

© 1984 ISIJ

板の振動解析にもとづく冷延鋼板の形状推定

論文

林 美孝*・斉藤森生*・藤井靖治*²・石田雅之*³

Cold Strip Shape Estimation Using Plate Vibration Analysis

Yoshitaka HAYASHI, Morio SAITO, Seiji FUJII and Masayuki ISHIDA

Synopsis:

In cold strip mills, strip is usually rolled under longitudinal high tension, where the strip wavy shape is not visible directly because of the longitudinal elastic deformation.

To detect the strip shape indirectly during rolling, the strip vibration principle has been applied, and various kinds of shape meters have been developed so far. To clarify the measuring principle of these shape meters precisely, the authors carried out the analysis for the strip vibration by solving the differential equation strictly. Here transverse tension distribution which corresponds to the implicit strip shape is perturbed, and the state of strip vibration can be figured out by using perturbation method. As a result, the relation between the strip vibration and its shape is clarified. It is concluded that the strip shape can be estimated through the measured vibration amplitude distribution by applying some restricted outer force onto the strip.

1. 緒 言

鋼板の形状不良は圧延時の材料の長手方向の押びが幅方向に均一でないことから生ずるもので、Fig. 1 に示すような耳波 (Edge Wave)、中伸び (Center Wave) などがある。形状不良は鋼板に外力を与えない状態では目視等で確認でき、これを顕在形状と呼ぶ。一方、圧延中の鋼板には長手方向に張力が加えられるため、無張力状態では明らかに形状不良と判定できる場合でも、見かけ上平坦となり形状不良と認識することが困難となる。このように張力を加えることにより表面に現れなくなる形状を潜在形状と呼ぶ。潜在形状不良がある場合には、Fig. 2 に示すように鋼板内の幅方向に張力分布を生じ、この張力分布と鋼板の形状との間には一対一の対応があることから、鋼板の幅方向の張力分布を測定することにより潜在形状を推定できる。この幅方向張力分布を求めるために鋼板の振動が利用されており、開発現在されている

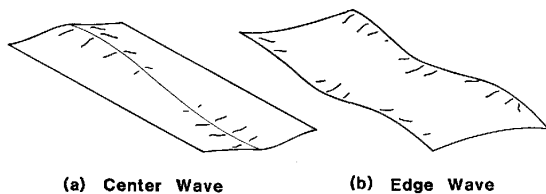


Fig. 1. Example of shape defects.

形状計では、この原理によるものが少なくない^{1)~4)}。

一般に、鋼板の振動は二次元の弾性たわみを考慮した板の振動と考えられるが、この場合種々の振動モードが存在し、振動の様子は弦や梁の場合に比べ極めて複雑であるため、従来あまり検討されていない。ここでは、相対する2辺が支持され、他の2辺が自由となっている矩形板の振動方程式を解析的に解くことを試み、さらに板幅方向の張力分布による影響を摂動としてとらえ、その摂動解を求めている。これにより張力分布が板の振動に及ぼす影響を把握でき、以下にその解析結果を述べる。

2. 板の振動

2.1 板の自由振動

板の振動の概要を把握するため、条件を単純化して、

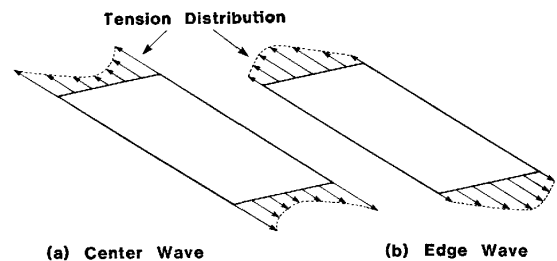


Fig. 2. Transverse tension distribution of latent shape defects.

昭和 58 年 11 月 12 日受付 (Received Nov. 12, 1983)

* 日本鋼管(株)京浜製鉄所 (Keihin Works, Nippon Kokan K.K., 1-1 Minamiwatarida-cho Kawasaki-ku Kawasaki 210)

*² 日本鋼管(株)新材料開発センター (New Materials Center, Nippon Kokan K.K.)*³ 日本鋼管(株)電気計装技術部 (Electrical and Instrumental Engineering Department, Nippon Kokan K.K.)

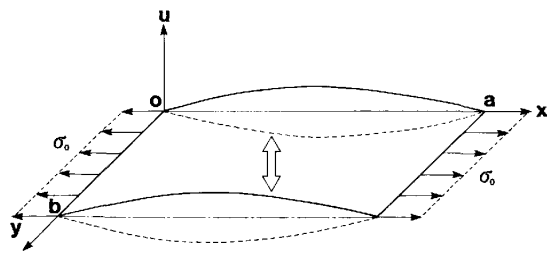


Fig. 3. Schematic diagram of plate vibration.

Fig. 3 に示すように、相対する二辺に様な張力分布を与えられて単純支持され、他の二辺が自由端となっている矩形板の自由振動を考える。板の鉛直方向変位を $u(x, y, z)$ とすると、板の振動は次の微分方程式で表される⁵⁾⁶⁾。

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + r \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) - h\sigma_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

ただし、板には振動速度に比例した空気抵抗が働くものとしている。また、境界条件は次式で与えられる。

$$u \Big|_{x=0,a} = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=0,a} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{y=0,b} = 0$$

$$\frac{d}{dy} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} \Big|_{y=0,b} = 0 \quad (3)$$

ここで、(2)式は板の支持端にて変位およびモーメントが零であることを示し、(3)式は板の自由端にてモーメントおよび剪断力が零であることを示す。

(1)式の解を変数分離により次式で与えると、

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a} \exp\left(-\frac{\mu t}{2\rho}\right) \sin w_k t \quad (4)$$

