

解析解を利用した加熱炉内鋼材温度予測法

論文

遠藤 敏夫*・舟橋 康行*²

A Prediction Algorithm of Temperature in Slab in Reheating Furnace by Use of Analytical Solution

Toshio ENDO and Yasuyuki FUNAHASHI

Synopsis:

An analytical solution of one dimensional heat conduction equation is derived under the following conditions.

- (1) Constant heating energy E' is applied at the top surface of the slabs.
- (2) There is no flow of heat at the bottom surface.
- (3) The initial temperature distribution is approximately equal to the quadratic function determined by the both surface temperature.

Further, a practical and fast algorithm is proposed for the prediction calculation of heating temperature. The algorithm uses the analytical solution. First, the slab temperature is predicted by the analytical solution. Every time the calculated temperature goes beyond the predicted temperature range, the calculation is interrupted. The thermal constants used are corrected to become appropriate to the next range of temperature and to reset the initial distribution of temperature and energy E' decided by radiant heating energy calculation, and then the prediction calculation is started again. The proposed algorithm has a great advantage in reduction of computation time over the difference equation method. As the proposed algorithm takes into account the nonlinearity of thermal constants, the computation accuracy is expected to be nearly equal to that of the difference equation method.

1. 結 言

加熱炉の計算機制御において、その中心となる鋼材の温度計算はオンライン計算のゆえに高速性が要求される。すでに報告されている計算機制御の実施例¹⁾などの大半が、比熱など鋼材の熱定数が非線形であることから、鋼材の温度計算には伝熱差分方程式が用いられている²⁾。

この計算法では時分割による繰返計算が膨大になるため、かなりの計算時間を要し、オンライン計算に際しては演算の高速化が設計課題の一つとして常に取り上げられている。

一方、解析解^{3)~5)}を用いて鋼材の昇温予測をおこなうならば、繰返計算は不要となり計算時間も短い。しかし、鋼材の熱定数が一定値であるとして導出されているため、昇温予測結果は実際と大きく異なつたものとなり、実用的でない⁶⁾。このため、筆者らは初期温度分布 $f(x)$ を 2 次曲線で与えて熱伝導方程式を解析的に解き、これを利用した鋼材の高速昇温予測計算法を提案した⁷⁾⁸⁾。そこでは対流伝熱を考慮し、雰囲気温度と鋼材表

面温度との差に比例した熱量が鋼材に投入されるものと仮定した境界条件を取り扱っている。

放射伝熱が主体となつている加熱炉を取り扱う場合においても、放射伝熱係数 [=放射伝熱量/(雰囲気温度-鋼材表面温度)] を導入することにより、文献 7)、8) の対流伝熱計算法を適用することができる。

しかしながら、これらの計算方法も計算手順が複雑であること、計算時間がかかり長いことなどの問題があつた。

これらの点の改良を試みた結果、ある微小時間内では鋼材に投入される放射伝熱量は一定であると仮定することにより、以下に述べるような利点をもつ計算法を導出することができた。

1) 文献 7)、8) では超越方程式の解を必要としたため、その求解に相当の繰返計算を要し、計算時間の短縮を阻害していたが、本論文では加熱条件に関係なくその解は一定値となつており、求解を必要としない。

2) 計算式が大幅に簡略化されたものとなつている。

3) また、文献 7)、8) では鋼材内部の熱伝導率変化は無視されていたが、本論文では一般的に取り扱われて

昭和 59 年 9 月 25 日受付 (Received Sep. 25, 1984)

* 大同特殊鋼(株)中央研究所 (Central Research Laboratory, Daido Steel Co., Ltd., 2-30 Daido-cho Minami-ku Nagoya 457)

*² 名古屋大学工学部 工博 (Faculty of Engineering, Nagoya University)

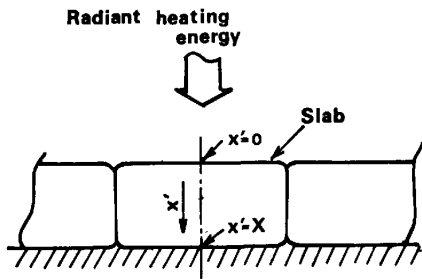


Fig. 1. Heat transfer model.

いる変換温度⁹⁾で表された熱伝導方程式を用いることによつて、そのことを考慮している。

このように、ここで提案する計算式は文献7), 8)のそれよりもさらに計算の高速性が期待でき、かつ、精度も良く、実用性の高いものとなつている。このことは連続炉で加熱される鋼材の温度計算を例にして、陽的解法の伝熱差分方程式で計算された結果と、本法によるそれとの比較によつて検証されている。また、その計算例では両者に差が生ずる要因についても言及されている。

2. 昇温予測計算法

2.1 基礎式

Fig. 1 に示すような、鋼材の厚さ方向 x' についての一次元熱伝導方程式で記述されるモデルを取り扱う。鋼材は上面より一定の熱量 E' によつて加熱されるものとする。また、下面は断熱とする。このとき、加熱モデルは次の熱伝導方程式と境界条件によつて記述される。

$$c\rho \frac{\partial \theta(x', t')}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left[\kappa \frac{\partial \theta(x', t')}{\partial x'} \right] \dots\dots\dots (1)$$

$$\kappa \frac{\partial \theta(x', t')}{\partial x'} \Big|_{x'=0} = -E' \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \theta(x', t')}{\partial x'} \Big|_{x'=X} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

