

談話室

境界要素法の活用

木原 諄 二*

1. 緒 言

筆者らが本誌にはじめて「境界要素法」を紹介してから既に数年の月日が流れた。今にして見ると初めて境界要素法と出会って持った認識の中で本当だったこととそれほどでもなかつたことがある。筆者自身は研究室において塑性加工工具への加工材からの面力の解析と²⁾、この境界要素法が弾粘塑性変形の解析にどれだけ有効かという試行³⁾とを行ってきた。また筆者の属する金属工学科の梅田らは相変態を伴う非定常伝熱解析のプログラムを開発し、この方面の問題のいくつかの問題を解析している⁴⁾。またこの境界要素法によせる各方面の関心と期待は大きく、またその反動としていわれないとまではいい切れないがかなりの批判もあるという現状である。

そこで今回はとくに弾性問題の解析を中心としそれに非線形問題に関する話題をからませて、境界要素法のこれからを展望したいと思う。

2. 定式化を巡って

境界要素法とは何かということをおのこの際整理しておく。物体内部の物理現象を何らかの変換をして物体表面の物理量の関係で書くことができたとする。それは多くの場合、その物理量を表面上で何らかの重み関数を乗じて積分した積分方程式の場合が多い。この積分方程式の中の積分を表面を離散化し、その離散化した一つ一つの表面要素上の物理量をその面積要素のある点の物理量で代表させるなり、積分量を代表するパラメータで表現するなりして、それらに関する連立一次方程式を作つて解くことになる。この過程を反省すると、物体内部の現象を表面の物理量の関係式になおすための体積積分から表面積分への変換に関する問題、表面の離散化に伴う表面形状の問題、及び表面の物理量によつて内部の物理量を表現するときの問題がある。

積分方程式によらないで、物体内部で支配方程式（ラプラス方程式、ポアソン方程式、ナビア・コーシー方程式、ナビア・ストークス方程式）を満たすお互いに独立な解を、表面に選んだ点における未知の物理量のパラメータの数だけ集め、未知の境界条件を求めようという方法もある。しかし、この場合境界条件は選んだ点だけで満足されるだけであり、このようにして求めた後、物体内部へ内挿したときの物理量が正解とどのような関係に

あるかは、エネルギー原理によれば弾性体の場合には弾性ポテンシャルが正解にくらべて小さくないことが、点を無限に選んだ時保障されるだけである。しかし、工学的には意味のある解法の一つである。境界要素法というとき、このような方法は厳格に区別して境界要素法に含めない方がよい。

さて、定式化にあつての第一の問題は体積積分から表面積分に変換するところにある。この変換は重みつき残差法と部分積分とに基づく論理及び、仮想仕事の原理と相反定理とに基づく論理のどちらに従つて行つても同様になされる。しかし物理的には仮想仕事の原理と相反定理に基づいて理解する方がイメージが鮮明である。前者の理解は数理的な立場の人々にわかりやすい反面、理解がそれだけ抽象的すなわち数学的に偏るきらいがあるように見受けられる。

昨年 11 月 15 日から 18 日まで東京・建築会館ホールで行われた第 1 回境界要素法シンポジウム（境界要素法研究会-JASCOME—主催）⁵⁾は応用の立場及び数理の立場から合わせて 200 名にのぼる参加者を得て行われたが、その場での定式化をめぐる討論において上述のことがよくあらわれていた。数理の立場からの批判は「支配方程式の問題を積分方程式に変換するときの条件が、積分方程式を解くときの境界条件に正しく変換されているかを本当に吟味しているか」ということであつた。この批判は体積積分を面積積分に変換する段階と、さらに面積積分で表現された方程式を離散化して解く段階へ向けられたものである。

この批判に対しての応用の立場からの応答は当然のことながら数理的根拠に立つものでなく、ただ有限要素法による解や差分法による解とはほぼ一致するからといった「結論の多数決原理」に頼ろうとするもの、更には一つの近似の試行として見てほしいといったものにならざるを得なかつた。

数学的立場からの批判は事柄が数理的に進められているものには当てはまるが、物理モデルに基づいて進められているものには当てはまらない。そこでは数理的手段はモデルに従つた計量をする道具である。そういう意味で我々鉄鋼工学の立場の者が数値解析法の助けを借りて技術の研究をするときには、物理モデルを明解なイメージで把握しておくことが必要であろうと思われる。

そして物理モデルを重視する立場で最も問題としなければならぬのは、材料物性の数学モデルのリアリティである。数値解析にとらわれると、古今何らかの解らしきものを得ようとするために支配方程式と連立する材料物性の数学モデル、すなわち、構成方程式を操作してつじつまをあわせるということが多い。そのとき操作した構成方程式の近似度—リアリティ—を反省しておかなければならぬ。そういうわけで材料研究者が介入する必要がある。