境界条件(2)式が満足され、微分方程式(1)式および境界条件(3)式から、 $Y_k(y)$ について次式を得る。

$$\frac{d^4 Y_k}{dy^4} - 2\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 Y_k}{dy^2} + \left\{ \left(\frac{k\pi}{a}\right)^4 + \frac{\sigma_0}{D} \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 - \frac{1}{D} \left(\rho w_k^2 + \frac{\mu^2}{4\rho} \right) \right\} Y_k = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^2 Y_k}{dy^2} - \nu \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k \Big|_{y=0,b} = 0$$

$$\frac{d^3 Y_k}{dy^3} - (2-\nu) \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \frac{dY_k}{dy} \Big|_{y=0,b} = 0 \quad (6)$$

ただし、 $\mu r \triangleq h$, $D \triangleq Eh^3/12(1-\nu^2)$ としている。さらに $\alpha_k \triangleq (k\pi/a)^2$, $\lambda_k \triangleq \{\rho w_k^2 + \mu^2/4\rho - \sigma_0(k\pi/a)^2\}/D$ とすると(5), (6)式は、次の(7), (8)式となる。

$$\frac{d^4 Y_k}{dy^4} - 2\alpha_k \frac{d^2 Y_k}{dy^2} + \alpha_k^2 Y_k = \lambda_k Y_k \quad (7)$$

$$\frac{d^2 Y_k}{dy^2} - \nu \alpha_k Y_k \Big|_{y=0,b} = 0$$

$$\frac{d^3 Y_k}{dy^3} - (2-\nu) \alpha_k \frac{dY_k}{dy} \Big|_{y=0,b} = 0 \quad (8)$$

(7)式の一般解は $A_1 \sim A_4$ を定数として、次式で与えられる。

$$Y_k(y) = \begin{cases} A_1 \sinh(\sqrt{\alpha_k + \beta_k} y) + A_2 \cosh(\sqrt{\alpha_k + \beta_k} y) \\ + A_3 \sinh(\sqrt{\alpha_k - \beta_k} y) + A_4 \cosh(\sqrt{\alpha_k - \beta_k} y) \\ (\alpha_k > \beta_k \text{ の場合}) \\ A_1 \sinh(\sqrt{\alpha_k + \beta_k} y) + A_2 \cosh(\sqrt{\alpha_k + \beta_k} y) \\ + A_3 \sin(\sqrt{\beta_k - \alpha_k} y) + A_4 \cos(\sqrt{\beta_k - \alpha_k} y) \\ (\alpha_k < \beta_k \text{ の場合}) \end{cases} \quad (9)$$

ただし、 $\beta_k \triangleq \sqrt{\lambda_k}$ としている。

(9)式が(8)式の境界条件を満足するためには、 λ_k (あるいは β_k) は任意の値をとることはできず、次式を満足するものでなければならない。

$$\left\{ \begin{aligned} & \{ (c_2/c_1)^2 (\alpha_k + \beta_k) + (c_1/c_2)^2 (\alpha_k - \beta_k) \} \\ & \sinh(\sqrt{\alpha_k + \beta_k} b) \sinh(\sqrt{\alpha_k - \beta_k} b) \\ & + 2\sqrt{\alpha_k^2 - \beta_k^2} \{ 1 - \cosh(\sqrt{\alpha_k + \beta_k} b) \\ & \cosh(\sqrt{\alpha_k - \beta_k} b) \} = 0 \quad (\alpha_k > \beta_k \text{ の場合}) \\ & \{ (c_2/c_1)^2 (\alpha_k + \beta_k) - (c_1/c_2)^2 (\beta_k - \alpha_k) \} \\ & \sinh(\sqrt{\alpha_k + \beta_k} b) \sin(\sqrt{\beta_k - \alpha_k} b) \\ & + 2\sqrt{\beta_k^2 - \alpha_k^2} \{ 1 - \cosh(\sqrt{\alpha_k + \beta_k} b) \\ & \cos(\sqrt{\beta_k - \alpha_k} b) \} = 0 \quad (\alpha_k < \beta_k \text{ の場合}) \end{aligned} \right. \quad (10)$$

ただし、 $c_1 \triangleq (1-\nu)\alpha_k + \beta_k$, $c_2 \triangleq (1-\nu)\alpha_k - \beta_k$ としている。

(10)式を満足する λ_k について、小さいものから順に $\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \lambda_{k3} \dots = \{\lambda_{ki}\}_i$ とすると、各々の λ_{ki} に対して(9)式の係数 $A_1 \sim A_4$ の比は一意的に決まる。そこで、定数倍の自由度をなくするために次式によつて正規化された、(7), (8)式の解を $\{\bar{Y}_{ki}(y)\}_i$ とする。

$$\int_0^b \{\bar{Y}_{ki}(y)\}^2 dy/b = 1 \quad (11)$$

$$\int_0^b \bar{Y}_{ki}(y) \cdot \bar{Y}_{kj}(y) dy = 0 \quad (12)$$

となるため、 $\{\bar{Y}_{ki}(y)\}_i$ は正規直交関数系となる。

なお、線形演算子 H_k を、

$$H_k \triangleq \frac{d^4}{dy^4} - 2\alpha_k \frac{d^2}{dy^2} + \alpha_k^2 \quad (13)$$

で定義すると、 $\{\lambda_{ki}\}_i$ は(8)式の境界条件における H_k

の固有値となり、 $\{\bar{Y}_{ki}(y)\}_i$ は固有関数となる。

以上から、(4)式で導入した $Y_k(y)$ は、 B_{ki} を任意定数として次式で与えられる。

$$Y_k(y) = \sum_{i=1}^{\infty} B_{ki} \bar{Y}_{ki}(y) \dots\dots\dots (14)$$

従つて、板の自由振動解は次式となる。

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} B_{ki} \sin \frac{k\pi x}{a} \bar{Y}_{ki}(y) \exp\left(-\frac{\mu t}{2\rho}\right) \sin w_{ki}t \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 w_{ki} は固有振動数であり、次式で与えられる。

$$w_{ki} = \sqrt{\frac{D}{\rho} \lambda_{ki} + \frac{\sigma_0}{\rho} \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\mu}{2\rho}\right)^2} \dots\dots (16)$$