ただし、初期温度分布 $\theta(x', 0) = f'(x')$ 。

ここで、 $\theta(x', t')$ は時刻 t' における鋼材表面からの位置 x' の鋼材温度、 κ は熱伝導率、 c は比熱、 ρ は密度、 X は鋼材の厚さとする。

$\phi = \int_{\theta_d}^{\theta} (\kappa/\kappa_d) d\theta$ で定義される変換温度 ϕ によつて (1)~(3) 式を変換すると

$$c\rho \frac{\partial \phi(x', t')}{\partial t'} = \kappa \frac{\partial^2 \phi(x', t')}{\partial x'^2} \dots\dots\dots (4)$$

$$\kappa_d \frac{\partial \phi(x', t')}{\partial x'} \Big|_{x'=0} = -E' \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\partial \phi(x', t')}{\partial x'} \Big|_{x'=X} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 κ_d は基準温度 θ_d における熱伝導率である。温度伝導率 $\kappa/c\rho$ ならびに x' を正規化するために、次式によつて (4)~(6) 式を変数変換すると (8)~(10) 式を得る¹⁰⁾。

$$\left. \begin{aligned} T &= X^2 c\rho/\kappa, \quad t = t'/T, \quad x = x'/X, \quad E = E'X/\kappa_d, \\ q(x, t) &= \phi(x', t'), \quad f(x) = f'(x') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -E \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

(8)~(10) 式をラプラス変換すると

$$\frac{\partial^2 Q(x, s)}{\partial x^2} = sQ(x, s) - f(x) \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\partial Q(x, s)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -E/s \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\partial Q(x, s)}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

となる。 $f(x)=0$ としたとき、(11) 式の一般解は

$$Q(x, s) = C_1(s) \sinh \sqrt{s} x + C_2(s) \cosh \sqrt{s} x \dots\dots\dots (14)$$

となる。(14) 式を (12), (13) 式に代入し、 $C_1(s)$, $C_2(s)$ を求めると

$$\left. \begin{aligned} C_1(s) &= -E/s\sqrt{s} \\ C_2(s) &= E \cosh \sqrt{s} / s\sqrt{s} \sinh \sqrt{s} \end{aligned} \right\} \dots\dots (15)$$

を得る。この $C_1(s)$, $C_2(s)$ を (14) 式に代入し、加法定理に従つて整理すると

$$Q(x, s) = E \cosh [(1-x)\sqrt{s}] / s\sqrt{s} \sinh \sqrt{s} \dots\dots\dots (16)$$

となる。さらに、(16) 式の逆変換を求めると

$$q(x, t) = E \left\{ t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i(x)}{\beta_i^2} (1 - e^{-\beta_i^2 t}) \right\} \dots\dots (17)$$

となる。ただし、

$$g_i(x) = 2 \cdot (-1)^i \cdot \cos[(1-x)\beta_i] \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 $\beta_i = i\pi$ ($i=1, 2, \dots$) である。

2.2 昇温予測計算式

昇温予測計算値が一定温度上昇するつど、計算をいつたん打ち切り、予測温度に合わせて熱定数を与え直したのち、初期温度分布を与え、再度、計算を再開続行する計算法を実現するため、以下ではその計算式を導出する。

昇温段階では鋼材内部は温度分布をもつ。このため、昇温予測計算を中断し、再度、計算を再開する際には初期温度分布 $f(x)$ が必要となる。 $f(x)$ を (17) 式において (11) 式の解を求めた場合、繰返計算が増えるつど計算項が増大し、その計算量は伝熱差分方程式のそれと比べてはるかに膨大なものとなる。このため、 $f(x)$ を簡単な関数で近似することが望まれる。

(16) 式を $(1-x)$ について展開すると

$$Q(x, s) = G(s) + sG(s) (1-x)^2/2! + \sum_{n=2}^{\infty} s^n G(s) (1-x)^{2n}/(2n)! \dots\dots\dots (19)$$

となる。ただし、 $G(s) = E/s\sqrt{s} \sinh \sqrt{s}$ である。(19) 式から、 $(1-x)$ についての高次項を省略した次の 2 次曲線にて $f(x)$ を近似することができる。

$$f(x) = h(1-x)^2 + p \dots\dots\dots (20)$$

ただし、 h は鋼材表面と断熱面との温度差を、 p は断熱面の温度を、それぞれ無次元化したものである。

(20)式で示される $f(x)$ を(11)式に代入した微分方程式

$$\partial^2 Q(x, s) / \partial x^2 = sQ(x, s) - h(1-x)^2 - p \dots\dots\dots (21)$$

の解は(22)式で与えられる。

$$Q(x, s) = C_1(s) \sinh \sqrt{s} x + C_2(s) \cosh \sqrt{s} x + \frac{h}{s} (1-x)^2 + \left(\frac{2h}{s^2} + \frac{p}{s} \right) \dots\dots\dots (22)$$

