) J. F. THOMPSON, F. C. THAMES and C. W. MASTIN: J. Comput. Phys., 15 (1974), p. 299
- 10) 例えば、磯田和男, 大野豊監修: FORTRAN による数値計算ハンドブック (1974), p. 268 [オーム社]
- 11) 川端康洋: 応用有限要素解析演習 (1981), p. 83 [丸善]
- 12) D. D. GRAY and A. GIORGINI: Int. J. Heat Mass Transfer, 19 (1976), p. 545
- 13) パトリック・J. ローチェ著, 高橋亮一他訳: コンピュータによる流体力学〈上〉 (1978), p. 94 [構造計画研究所]
- 14) 河村哲也: 非圧縮性高レイノルズ数流れの直接数値シミュレーション, 第2回航空機計算空気力学シンポジウム論文集 (1984)
- 15) A. A. ANSDEN and F. H. HARLOW: LA-4370 (1970), J. Comput. Phys., 6 (1970), p. 322
- 16) C. W. HIRT, B. D. NICHALS and N. C. ROMERO: LA-5852 (1975)
- 17) N. TAKEMITSU: J. Comput. Phys., 61 (1985), p. 499
- 18) コンピュータによる流体力学〈演習〉(高橋亮一編)(1983), p. 222 [構造計画研究所]
- 19) S. ERGUN: Chem. Eng. Prog., 48 (1952), p. 89
- 20) 高谷幸司, 山岡秀行, 岩永祐治: 鉄と鋼, 73 (1987), A1