(15)式にて、パラメータ k は長手方向の振動モードを表し、パラメータ i は幅方向の振動モードを表している。ここでは、 $\{\sin(k\pi x/a)\}_k$ を長手方向振動モード関数、 $\{\bar{Y}_{ki}(y)\}_i$ を幅方向振動モード関数と呼ぶことにする。各々の振動モードに対する板の振動の様子を Fig. 4 に示す。

(15)式における B_{ki} は、長手方向 k 次、幅方向 i 次の振動モードに対する振幅であり、自由振動の場合は初期条件によつて決まる。

2.2 板の強制振動

前節で求めた自由振動は時間の経過とともに減衰し、やがて消滅する。実際の冷間圧延における鋼板の振動は圧延ラインに存在する各種の外乱による強制振動であり本節では板の強制振動について検討する。

板内の一点 (x_0, y_0) に大きさ F_0 、周波数 Ω の周期的外力を与えた場合の板の振動は次の微分方程式で表される。

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial u}{\partial t} + D \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) - \sigma_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{F_0}{h} \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \sin \Omega t \dots (17)$$

ただし、 $\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数である。また、境界条件については自由振動の場合と同様(2), (3)式となる。

(17)式を解くため、変数分離により、

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sin(k\pi x/a) \bar{Y}_{ki}(y) V_{ki}(t) \dots (18)$$

とおくと、境界条件(2), (3)式は満足される。なお、 $\{\bar{Y}_{ki}(y)\}_i$ は前節で求めた幅方向振動モード関数である。(18)式を(17)式へ代入し、両辺に $\sin(k\pi x/a) \bar{Y}_{ki}(y)$ を掛けて板全面について面積分を行うと、 $V_{ki}(t)$ について次の微分方程式が得られる。

$$\rho \frac{d^2 V_{ki}}{dt^2} + \mu \frac{dV_{ki}}{dt} + \left\{ D \lambda_{ki} + \sigma_0 \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \right\} V_{ki} = \frac{2F_0}{abh} \sin \frac{k\pi x_0}{a} \bar{Y}_{ki}(y_0) \sin \Omega t \dots\dots\dots (19)$$

(19)式の一般解は次式で与えられる。

$$V_{ki}(t) = \exp\left(-\frac{\mu t}{2\rho}\right) (c_{ki1} \sin w_{ki}t + c_{ki2} \cos w_{ki}t) + \frac{2F_0 \sin(k\pi x_0/a) \bar{Y}_{ki}(y_0)}{abh \sqrt{\mu^2 \Omega^2 + \{D \lambda_{ki} + \sigma_0 (k\pi/a)^2 - \rho \Omega^2\}^2}} \sin(\Omega t - \varphi_{ki}) \dots\dots\dots (20)$$

ただし、 w_{ki} は(16)式で与えられ、 c_{ki1} , c_{ki2} は初期条件により決まる定数である。また、 φ_{ki} は次式で与えられる。

$$\varphi_{ki} \triangleq \tan^{-1} \left\{ \frac{\mu \Omega}{D \lambda_{ki} + \sigma_0 (k\pi/a)^2 - \rho \Omega^2} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

(20)式の第1項は自由振動を表し、時間とともに減衰するためこれを無視すると、板の強制振動は次式で与え

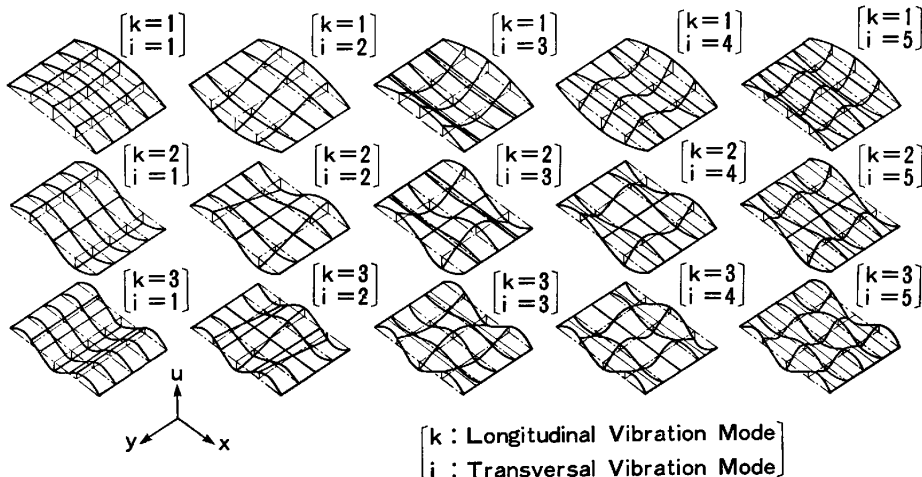


Fig. 4. Vibration mode of plate.