(22)式を(12)、(13)式に代入し、 $C_1(s)$ 、 $C_2(s)$ を求め、これを(22)式に代入し、加法定理に従って整理すると

$$Q(x, s) = \frac{(E-2h) \cosh \{(1-x)\sqrt{s}\}}{s \sqrt{s} \sinh \sqrt{s}} + \frac{h}{s} (1-x)^2 + \left(\frac{2h}{s^2} + \frac{p}{s} \right) \dots\dots\dots (23)$$

を得る。

したがって、(23)式より解 $q(x, t)$ は

$$q(x, t) = (E-2h) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\cosh \{(1-x)\sqrt{s}\}}{s \sqrt{s} \sinh \sqrt{s}} \right] + \{h(1-x)^2 + p\} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] + 2h \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \right] \dots (24)$$

となる。(24)式右辺の逆変換を実行し、整理すると

$$q(x, t) = q_1(x, t) + q_2(x, t) + q_3(x, t) \dots\dots\dots (25)$$

ただし、

$$q_1(x, t) = (E-2h) \left\{ t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i(x)}{\beta_i^2} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i(x)}{\beta_i^2} e^{-\beta_i^2 t} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

$$q_2(x, t) = h(1-x)^2 + p \dots\dots\dots (27)$$

$$q_3(x, t) = 2ht \dots\dots\dots (28)$$

である。

(26)式は無限級数中の項を含んでいるため、計算の実行に際しては有限級数の和で近似する必要がある。この無限級数の中で、 $g_i(x)/\beta_i^2$ と $e^{-\beta_i^2 t}$ の積和項は収束が早い、Table 1 に示すように $\sum_i g_i(x)/\beta_i^2$ の収束は遅い。このため計算精度を保証するには、かなり多くの項数でもつて有限近似する必要がある、計算時間の点で不利となる。

$q_1(x, t)$ の計算式として(26)式の $\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)/\beta_i^2$ に代わり、その収束値を与えた次のような計算式を用いるなら(26)式よりは少ない項数で十分な近似精度が得られる。

(18)式より $g_i(0) = 2$ 、 $g_i(1) = 2 \cdot (-1)^i$ であり、また、

Table 1. Convergence of infinite series $g_i(x)/\beta_i^2$.

N	$g_N(0)/\beta_N^2$	$\sum_{i=1}^N g_i(0)/\beta_i^2$	$g_N(1)/\beta_N^2$	$\sum_{i=1}^N g_i(1)/\beta_i^2$
1	0.20264	0.20264	-0.20264	-0.20264
2	0.05066	0.25330	0.05066	-0.15198
3	0.02252	0.27582	-0.02252	-0.17450
4	0.01267	0.28848	0.01267	-0.16183
5	0.00811	0.29659	-0.00811	-0.16994
6	0.00563	0.30222	0.00563	-0.16431
7	0.00414	0.30635	-0.00414	-0.16844
8	0.00317	0.30952	0.00317	-0.16528
9	0.00250	0.31202	-0.00250	-0.16778
10	0.00203	0.31405	0.00203	-0.16575
11	0.00167	0.31572	-0.00167	-0.16743
12	0.00141	0.31713	0.00141	-0.16602
13	0.00120	0.31833	-0.00120	-0.16722
14	0.00103	0.31936	0.00103	-0.16619
15	0.00090	0.32026	-0.00090	-0.16709

$\beta_i = i\pi$ であることと、 $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i^2 = \pi^2/6$ 、 $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i/i^2 = -\pi^2/12$ であることから¹¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} g_i(0)/\beta_i^2 &= 1/3 \\ \sum_{i=1}^{\infty} g_i(1)/\beta_i^2 &= -1/6 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

となる。よつて、(26)式は $x=0, 1$ に対してそれぞれ次のように書き変えることができる。

$$q_1(x, t) \begin{cases} = (E-2h) \left\{ t + \frac{1}{3} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i(0)}{\beta_i^2} e^{-\beta_i^2 t} \right\} \dots x=0 \\ = (E-2h) \left\{ t - \frac{1}{6} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i(1)}{\beta_i^2} e^{-\beta_i^2 t} \right\} \dots x=1 \end{cases} \dots\dots\dots (30)$$

(26)式よりも収束の速い(30)式を用いても計算の高速性を確保するためには近似精度を確認しながら、できるだけ少ない項数でもつて無限級数を打ち切ることが重要である。そのためには有限近似とその近似精度との関係を示す判定基準が必要である。次節ではこの判定基準について述べる。