* 東京大学工学部 工博

問題を数値解析によつて解く場合には、数学的に正しい必要があり、これは古くから強調されてきたが、境界要素法のようなかなり便利な解析手法になると、その基づいている物理モデルが材料物性の数学モデルをも含めて定量的な近似度を評価できることを望むのはあたり前であると言えよう。そういう意味で材料物性を研究する側の責任は重い。

次は、表面上の物理量に関する表面積分の関係式で表示される積分方程式の離散化を巡る問題である。表面をいくつかの面積要素に区切り、その要素の上での物理量の分布のモデルを設定する。とくに変位に関してはそのモデルが区切りの境界で連続になつているか否かで適合要素または非適合要素とに分かれる。非適合要素は物理的に矛盾しているかに見えるが、物体の角、尖点などの処理が簡単である上、要素数を増せば確実に解の精度がよくなるのが分かっているため、重宝されている。後述するがプログラムの汎用性の面からは非適合要素を使用すると便利なことが多い。しかし、表面近傍の物理量一応力やひずみも問題にしなければならない非線形問題（内部力法を用いるので体積積分の項がのこる）をとく場合には適合要素を使用することがすすめられる。

以上、境界要素法の定式化を巡つて、支配方程式と積分方程式との同値性及び積分の離散化における近似度の問題を中心に展望した。境界要素法を活用する者はともすれば実績にかまけて基本的な問題を見逃しがちである。しかし境界要素法の定式化の論理は連続体力学の特徴を学ぶのによい教材でもあるので、この点をおろそかにせず理解を深めることは技術者の素養を豊かにする面で意味がある。

3. 解法を巡る問題

有限要素法では、節点力と節点変位との関係が、節点力に関し解けている形で表現され、しかも剛性マトリックスがバンド構造になつている。それに対して、境界要素法では、二つのフルマトリックスが必要である。さらに内点の変位、ひずみ及び応力を評価するときは、境界上の面力及び変位とそれらを結びつけるマトリックスが必要になる。したがつて境界要素法は最終段階で解く連立1次方程式のサイズは有限要素法より小さくてすむが、システム内に蓄えるべき情報の量は、その連立1次方程式の大きさとは釣り合わないほど大きいものとなる。この点が、境界要素法の三次元問題への応用のひろがりを阻害している原因の一つである。このためにはディスクやテープなどの補助記憶装置を十分活用して対処するとともに、補助記憶装置とワークスペースとの間での情報のやりとりの合理化などをはかつていかなければならない。そこで、パソコンの並列使用などによる並行処理システムを活用して合理化をはかる余地がある。これは今後の可能性としてのこされている。

境界要素法を弾性体の接触問題に応用するとき、接触相手と結合した解き方をする代わりに、弾性体自体の変形に関する補助情報を得て境界要素法の方程式と補助情報に関する方程式を連立して解くこともできる²⁾。とくに接触相手が流体や弾塑性体などの場合には、結合して一体として方程式を作ると非線形性が加わるので原理として解けても、実際の計算は時間もコストも大きくなる。また結合面(=接触面)では変位の適合性や、摩擦法則などを仮定する必要もあつて解の任意性が生まれそのために結果の吟味をしなければならない。そういうわけで、ここで紹介したような方法が有利な面も確かにあると思われる。実際に実行すると、連立させることによる方程式の次元が大きくなることや、また境界要素法の方程式の係数と補助方程式の係数とのオーダーが不釣り合いであつたり、接触面の変位や面力に影響が小さい補助情報を使つたりすると、連立方程式の係数行列式が零に近くなるなどの問題がある。とくに弾性体は St. Venant の原理に律せられているので補助情報を得る点の選定に注意を払う必要がある。面力境界条件の面での変位をとることは非常に有為であるが、表面ひずみをとるときは節点変位との間の適合条件式を必要とするし、その上その適合条件式が表面要素の変位の内挿関数と異なつていような場合には物理的に無意味な解が単に形式的に得られるだけなので、注意を要する。軸対称問題の場合のフープひずみ $\epsilon_{\theta\theta}$ は直接 U_r (半径方向変位) と関係づけられるのでこの $\epsilon_{\theta\theta}$ を自由表面で求めることは有益であつた。もし、境界要素法の連立1次方程式が面力について陽な形で表現されていると、補助方程式と連立して解くときかなり小さな方程式を解けばよいことになるが、その場合は面力に乗じているマトリックス(普通Gマトリックスという)の逆行列を求めそれを変位に乗じているマトリックス(普通Hマトリックスという)に作用させるという手順が必要であつて、この演算を行うと電算機計算の特長として解の精度が落ちるきらいがある。