られる。

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2F_0 \sin(k\pi x_0/a) \bar{Y}_{ki}(y_0)}{abh\sqrt{\mu^2\Omega^2 + \{D\lambda_{ki}\sigma_0(k\pi/a)^2 - \rho\Omega^2\}^2}} \underbrace{\sin \frac{k\pi x}{a}}_{\text{B}} \underbrace{\bar{Y}_{ki}(y)}_{\text{C}} \underbrace{\sin(\Omega t - \varphi_{ki})}_{\text{A}} \dots \dots \dots (22)$$

(22)式にて、B項は振動モードを表しており、A項がそれに対する振幅となつている。従つて、各振動モードの振幅は外力を与える位置および外力周波数に大きく依存している。一例として、外力周波数に対する振幅の変化の様子を Fig. 5 に示すが、(a)は板厚 0.213 mm, (b)は板厚 2.13 mm の場合を示す。ともに急峻な共振特性を示すが、板厚の増加に伴い、板特有の傾向を持つ。

実際の圧延ラインでは、圧延機周辺の機械的振動あるいは水切り用のパージェアーの吹き付けなど種々の外乱が存在しており²⁾、鋼板に加えられる外力はかなり広い周波数帯域に分布するものと考えられる。ここではその極限として外力を白色雑音と仮定する。この場合、各振動モードが共振することになり、板の振動は次式で与えられる。

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2F_0 \sin(k\pi x_0/a) \bar{Y}_{ki}(y_0)}{abh\mu\sqrt{\{D\lambda_{ki} + \sigma_0(k\pi/a)^2\} / \rho - \mu^2/4\rho^2}} \sin \frac{k\pi x}{a} \bar{Y}_{ki}(y) \sin(\Omega_{ki}t - \varphi_{ki}) \dots \dots \dots (23)$$

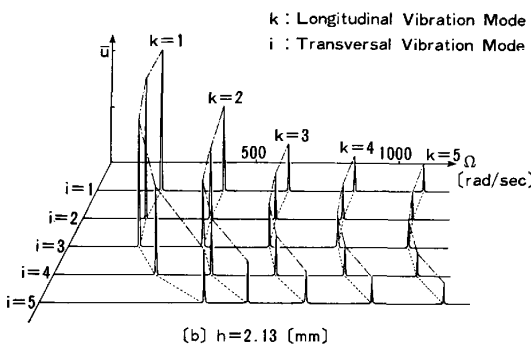
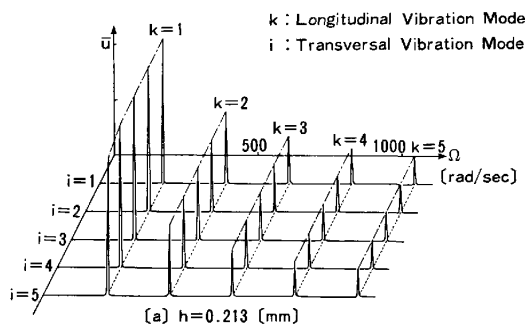


Fig. 5. Example of plate resonance characteristic in forced vibration.

ただし、 $\Omega_{ki} \triangleq \sqrt{\{D\lambda_{ki} + \sigma_0(k\pi/a)^2\} \rho - \mu^2/2\rho^2}$ は長手方向 k 次、幅方向 i 次の振動モードに対する共振周波数である。

3. 張力分布による影響

3.1 張力分布が振動モード関数に与える影響

前章までは幅方向の張力分布を一様としてきたが、形状不良がある場合には一様ではない。ここでは、幅方向の張力分布 $\sigma(y)$ が平均張力 σ_0 からわずかに隔たりを持つ場合として、摂動パラメータ ε を用いて張力分布を次式で与える。

$$\sigma(y) = \sigma_0 \{1 + \varepsilon \phi(y)\} \dots \dots \dots (24)$$

ただし、 $\phi(y)$ は張力分布パターンを与える関数で、

$$|\phi(y)| \leq 1, \int_0^b \phi(y) dy = 0 \text{ とする。}$$

このような張力分布を与えた状態で、前節と同じ周期的外力を与えた場合の板の強制振動について以下に述べる。微分方程式(17)式において σ_0 の代わりに(24)式の $\sigma(y)$ を用い、また境界条件には(2), (3)式を用いる。この場合も、長手方向振動モード関数 $\{\sin(k\pi x/a)\}_i$ が境界条件(2)式を満足する。一方、幅方向振動モード関数を導入するため、次の固有値問題を設定する。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^4 \bar{Y}_k^\nabla}{dy^4} - 2\alpha_k \frac{d^2 \bar{Y}_k^\nabla}{dy^2} + \alpha_k^2 \bar{Y}_k^\nabla + \varepsilon \left\{ \frac{\alpha_k \sigma_0}{D} \phi(y) \right\} \bar{Y}_k^\nabla \\ = \lambda_k^\nabla \bar{Y}_k^\nabla \dots \dots \dots (25) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{境界条件: } \frac{d^2 \bar{Y}_k^\nabla}{dy^2} - \nu \alpha_k \bar{Y}_k^\nabla \Big|_{x=0,b} = 0, \\ \frac{d^3 \bar{Y}_k^\nabla}{dy^3} - (2-\nu) \frac{d \bar{Y}_k^\nabla}{dy} \Big|_{y=0,b} = 0 \dots \dots (26) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{正規化条件: } \int_0^b \{\bar{Y}_k^\nabla(y)\} dy/b = 1 \dots \dots \dots (27) \end{aligned} \right.$$

この固有値問題の固有値を $\{\lambda_{ki}^\nabla\}_i$ とし、これに対する固有関数を $\{\bar{Y}_{ki}^\nabla(y)\}_i$ とすると(25)~(27)式より $\{\bar{Y}_{ki}^\nabla(y)\}_i$ は正規直交関数系となる。一方、 $\varepsilon=0$ とおくと $\{\lambda_{ki}\}_i, \{\bar{Y}_{ki}(y)\}_i$ は前章で求めた $\{\lambda_{ki}\}_i, \{\bar{Y}_{ki}(y)\}_i$ に一致する。すなわち、前章で与えた線形演算子 H_k^∇ の摂動演算子として次式で示す線形演算子 H_k^∇ を導入すると、

$$\begin{aligned} H_k^\nabla &\triangleq \frac{d^4}{dy^4} - 2\alpha_k \frac{d^2}{dy^2} + \alpha_k^2 + \varepsilon \left\{ \frac{\alpha_k \sigma_0}{D} \phi(y) \right\} \\ &= H_k + \varepsilon \left\{ \frac{\alpha_k \sigma_0}{D} \phi(y) \right\} \dots \dots \dots (28) \end{aligned}$$