2.3 有限近似の判定基準

(30)式で示される無限級数中の有限近似と近似精度についての議論は収束性を吟味することに等しい。(30)式の級数中の収束性は $1/\beta_i^2$ ならびに $e^{-\beta_i^2 t}$ に依存する。いま、

$$e^{-\beta_{N+1}^2 t} \leq \epsilon \dots\dots\dots (31)$$

を満たす整数 N でもつて級数を打ち切るとする。また、この N に対して

$$\delta(x) = \sum_{i=N+1}^{\infty} g_i(x)/\beta_i^2 \dots\dots\dots (32)$$

とする。このとき、 $q_1(x, t)$ の有限近似化による誤差の程度 $\Delta q_1(x, t)$ を判定する基準式として次式を得る。

$$|\Delta q_1(x, t)| < (E - 2h) \varepsilon |\delta(x)| \dots \dots \dots (33)$$

ここで、 $\delta(x)$ は $x=0, 1$ それぞれに対して

$$\left. \begin{aligned} \delta(0) &= 1/3 - 2 \sum_{i=1}^N 1/\beta_i^2 \\ \delta(1) &= -1/6 - 2 \sum_{i=1}^N (-1)^i / \beta_i^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

で計算される。

級数の打ち切り個数 N は具体的には次のような手順に従って決定される。

- 1) まず、 ε を与える。
- 2) (31)式を書き変えた次の(35)式を満足する最小の整数 N を求める。

$$N \geq \sqrt{\ln(1/\varepsilon) / t / \pi} - 1 \dots \dots \dots (35)$$

- 3) この N に対し、(34)式より $\delta(x)$ を求める。
- 4) (33)式の判定基準式によつて近似誤差の程度を求める。これが要求する精度を満足しないときは ε をさらに小さな値に、また、必要以上に小さな誤差なら ε を更に大きな値に選び直し、2)より再度計算をやり直し、打ち切り個数 N を決定する。

(33)式から、 $\Delta q_1(x, t)$ は伝熱量 E に依存する。 E は加熱条件によつてその値は大きく変化するため、必要に応じて N を与え直し、 $\varepsilon, \delta(x)$ を適当な値に選ぶ必要がある。また、 $t = t' / (X^2 c \rho / \kappa)$ であることから、(35)式によつて決定される N も c/κ 、つまり鋼材温度に依存する。このようなことから昇温予測計算をおこなうつど、1)~4) に示す N の決定手順を併せて実行するのがよい。

2.4 計算手順

Fig. 2 に示したフローチャートをもとにして、(25)式を利用した鋼材の昇温予測計算の手順を以下に述べる。

- 1) 昇温予測をおこなう鋼材の鋼種、サイズおよび予測時間区間を与える。
- 2) 予測時間区間を分割し、計算時間の間隔 $\Delta t'$ を選ぶ。
- 3) 鋼材の温度分布を与える。
- 4) 次の放射伝熱量計算式に従つて、鋼材に投入される熱量 E' を計算する。

$$E' = 4.88 \phi_{CG} \left\{ \left(\frac{\theta_g + 273}{100} \right)^4 - \left(\frac{\theta_s + 273}{100} \right)^4 \right\} \dots (36)$$

ここで、 ϕ_{CG} は総括熱吸収率、 θ_g は炉内温度、また、 θ_s は鋼材の表面温度である。

なお、対流伝熱が無視できないときは(36)式の右辺に $\alpha(\theta_g - \theta_s)$ の項を加えて E' を計算すればよい。ただ

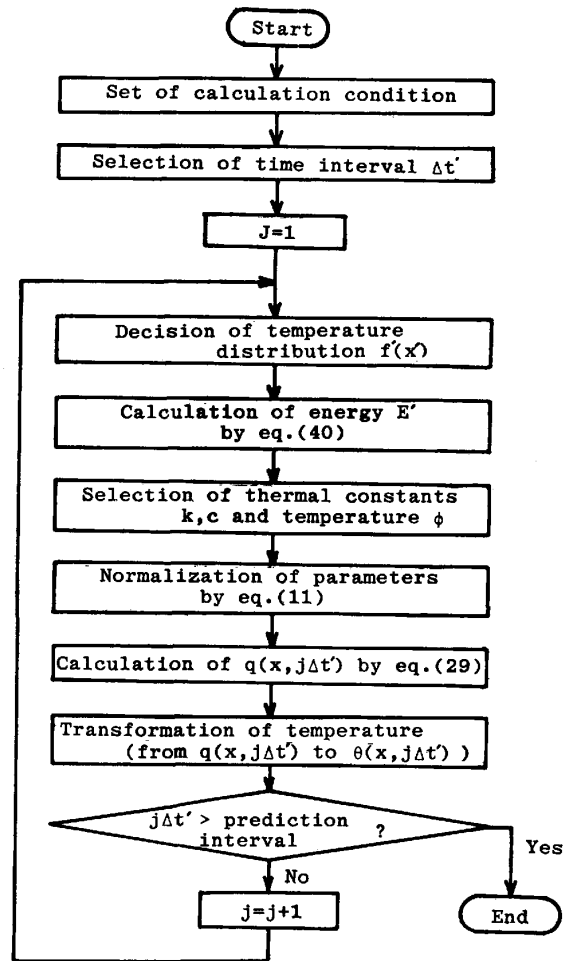


Fig. 2. Flow chart of prediction calculation.