次に弾粘塑性体の変形解析に関連していえば、物体内部のひずみや応力を表面近傍まである程度の精度で求め必要がある。そこでまず表面を離散化して面積要素の上で積分を行う場合は適合要素で内挿関数としては少なくとも1次式を使い行わなければならない。従つて角点の境界条件の処理をしておく必要がある。また普通は面積要素の上の積分は GAUSS-LEGENDRE の積分公式を使用するのが普通であるが、応力評価点に近い面積要素の積分や、「内部応力の相互作用を評価する積分を行う場合には被積分関数が特異性をもつので解析的手法が使えないものは使い、数値積分は二重指数型積分公式によつて行うなどの工夫が必要である⁶⁾。」

4. 汎用性を巡る問題

以上述べてきたことからもおよそ察しられることであ

るが、境界要素法がもつ特色である、ハンディであること、物理モデルに比較的忠実に数学モデルを作れることなどは裏返せばこの特色を生かした汎用プログラムを作るのがむずかしいということになる。オーソドックスな用途のプログラムは今日有限要素法が支援システムとともに充実しているの、今さら境界要素法に乗りかえるまでのことはないというのも事実である。境界要素法はデータの構造こそ有限要素法より小さいが、内容的には高度である。そのためにプログラムの実行を単なるオペレータに任せきことは難しいし、システム全体の見なおしをいわば対話的に行つてこそ境界要素法の特色を生かすことができる。したがって特色を生かしたよい計算をするためには研究当事者が計算の現場にいる必要がある。

一方汎用プログラムを使つてもら側から見ると、汎用プログラムをインテリジェンスの高いものにしきれない状況がある。汎用プログラムの使用者は別に計算機利用技術に詳しいとは限らないのであるから、自分の解くべき問題のデータが汎用プログラムでどのように把握され処理されるのかを必ずしも理解しているかは保証の限りでない。また使用者と接するプログラムのオペレーターは使用者の問題の物理モデルに詳しいとは限らないから、使用者の意図を正しく理解しない可能性がある。また汎用プログラムが使用者のもとで使用者自身によつて運用される場合には、使用者が半可通のまま使用しても決定的なミスが生まれないようにしなければならない。したがって、汎用プログラムは個々の問題ごとに計算機に詳しい使用者が作るという矛盾した話になつてくる。また、半可通の使用者を想定した場合にはかなりインテリジェンスをおとしたプログラムを提供しておかなければ、誤つたもつともらしい解が出される危険がある。そういうわけで、例えば角点や尖点をもつ物体の問題などのデータ構造を簡単にするためにもつとも簡単な非適合要素である一定要素のプログラムを骨子にした汎用プログラムを作っておくのが無難である。しかし今後、プログラム作製者と使用者との交流が深まれば高いインテリジェンスをもつて使用者の物理モデルのイメージに沿つてデータを処理し計算する汎用プログラムが産み出される可能性まで否定するわけではない。

5. 不均質問題への挑戦を巡つて

連続体力学によつて現実の現象を解析する立場では、しばしば解の性格をあいまいであつても解を求める労力が省ける方がよいという発想をすることがある。その発想から、物体を均質であると見なすことが多く、また解を参考にするいわゆる使用者側もそのことをわきまえて多くを期待しないきらいもある。

とくに境界要素法では、物体の構成方程式が物体内で一意的であることが要請されているかのような誤解がな

されることが多い。しかし、非定常熱伝導問題や弾粘塑性問題の定式化の過程を参考にすると弾性定数が不均質な物体の解析を行うことも可能である。そして、不均質弾性体の解析における計算が、その物体の非線形挙動をつづけて解析するとき必要なものをあらかじめ行つていくことになるので、不均質非線形挙動の解析は現在でもかなり可能性があるといえる。筆者らは連続鋳造スラブの静鉄圧による凝固シエルのバルジングを弾性定数の温度依存性と粘塑性挙動の温度依存性とシエル内の温度分布との関係性を評価した上で行つた経験がある⁷⁾。そういうわけで、計算機自体の進歩、利用技術の進歩及び定式化の過程の合理化⁸⁾などが進むにつれて、有限要素法と比較して不得意であるとか、あるいは境界要素法の特長が出せないジャンルといわれているこの分野を開拓する可能性は大いにあると考えられる。