$\{\lambda_{ki}^\nabla\}_i, \{\bar{Y}_{ki}^\nabla(y)\}_i$ は H_k^∇ に対する固有値、固有関数となつている。従つてこれらは非摂動演算子 H_k の固有値 $\{\lambda_{ki}\}_i, \{\bar{Y}_{ki}(y)\}_i$ を用いて次のように展開される。

$$\lambda_{k1}^{(1)} = \lambda_{k1} + \varepsilon \lambda_{k1}^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_{k1}^{(2)} + \dots \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{Y}_{k1}^{\nabla}(y) = \\ \frac{\bar{Y}_{k1}(y) + \varepsilon \bar{Y}_{k1}^{(1)}(y) + \varepsilon^2 \bar{Y}_{k1}^{(2)}(y) + \dots}{\sqrt{\int_0^b \{\bar{Y}_{k1}(y) + \varepsilon \bar{Y}_{k1}^{(1)}(y) + \varepsilon^2 \bar{Y}_{k1}^{(2)}(y) + \dots\}^2 dy / b}} \end{aligned} \right. \quad (30)$$

$\lambda_{k1}^{(1)}, \lambda_{k1}^{(2)}, \dots$ および $\bar{Y}_{k1}^{(1)}(y), \bar{Y}_{k1}^{(2)}(y), \dots$ は摂動法を用いて求めることができる⁷⁾。 $\{\bar{Y}_{k1}^{\nabla}(y)\}_i$ は(24)式で示す張力分布を与えた場合の幅方向振動モード関数となる。

そこで、板の強制振動解を変数分離により、

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sin(k\pi x/a) \bar{Y}_{k1}^{\nabla}(y) V_{k1}^{\nabla}(t) \dots \quad (31)$$

とすると、振動方程式から $V_{k1}^{\nabla}(t)$ は次式となる。

$$\begin{aligned} V_{k1}^{\nabla}(t) = & \exp\left(-\frac{\mu t}{2\rho}\right) \cdot (c_{k11}^{\nabla} \sin w_{k1}^{\nabla} t \\ & + c_{k12}^{\nabla} \cos w_{k1}^{\nabla} t) \\ & + \frac{2F_0 \sin(k\pi x_0/a) \bar{Y}_{k1}^{\nabla}(y_0)}{abh\sqrt{\mu^2 \Omega^2 + \{D\lambda_{k1}^{\nabla} + \sigma_0(k\pi/a)^2 - \rho \Omega^2\}^2}} \\ & \sin(\Omega t - \varphi_{k1}^{\nabla}) \dots \quad (32) \end{aligned}$$

ただし、 $w_{k1}^{\nabla}, \varphi_{k1}^{\nabla}$ は(16), (21)式にて λ_{k1} を λ_{k1}^{∇} と置き換えたものである。また $c_{k11}^{\nabla}, c_{k12}^{\nabla}$ は初期条件から決まる。

減衰項を無視して、さらに外力を白色雑音と仮定すると、板の振動は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2F_0 \sin(k\pi x_0/a) \bar{Y}_{k1}^{\nabla}(y_0)}{abh\mu\sqrt{\{D\lambda_{k1}^{\nabla} + \sigma_0(k\pi/a)^2\} / \rho - \mu^2/4\rho^2}} \\ & \sin \frac{k\pi x}{a} \bar{Y}_{k1}^{\nabla}(y) \sin(\Omega_{k1}^{\nabla} t - \varphi_{k1}^{\nabla}) \dots \quad (33) \end{aligned}$$

ただし、 $\Omega_{k1}^{\nabla} \triangleq \sqrt{\{D\lambda_{k1}^{\nabla} + \sigma_0(k\pi/a)^2\} / \rho - \mu^2/2\rho^2}$ は共振周波数である。

(33)式にて外力を加える位置 (x_0, y_0) および観測位置 x を与えると、張力分布が一樣でない場合の振幅分布が求められる。

3.2 張力分布と振幅分布の関係

本節では、幅方向の張力分布と振幅分布の関係について具体的な例を求める。外力を白色雑音とし、振幅分布の観測位置を板中央 $(x=a/2)$ とする。また、長手方向振動モードは $k=1$ のみとする。さらに、外力の与え方として次の三つの場合を考える。

(1) 幅方向の各振動モードが一樣に励振されるような外力を与える場合。

(2) 板の中央一点にのみ外力を与える場合。

(3) 幅方向に一樣で、しかも位相のそろった外力を与える場合。

これらの外力条件に対応する相対的な振幅分布をそれ

ぞれ $U_1(y), U_2(y), U_3(y)$ とおくと、

$$U_1(y) = \sum_{i=1}^{\infty} |\bar{Y}_{11}^{\nabla}(y)| / K_1 \dots \quad (34)$$

$$U_2(y) = \sum_{i=1}^{\infty} |\bar{Y}_{11}^{\nabla}(b/2) \cdot \bar{Y}_{11}^{\nabla}(y)| / K_1 \dots \quad (35)$$

$$U_3(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_0^b \bar{Y}_{11}^{\nabla}(\eta) d\eta \cdot \bar{Y}_{11}^{\nabla}(y) \right| / K_1 \dots \quad (36)$$