し、 α は熱伝達率である。

5) 温度に応じて熱定数 κ, c ならびに変換温度 ϕ を選び(7)式に従つて変数変換をおこなう。ただし、 ρ は温度に関しての非線形性が小さいので一定値として取り扱う。

6) 無限級数の有限近似判定をおこない、(27)、(28)ならびに(30)式によつて鋼材の表面温度 $q(0, \Delta t)$ ならびに断熱面温度 $q(1, \Delta t)$ を計算する。

7) $q(0, \Delta t), q(1, \Delta t)$ をそれぞれ温度 $\theta(0, \Delta t'), \theta(X, \Delta t')$ に戻す。

8) 予測時間区間の計算が完了したら計算を打ち切る。そうでなければ、3)に戻つて以上の計算を繰り返す。

Fig. 2 では簡単のため計算時間の間隔 $\Delta t'$ は予測時間区間を等分割したものとして示してあるが、昇温予測計算を実際に実行するにあつて最も注意を払うべき点は、この $\Delta t'$ の選び方にある。細かく分割された $\Delta t'$ によつて昇温予測計算をおこなうと予測精度は向上するが、計算時間は長くなる。また逆に、粗い分割によつて

$\Delta t'$ を決定すると短時間で計算は完了するが精度は劣化する。その精度に大きく影響を及ぼすのは、放射伝熱量 E' の計算誤差と熱定数の与え方である。ともに $\Delta t'$ を細く選ぶなら小さくなる。したがって、放射伝熱量と熱定数が大きく変化する温度領域では小さな $\Delta t'$ を、それ以外では $\Delta t'$ を大きく選んで計算するなら短い計算時間で精度良く昇温予測計算をおこなうことができる。このような $\Delta t'$ の選択ロジックの実行は計算機が最も得意とするところで、極めて簡単にプログラムできる。

3. 計算例

連続式加熱炉内にある鋼材の加熱温度が常時、伝熱差分方程式によって計算されているものとし、装入後 1 h 経過した鋼材に対して、その 8 h 後までの昇温状況を本計算法を用いて予測する。(Fig. 3 参照)

ただし、鋼材の材質は中炭素鋼とし、その厚さ X は 0.2 m とする。また、鋼材は一定の速度で加熱炉内を進行するものとする。さらに、鋼材まわりの炉内温度 $\theta_g(t')$ は

$$\theta_g(t') = 700(1 - e^{-t'/6}) + 500 \dots\dots\dots (37)$$

で与えられるものとする。

なお、計算に用いた c, κ の値を温度伝導率の形で Fig. 4 に示す。

3.1 昇温予測結果

本法を用いて計算した鋼材表面および断熱面の昇温予測値を Fig. 5 に示す。Fig. 5 において、破線は差分方

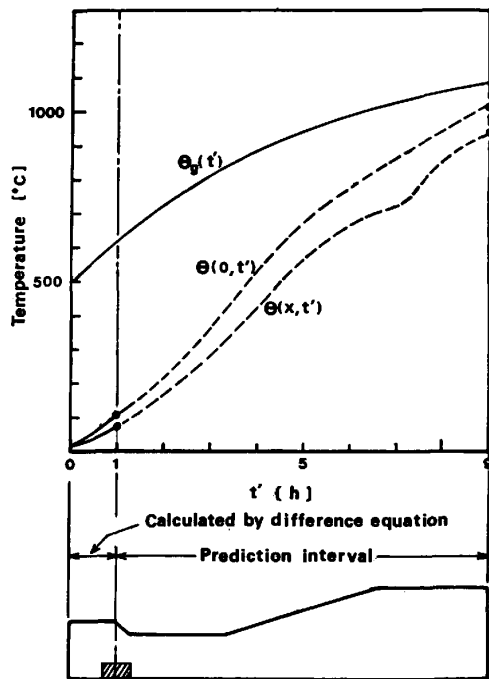


Fig. 3. Diagram of the problem in the example.

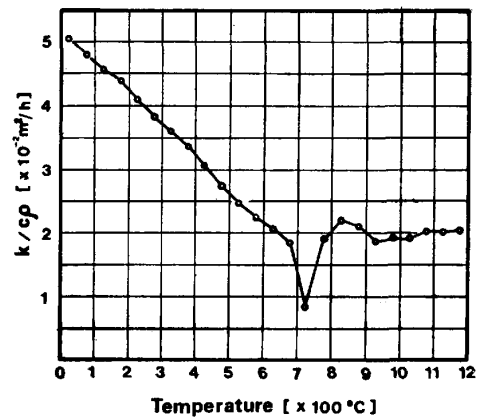


Fig. 4. Values of thermal diffusivity of the medium carbon steel used in the example.

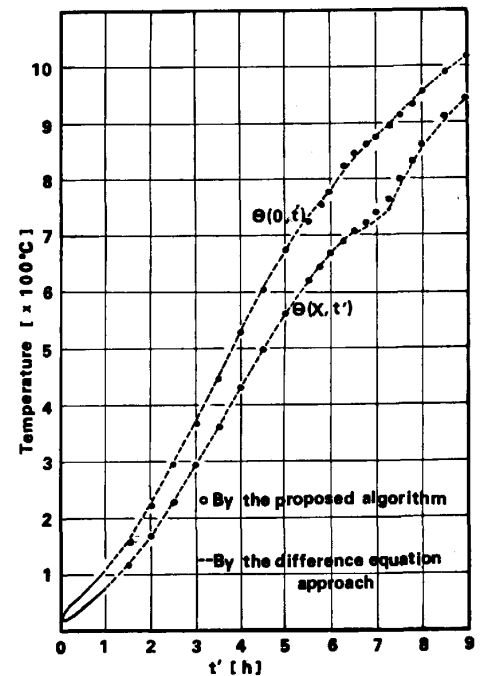


Fig. 5. Calculated temperature in the example.

