

(384) 統一非定常一次元熱伝導解析解の導出 (汎用棒鋼圧延モデルの開発-1)

川崎製鉄(株)鉄鋼研究所

新井和夫

1. 緒言

最近、コンピュータの発達により、複雑な形状の物体の非定常な温度計算が可能となってきたが、一方でオンラインでの材料寸法や材質の制御のために高精度かつ高速処理の材温予測や材温コントロールがより重要となってきた。このような要請に応えるために、物体の断面形状を統一的に取扱える形の非定常一次元熱伝導解析解を導出し、棒鋼圧延制御モデルに適用しているので紹介する。

2. 従来の熱伝導解析解の形と本解析方針

従来の解析解は Table 1 に示すように、無限長平板、無限長円筒及び球についてそれぞれ別々の形で求められており、内変数 X の求解には三角関数とベッセル関数のいわゆる超越関数を解く必要があり、最終的な解析解とはなっていない。ところで棒鋼圧延では素材及び中間材の断面形状は正方、菱、楕円形であり、従来の真円断面近似では材温予測精度が不十分であった。そこで任意形状の材料断面の取扱いが可能な統一解析解の導出を試みた。

Table 1 Formulae

m	Objects	
1	Infinite Flat Plate	$\theta_1 = (\theta_0 - \theta_a) \left( 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin X}{X + \sin X \cdot \cos X} \right) \cdot \exp(-k_c \cdot t) \cdot \cos(\beta X) + \theta_a$ $\cot X = \frac{2X}{N} \dots 1-a$ $N = \alpha \cdot d / \lambda, \beta = x / (d/2)$ $k_c = (2X/d)^2 \cdot a$
2	Infinite Circular Cylinders	$\theta_1 = (\theta_0 - \theta_a) \left( 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(X)}{J_0(X)^2 + J_1(X)^2} \right) \cdot \exp(-k_c \cdot t) \cdot J_0(\beta X) + \theta_a$ $\frac{X \cdot J_1(X)}{J_0(X)} = \frac{N}{2} \dots 1-b$ <p><math>J_0, J_1(X)</math>: Bessel functions of the first kind, zero and first order respectively</p>
3	Sphere	$\theta_1 = (\theta_0 - \theta_a) \left( 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin X - X \cdot \cos X)}{X - \sin X \cdot \cos X} \right) \cdot \exp(-k_c \cdot t) \cdot \frac{\sin(\beta X)}{\beta X} + \theta_a$ $\frac{X}{1-N/2} = \tan X \dots 1-c$ $m = \frac{S \cdot d/2}{V}$

m: Surface area ratio, S: Surface area, V: Volume, d: Diameter  
 $\theta_0, \theta_1$ : Material temperature before and after cooling,  $\theta_a$ : Coolant temperature  
 t: Cooling time, N: Nusselt number,  $\alpha$ : Heat-transfer coefficient  
 $a$ : Thermometric conductivity,  $\lambda$ : Thermal conductivity  
 $x$ : Distance from center, X,  $k_c, \beta$ : Conversion factor

3. 統一非定常一次元熱伝導解析解の導出

平均材温式を(2)式のように与え、

$$\bar{\theta}_1 = (\bar{\theta}_0 - \theta_a) \exp(-k_c \cdot t) + \theta_a \dots \dots (2)$$

ヌッセルト数  $N = f(m, X)$  なる統一解析解の導出を試みた。(1)の各式に  $\sin X = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k X^{2k-1} / (2k-1)!$ ,  $\cos X = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k X^{2(k-1)} / (2(k-1))!$ ,  $J_0(X) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k X^{2(k-1)} / \{2^{2(k-1)} (k-1)!\}^2$ ,  $J_1(X) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k X^{2k-1} / \{2^{2k-1} (k-1)! \cdot k!\}$  をそれぞれ代入して整理すると、(i)  $m=1$  (平板) の場合  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (N+4k) Y^k / (2k)! = 0$ , (ii)  $m=2$  (円筒) の場合  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (N+4k) Y^k / ((2k)!)^2 = 0$ , 及び(iii)  $m=3$  (球) の場合  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (N+4k) Y^k / (2k+1)! = 0$  となり、これらの統一解として(3)式を導いた。 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (N+4k) Y^k \{ (2k)!! \cdot (2(k-1)+m)!! \} = 0$ ;  $Y = X^2 \dots \dots (3)$  (3)式より  $N = f(m, X)$  は(4)式のごとくまとめられた。 $N = (2/m) (Y^{-1} - Z)^{-1}$ ;  $Z > Y$ ,  $Y = X^2$ ,  $Z = m(m+2) \{ 1 - Y \cdot (m+2)^{-1} \cdot (m+4)^{-1} \{ 1 + Y \cdot (m+4)^{-1} \cdot (m+6)^{-1} (\Phi_0 / \Phi_1) \} \}$ ,  $\Phi_i = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (2i+m)!! \cdot Y^k / \{ (2k)!! \cdot (2(k+i)+m)!! \} \dots \dots (4)$  実用上必要な精度で丸めれば、冷却実績;  $k_c = t^{-1} \cdot \ln(\bar{\theta}_0 - \theta_a / \bar{\theta}_1 - \theta_a)$ ,  $Y = d^2 \cdot k_c / 4a$  から N が得られ、冷媒の熱伝達率  $\alpha$  を容易に算出できる。一方、使用冷媒  $\alpha$  による冷却後の材温を(2)式によって計算する場合には、(4)式より  $Y = g(m, N)$  を導き、 $k_c = 4aY/d^2$  を(2)式に代入すれば良く、 $k_c$  の近似誤差は  $0 < N \leq 566$  の極めて広い範囲で高々 0.32% に過ぎない。また、平均温度と任意位置温度との比  $\theta_a, N, \bar{\theta}$  と平均温度位置式  $\bar{\theta}(N)$  を用意することで、Fig.1 に示すように、解析解に基づいた断面内の温度分布計算が可能となり、棒鋼圧延における材温予測モデルとして利用されている。

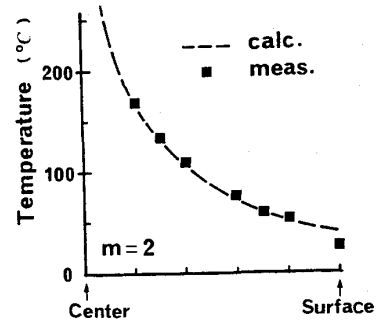


Fig.1 Temperature Distribution for Circular Cylinders

<参考文献>

1) 例えば、H. Y. Wong "Heat Trans. Eng." ('77)