6. 鉄鋼工学への応用の状況

—結びに代えて—

境界要素法をいかに鉄鋼工学へ応用して技術の進歩に役立たせることができるか、これが今の大切な問題である。まず製鉄プロセスでは炉床れんがの浸食予知に活用されている¹⁴⁾。また、高炉炉床におけるスラグ・メタル 2 相流の解析に応用されている⁹⁾。

温度解析を凝固解析に活用している例もあり⁴⁾、金型内の温度分布の最適化にも活用されている¹⁰⁾。筆者らは、ロールの圧延時の変形を軸芯たわみと扁平変形に分けることなく同一システムで解析できるようにするために努力しており¹¹⁾、半無限体への押し込み変位の重ね合わせで扁平変形を評価し、それと軸芯たわみと加算してロール変形とする方法と比較検討する予定である。また塑性加工時の工具の変形を計測と結びつけて解析する方法の開発については既にふれたとおりである。塑性加工の分野では、温度分布のある組立金型の各部の応力状態の解析などを現実的な物理モデルのもとで解析する手法も開発され、有限要素法に基づくものより有利であることも示されている¹²⁾¹³⁾。

このような状況を見ると、とくに従来有限要素法や差分法による解析の畝が入つていなかつた分野を中心に現在から近い将来にわたつて鉄鋼工学の諸問題の解析にどの程度境界要素法が寄与するかが明らかにならう。またこの方法の活用によつて単に解析のための道具ではなく計測のインテリジェンスを上げて制御に寄与することが期待されよう。

文 献

- 1) 木原 諄二, 相澤 龍彦: 鉄と鋼, 67 (1981), p. 720
- 2) 木原 諄二, 牧野 浩明, 申 光憲: 塑性と加工, 25 (1984), p. 806
- 3) 木原 諄二, 石井 研史, 告野 昌史: 塑性と加工, 25 (1984), p. 639

- 4) 例えば C. P. HONG, T. UMEMA and Y. KIMURA: Metall. Trans., 15B (1984), p. 101
- 5) 境界要素法研究会: 第1回境界要素法シンポジウム研究発表論文集 (1984)
- 6) J. KIHARA and K. ISHII: Advance Tech. of Plasticity Vol. II (1984), p. 1059
- 7) 木原諄二, 石井研史: 鉄と鋼, 70 (1984), S900
- 8) 佐脇 豊, 神谷紀生: 文献5), p. 121
- 9) 四方博実, 加藤武男, 福武 剛, 皆川俊則, 芹沢保文: 文献5), p. 1
- 10) C. P. HONG, T. UMEMA and Y. KIMURA: Modeling of Casting and Welding Processes, ed. by J. A. DENTZIG and J. T. BERRY (1984), p. 221 [AIME]
- 11) 木原諄二, 馬曉 鵬: 文献5), p. 97
- 12) 落合芳博, 山本博一: 塑性と加工, 25 (1984), p. 612
- 13) 落合芳博, 関谷 壮, 山本博一: 文献5), p. 259
- 14) 吉川文明, 一宮正俊, 高取誠二, 田口憲司, 田中正隆: 第4回シミュレーション・テクノロジー・コンファレンス (日本シミュレーション学会) No. 4-3 (1984), p. 75

— 書 評 —

Second International Symposium on Metallurgical Slags and Fluxes

Ed. by H. A. Fine and D. R. Gaskell

1984年11月米国 Lake Tahoe, Nevada で開催されたシンポジウムの Proceedings である。3編の Plenary lectures (Masson, Elliott, Belton) に続いて、73編の論文が、次の10セッションに分けて掲載されている。

鉄冶金スラグ-メタル反応

スラグとフラックスの物理化学-I, 容器との反応

スラグの挙動の数学的モデル

スラグの熱力学的性質

反応速度

非鉄冶金スラグ-メタル平衡

スラグとフラックスの物理化学-II, 非鉄プロセス

移動速度に関する性質

Spectroscopy, 構造と物理的性質

スラグとフラックスの物理化学-III, 鉄冶金プロセス 73編のうち、6編はタイトルと抄録のみであり、これは、印刷時に論文が間に合わなかつたためと推定されるが、シンポジウムの開催から半年以内にこのような Proceedings が読者の手に入ることの利点はこの欠落を補つて余りある。

上述のセッションからもわかるように、取り扱われている論文の範囲は、冶金学、冶金プロセスにおいてスラグが関与するほとんどすべての分野をカバーしており、しかも最新の成果が集められていることから、単にスラグの研究者のみならず、鉄、非鉄冶金プロセスの研究者、技術者にとって良い reference book となるであろう。

なお著者は16カ国にわたり、日本からの発表は21件と多い。
(福武 剛)

A5 判変形 1116 ページ, Author Index 付

定価 28800 円

1984年 The Metallurgical Society of AIME 発行