程式によって計算された予測値を、また、○印は本法による予測値を示す。

予測計算に際し、(30)式の無限級数は 2.3 節で述べられた近似判定基準に従って $N=1\sim 2$ 項で打ち切られている。Table 2 は級数の打ち切り個数 N と近似誤差 $\Delta\theta_N(x, t')$ との関係を示したものである。 $\Delta\theta_N(x, t')$ は $N=100$ 個で級数を打ち切り計算した予測値 $\theta_{100}(x, t')$ と各 $N=1, 2, 3$ で計算した予測値 $\theta_N(x, t')$ との差である。 $\Delta\theta_N(x, t')$ は予測時間の間隔を $\Delta t' = 15\text{min}$ に選んで計算したものである。Fig. 6 は c/κ の値が最大となる、つまり $e^{-\beta_i^2 t'}$ の減衰が最も遅くなる条件で求めた $e^{-\beta_i^2 t'}$ の減衰状況を示す。 $t' \geq 1\text{min}$ ならば $i=100$ で $e^{-\beta_i^2 t'} \approx 0$ と考えられる。したがって、 $t' \geq 15\text{min}$ では十分に $\theta_\infty(x, t') \approx \theta_{100}(x, t')$ とみなせる。

Table 2. Truncation error $\Delta\theta_N(x, t')$ ($=\theta_N(x, t') - \theta_{100}(x, t')$).

t [h]	$\Delta\theta_N(x, t')$ [°C]					
	N=1		N=2		N=3	
	$x=0$	$x=1$	$x=0$	$x=1$	$x=0$	$x=1$
4.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4.75	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5.25	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5.50	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5.75	0.33	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00
6.00	0.46	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00
6.25	0.09	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00
6.50	0.00	-0.23	0.00	0.00	0.00	0.00
6.75	-0.16	-0.62	0.00	0.02	0.00	0.00
7.00	-0.39	-0.96	0.01	0.02	0.00	0.00
7.25	-0.56	-1.50	0.01	0.04	0.00	0.00
7.50	-0.75	-1.37	0.02	0.03	0.00	0.00
7.75	-0.68	-1.36	0.02	0.03	0.00	0.00
8.00	-0.61	-1.14	0.01	0.03	0.00	0.00
8.25	-0.49	-0.96	0.01	0.02	0.00	0.00
8.50	-0.41	-0.81	0.00	0.02	0.00	0.00
8.75	-0.34	-0.75	0.01	0.02	0.00	0.00
9.00	-0.32	-0.69	0.00	0.01	0.00	0.00

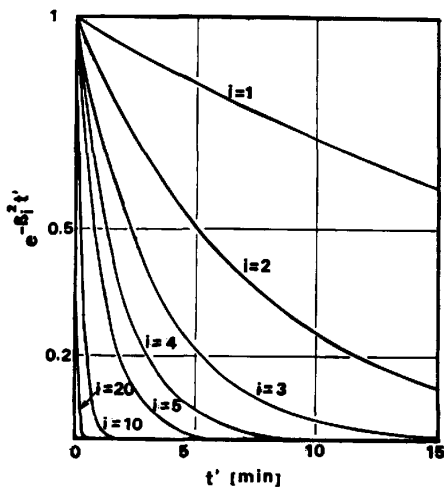


Fig. 6. Convergence of the function $e^{-\beta_i^2 t'}$.

Table 2 より $t' \leq 5$ h では $N=1$ で、それ以外でも $N=2$ で(30)式の無限級数を打ち切つても 0.05°C 以内の近似精度が得られていることがわかる。

3.2 計算精度の検討

Fig. 5 の破線で示す昇温予測値は変換温度 ϕ および含熱量 H を導入した差分方程式、すなわち、熱伝導方程式に $\partial\phi = (\kappa/\kappa_d)\partial\theta$, $c = \partial H/\partial\theta$ を代入して得られる偏微分方程式を差分近似した計算式によつて求めたものである。よつて、熱定数の非線形性については十分に考慮されており、分割メッシュを十分に細く選ぶなら、精

度の良い計算値が得られる。

この計算例では $\Delta x' = 20$ mm に、また、 $\Delta t' = 5$ s と、鋼材厚さならびに時間を極細く分割したもので、十分に精度の良い計算結果が得られている。よつて、この予測値を真値とみなし、本法による昇温予測結果との比較をおこなつた。両者の差は、やはり、熱定数が大きく変化する変態点温度付近で最も大きく、約 15°C であつた。