となる。ただし、 $K_i \triangleq \sqrt{\{\lambda_{11}^{\nabla} D + \sigma_0(\pi/a)^2\} / \rho - (\mu/2\rho)^2}$ である。

また、耳波および中伸びに対する張力分布を次式で与えるものとする。(Fig. 6 参照)

$$\left\{ \begin{aligned} \text{耳波の場合: } \sigma(y) &= \sigma_0 + \varepsilon \sigma_0 \{\sin(\pi y/b) - 2/\pi\} \\ &\dots \quad (37) \\ \text{中伸びの場合: } \sigma(y) &= \sigma_0 + \varepsilon \sigma_0 \{2/\pi - \sin(\pi y/b)\} \\ &\dots \quad (38) \end{aligned} \right.$$

なお、一般に形状の評価によく用いられる急峻度 ζ は摂動パラメータ ε と次の関係にある。

$$\zeta = 2/\pi \cdot \sqrt{\sigma_0 \varepsilon / E} \dots \quad (39)$$

以上の前提のもとで、板長: 1610 mm, 板幅: 886 mm, 平均張力: 10 kgf/mm² とした場合の数値例を以下に示す。

Case 1) 摂動パラメータが幅方向振動モード関数に与える影響 (Fig. 7 参照)

耳波および中伸びの場合について、摂動パラメータ ε を 0~0.1 の範囲で変化させた。 ε の増加にともなつて 1 次および 2 次の幅方向振動モード関数 $\bar{Y}_{11}^{\nabla}(y), \bar{Y}_{12}^{\nabla}(y)$ では相対的に張力の小さい部分で振幅が増大し、相対的に張力の大きい部分で振幅が減少する傾向を持つ。一方、3 次および 4 次の幅方向振動モード関数 $\bar{Y}_{13}^{\nabla}(y), \bar{Y}_{14}^{\nabla}(y)$ では、これとは逆の傾向を持つ。それ以上の高次の振動モードでは、張力分布による影響は小さい。

Case 2) 板厚が幅方向振動モード関数に与える影響

耳波の場合について、板厚 h をパラメータとして、張力分布による幅方向振動モード関数 $\{\bar{Y}_{k1}^{\nabla}(y)\}_i$ の変化の様子を Fig. 8 に示す。板厚の減少にともなつて、張力分布が各振動モードへ与える影響は増大しており、張力分布に対してより敏感になつてゆく。ただし、高次の振動モードでは、板厚による影響は小さい。

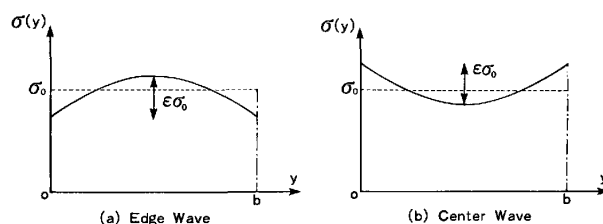


Fig. 6. Perturbed tension distribution.

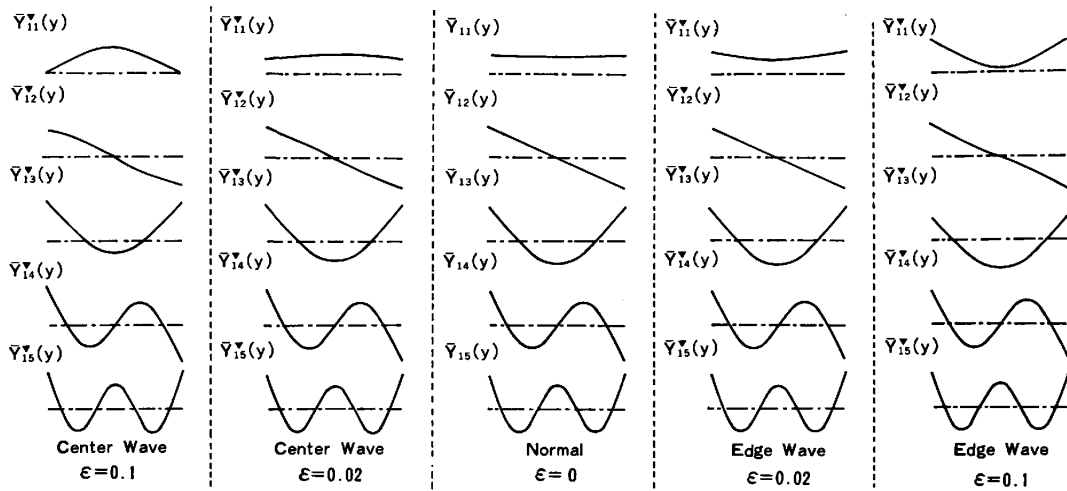


Fig. 7. Effect of ϵ -parameter for transverse vibration mode function $\bar{Y}_{11}^\nabla(y)$. ($h=1.0$ [mm])