Fig. 7 の実線で示す曲線は伝熱差分方程式で計算された鋼材表面および断熱面の昇温予測値をもとにして、(20)式の2次曲線で近似した鋼材内部の温度分布である。また、○印は伝熱差分方程式によつて計算された鋼材内部温度の予測値である。鋼材の温度が $700 \sim 800^\circ\text{C}$ のとき近似誤差が最大となつている。この近似誤差を詳細に示したのが Fig. 8 である。鋼材への伝熱量 E' は、さほど大きく変化していないにもかかわらず、2次曲線による近似誤差 e_f は鋼材温度が $700 \sim 800^\circ\text{C}$ に加熱されるところで最大値約 12°C となつている。この温度範囲は変態点温度付近で、そこでは c, κ の値が急激に変化している。

しかし、変態点温度以外では真値とみなした伝熱差分方程式による予測値と本法のそれとは良く一致している。とくに、変態点温度を越えた領域では両者の差は $\pm 1^\circ\text{C}$ 以内と、ほとんど差が認められない。

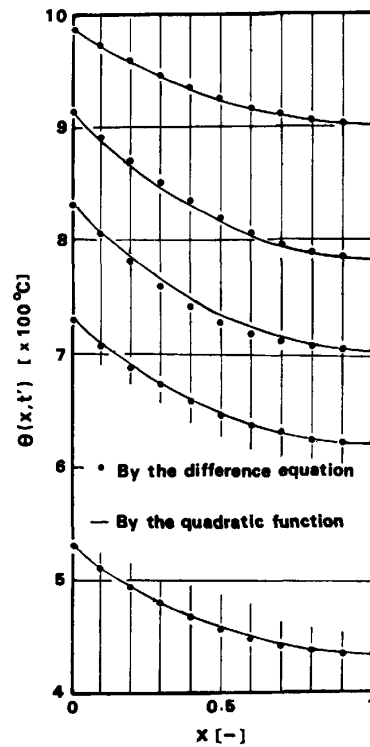


Fig. 7. Temperature distribution of the slab approximated by the quadratic function.

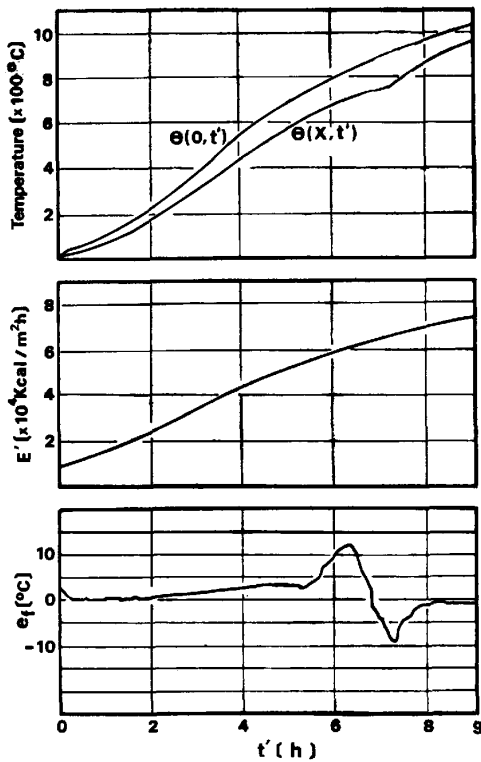


Fig. 8. Error of temperature distribution of the slab approximated by quadratic function.

また、予測誤差 $\pm 15^\circ\text{C}$ は加熱温度範囲の 1.5% 以内であり、実用上は十分に許容できる範囲内のものと考える。

この例のほかに、実炉での加熱状況を想定し、多くのシミュレーションをおこなった。そこでは伝熱差分方程式と本法との予測温度の差は変態点温度付近での 2 次曲線近似誤差に比例していた。

しかし、加熱パターンが急激に変化する場合は近似誤差が大きくなるため本法の適用は困難となる。

3.3 計算時間

計算時間の短縮度合は条件によつて大きく異なる。たとえば予測時間が長くなればなるほど、伝熱差分方程式に比べて本法の効果はより顕著となる。本法の特徴である計算の高速性を示す一例として、計算例での計算時間について、陽的解法の伝熱差分方程式のそれと、本法のそれとの比較をおこなった。Fig. 9 は伝熱差分方程式における鋼材分割数 n と、時間分割メッシュ $\Delta t'$ と、予測誤差 e_d との関係を示したものである。真値とみなした $n=10$ 分割 ($\Delta x'=20\text{ mm}$)、 $\Delta t'=5\text{ s}$ で計算された予測値と、各分割数 n 、 $\Delta t'$ で計算した予測値とを比較し、その差の最大値を e_d とした。

本法によつて計算された予測値と真値との差の最大値約 15°C と等しい予測精度となるのは $n=2$ 、 $\Delta t'=180\text{ s}$ の場合である。Fig. 10 は CPU-Z80、クロック-2

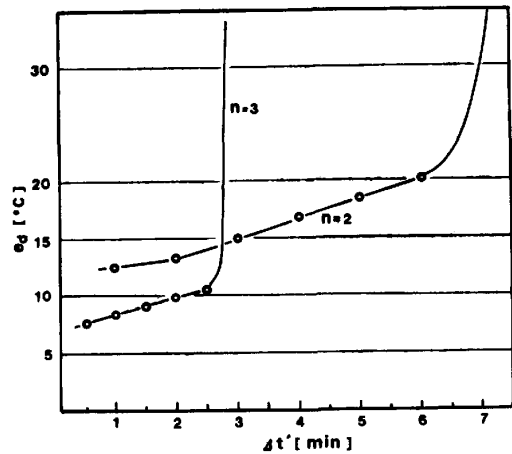


Fig. 9. Relation between the computation accuracy and mesh sizes in the prediction of heating temperature of the slab by the difference equation.

Where, e_d is the absolute value of the maximum deviation from the calculated temperature by $\Delta t' = 5$ second and $n = 10$.

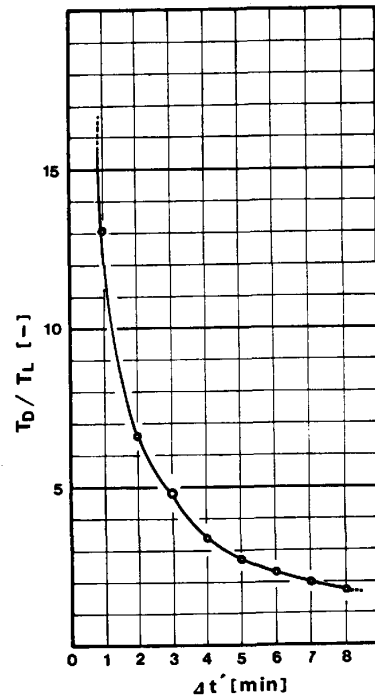


Fig. 10. Comparison of the required computation time.

T_D is the computation time by the difference equation, T_L is the one by the proposed algorithm in this paper.

MHz のパーソナルコンピュータで、コンパイラ BASIC によつてプログラムを実行させた計算時間の比を示すものである。 T_L は本法による計算所要時間で、 T_D は伝熱差分方程式によるそれである。 $\Delta t'=180\text{ s}$ で、本法は伝熱差分方程式による計算時間の約 1/5 になっている。また、その計算所要時間は約 20 s であつた。CPU が

16 ビットのマイクロコンピュータでは更に短縮され 2 s 程度となる。

このように、本計算法は鋼材温度の計算点も、その表面と下面のわずか 2 点だけであり、時間分割の減少のみならず、鋼片分割メッシュに対応する計算点も減少するため、陽的解法の伝熱差分方程式と比較して確実に計算量は減少する。

4. 結 言

1) 放射伝熱を想定した熱伝導モデルを解析的に解き、その解を利用した鋼材の加熱温度の高速計算法を提案した。その計算式は文献 7), 8) で提案されているそれよりも大幅に簡略化されたものとなっている。

2) ここで提案した計算法は鋼材熱定数の温度による変化を考慮した実用的なものである。

3) 本法の実用性を検討するため、加熱炉の計算機制御で一般に使用されている伝熱差分方程式によつて計算された鋼材の昇温予測値と本法によるそれとの比較をおこなつた。その結果、両者の差は許容できる範囲内の温度で、本法は十分に実用的なものであることを確認した。

4) また、陽的解法の伝熱差分方程式による計算所要時間と本法のそれとの比較から、本法の特徴である計算の高速性を確認した。

伝熱差分方程式で議論している限りは試行錯誤的な制御しか期待できないが、解析解である本論文で導出され

た計算式は現代制御論で提案されている各種の制御手法に適用できるものと考えられ、今後の発展が大いに期待ができる。

最後に、本研究を進めるにあたり、御激励をいただいた大同特殊鋼(株)中央研究所・加藤哲男所長に厚く御礼申し上げます。

文 献

- 1) たとえば、遠藤敏夫、長坂浩安：第 22 回自動制御連合講演会前刷 (1981), p. 237
- 2) 連続鋼片加熱炉における伝熱実験と計算方法 (日本鉄鋼協会熱経済技術部会加熱炉小委員会編) (1971) [日本鉄鋼協会]
- 3) Y. SAKAWA: IEEE Trans. on Automatic Control, AC9 (1964), p. 420
- 4) 市川邦彦、金井喜美雄：日本機械学会論文集, 36 (1970), p. 565
- 5) 舟橋康行、中村嘉平：計測自動制御学会論文集, 6 (1970), p. 1
- 6) 松永省吾：システムと制御, 18 (1974), p. 589
- 7) 遠藤敏夫、渡辺一雄、舟橋康行：計測自動制御学会論文集, 19 (1983), p. 251
- 8) 遠藤敏夫、舟橋康行：計測自動制御学会論文集, 20 (1984), p. 43
- 9) H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER: Conduction of heat in solids (1959) [Oxford University Press]
- 10) 遠藤敏夫、舟橋康行：計測自動制御学会論文集, 20 (1984), p. 952
- 11) 森口繁一、宇田川銑久、一松 信：数学公式Ⅲ (1961), p. 39 [岩波書店]