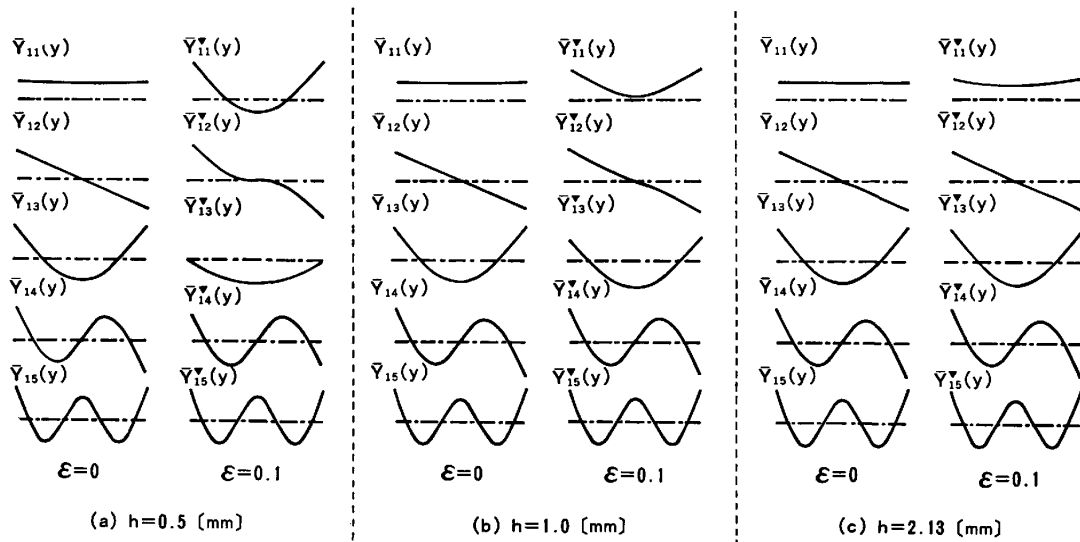


Fig. 8. Effect of plate thickness for transverse vibration mode function $\bar{Y}_{11}^\nabla(y)$ under distributed tension of edge wave.

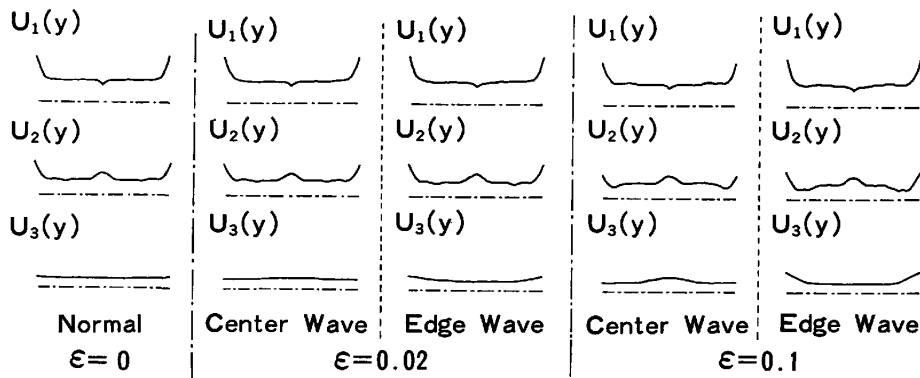


Fig. 9. Effect of ϵ -parameter for transverse vibration amplitude under distributed tension of edge wave or center wave. ($h=1.0$ [mm])

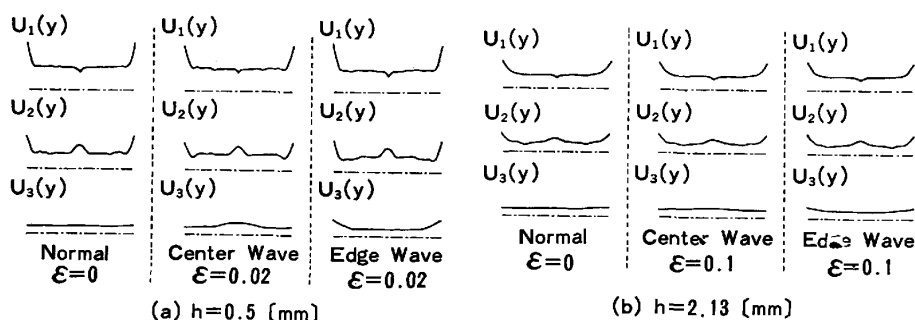


Fig. 10. Effect of plate thickness for transverse vibration amplitude under distributed tension of edge wave or center wave.

Case 3) 摂動パラメータが振幅分布に与える影響
耳波および中伸びの場合について、摂動パラメータ ϵ が振幅分布 $U_1(y)$, $U_2(y)$, $U_3(y)$ に与える影響を Fig. 9 に示す。 $U_3(y)$ は明らかに張力分布を反映しており、 ϵ の増加につれて振幅分布の変動は大きくなる。 $U_1(y)$, $U_2(y)$ については、張力分布を反映するとは言えない。

Case 4) 板厚が振幅分布に与える影響
耳波および中伸びの場合について、板厚 h をパラメータとして、張力分布による振幅分布 $U_1(y)$, $U_2(y)$, $U_3(y)$ の変化の様子を Fig. 10 に示す。板厚が小さいほど、張力分布により大きな影響を受ける。

4. 解析のまとめ

板の振動は長手方向および幅方向の種々の振動モードの重ね合わせとなっており、自由振動は時間の経過とともに減衰するので、持続的に観測される振動は、強制振動のみである。板の強制振動では、外力条件および張力分布によりその振動の様子は異なっており、解析結果より以下のことが言える。

4.1 外力条件による影響

外力条件によつて、励振される板の振動モードは異なっており、次の関数がある。

(1) 外力を加える位置については、その位置が振動の腹 (Loop) にあたる振動モードは最もよく励振され、その位置が振動の節 (Node) にあたる振動モードは全く励振されない。

(2) 外力の周波数については、共振周波数がそれに近い振動モードのみが励振され、他の振動モードはほとんど励振されない。(共振特性)

4.2 張力分布による影響

幅方向の張力分布は、幅方向振動モード関数に次のような影響を与える。

(1) 1次および2次の振動モード関数では、張力の小さい部分で振幅が増大し、張力の大きい部分で振幅が

減少する傾向を持つ。一方、3次および4次の振動モード関数では、これとは逆の傾向を持つ。さらに高次の振動モードでは、張力分布による影響は極めて小さい。

(2) 張力分布が振動モード関数に与える影響の大きさは、板厚、板長などによつて異なり、(25)式から次式で示す量に比例する。

$$\frac{\{(\text{最大張力}-\text{最小張力}) \text{ または } (\text{急峻度})\}^2}{(\text{長手方向振動モード次数})^2} \propto \frac{1}{(\text{板厚})^2 (\text{板厚})^2} \quad (40)$$

(3) 板幅、板長、長手方向振動モード次数によつて、幅方向振動モードの固有値が変化することから、張力分布が振動モード関数に与える影響は異なってくる。

一方、振動振幅を検出する原理を用いた形状計では、観測される振幅分布は各振動モードの最大振幅の重ね合わせである。この場合、張力分布と振幅分布の間には、次の関係がある。

(4) 幅方向に一様で位相がそろつていて、しかも白色雑音のようにあらゆる周波数成分を含む外力が加えられた場合には、振幅分布は張力分布を反映する。これは、1次の幅方向振動モードが相対的に強調されるためである。

(5) 張力分布が振幅分布に与える影響の大きさは、板厚、板長などに依存しており、(2)と同じ傾向を持つ。

5. 結 言

幅方向に張力分布を持つ板の振動について解析を行い、種々の前提のもとで幅方向張力分布と振幅分布の関係を求めた。この結果、外力が振動特性に決定的影響を与えており、幅方向に同位相で白色雑音のように1次あるいは2次の振動モードを相対的に強調するような外力を与えることが形状の検出に有効であるとわかつた。これを振動振幅検出型の形状計との対応で考えると、上述

のような外力を積極的に加えることにより、潜在形状に対する検出精度をより向上できることになる。このような鋼板の振動を利用した形状計は、非接触かつオンラインで形状を計測でき、また非磁性体にも適用可能であることから、今後多方面での応用が期待できる。

記 号

a : 板長 [mm]
 b : 板幅 [mm]
 D : $\triangleq Eh^2/12(1-\nu^2)$ [kgf]
 E : 板のヤング率 [kgf/mm²]
 F_0 : 強制外力の大きさ [kgf]
 h : 板厚 [mm]
 i : 幅方向振動モード次数 [-]
 k : 長手方向振動モード次数 [-]
 r : 空気抵抗係数 [kgf·s/mm³]
 u : 板の鉛直方向変位 [mm]
 \bar{u} : 板の振幅 [mm]
 x : 板の長手方向座標 [mm]
 x_0 : 外力付加位置 [mm]
 y : 板の幅方向座標 [mm]
 y_0 : 外力付加位置 [mm]
 $\bar{Y}_{ki}(y)$: 幅方向振動モード関数 [-]
 α_k : $\triangleq (k\pi/a)^2$ [1/mm²]
 β_{ki} : $\triangleq \sqrt{\lambda_{ki}}$ [1/mm²]

ε : 摂動パラメータ [-]
 ζ : 急峻度 [-]
 λ_{ki} : 固有値 [1/mm⁴]
 μ : $\triangleq r/h$ [kgf·s²/mm²]
 ν : 板のポアソン比 [-]
 π : 円周率 [-]
 ρ : 板の密度 [kgf·s²/mm⁴]
 $\sigma(y)$: 幅方向張力分布 [kgf/mm²]
 σ_0 : 幅方向平均張力 [kgf/mm²]
 Ω : 外力周波数 [rad/s]
 Ω_{ki} : 共振周波数 [rad/s]
 ω_{ki} : 板の固有振動数 [rad/s]

文 献

- 1) 山田健夫, 渡辺勝治朗, 川畑成夫, 可知康彦, 鍛本 紘: 塑性と加工, 20 (1979), p. 98
- 2) 坪井邦夫, 川畑成夫, 山田健夫: 計測と制御, 18 (1979), p. 510
- 3) 川口忠雄, 片山健史, 柏葉勝彦: 計測自動制御学会論文集, 17 (1981), p. 825
- 4) 日本鉄鋼協会共同研究会: 第 83 回計測部会 (1983 年 3 月) (株)神戸製鋼所 (私信)
- 5) 妹沢克雄: 振動論, p. 115 [岩波]
- 6) S. TIMOSHENKO: 工業振動学 (1956), p. 402 [東京図書]
- 7) 寺沢寛一: 数学概論 (応用編) (1960), p. 191 [岩波書店]

統 計

我が国における鉄鋼の研究開発投資*

近年、鉄鋼各社は新精錬プロセス、高機能鋼・清浄鋼の研究開発、工程の連続化・省力化、新製品の開発、石炭エネルギーへの転換などを積極的に推進している。このような動きを反映して、研究開発への投資も別表のごとく活発に行われている。一方米国における研究開発への投資は Battelle's Columbus Division により、1984 年度は 6 億 2 200 万ドルが予測されている。日本と米国の粗鋼生産量の比率とはほぼ同レベルにあり、意外に健闘している感がある。しかし米国の他産業比較では、宇宙産業や電気機器・情報の約 4%、自動車・その他輸送機の約 10%、石油関連製品の約

* 日本工業 ('84 2/23, 鉄連まとめ) ほか

22% 等となっており、全製造業の約 0.9% を占めるに過ぎない。我が国が鉄鋼業界の第一人者として世界をリードしていくためには、今後とも研究開発への投資が必要となる。

鉄鋼における研究開発費の推移

年 度	研究開発費 (百万円)				研究開発費 総額の推移 78=100
	総 額	基礎研究	応用研究	開発研究	
1978	107,922	6,317	27,753	73,852	100
79	119,991	7,149	29,227	83,615	111
80	147,064	8,067	34,807	104,190	136
81	169,653	11,186	43,258	115,209	157
82 (推定)	182,800	12,500	40,200	130,100	169

出所: 科学技術研究調査報告 (総理府統計局) ほか

(住友金属工業(株)制御技術センター 小野正久)