

## 論 文

## 高周波誘導炉内の液体金属の流れ

谷 口 尚 司\*・菊 池 淳\*

## Flow of Liquid Metal in High Frequency Induction Furnace

Shoji TANIGUCHI and Atsushi KIKUCHI

## Synopsis :

Flow of liquid metal in a high frequency induction furnace due to electromagnetic forces was studied theoretically.

Electromagnetic forces were calculated by LAVERS' model of which applicability to laboratory-scale induction furnaces had been confirmed experimentally in the previous study. It was shown that the force and velocity distribution under a constant geometric condition of the furnace were described by two dimensionless parameters,  $C_1(=r_1^2\mu_0(NI_m/L)^2/\rho\nu^2)$  and  $r_1/\delta(=r_1(\pi\mu_0\sigma_e f)^{1/2})$ , by considering the dimensionless equations of electromagnetic field and flow field, where  $r_1$  is the radius of melt,  $L$  the height of coil,  $N$  the number of turns in coil,  $I_m$  the coil current,  $f$  the frequency,  $\mu_0$  the magnetic permeability,  $\sigma_e$  the electrical conductivity,  $\rho$  the density, and  $\nu$  the kinematic viscosity of melt.

Velocities of liquid metal were obtained by solving Navier-Stokes equation numerically under the conditions of  $r_1/\delta=1.03-22.5$ ,  $C_1=1.6\times 10^3-2.83\times 10^9$ .

## 1. 緒 言

実験室的規模の高周波誘導炉(単相, 無鉄心型)は気-液系冶金反応の速度論的研究に広く用いられており, したがってその炉内における液体金属の流動機構を知ることは総括反応過程に含まれる液側物質移動過程を考察するうえでぜひ必要である。

しかし, 上記型式の高周波誘導炉内における液体金属の流れについて理論的に考察した研究はいくつかあるが<sup>†</sup>, 実験室的規模の炉を対象とした研究は少なく<sup>1)2)</sup>, いまだその炉内における液体金属の流動機構は明確ではない。

そこで本報では上記型式の実験室的規模の高周波誘導炉内における液体金属の流れについて理論的に考察することを目的とした。

## 2. 数値解析法

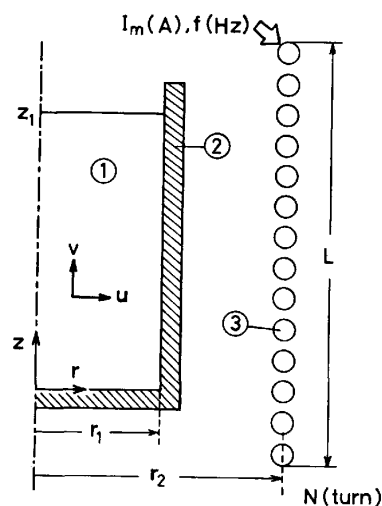
## 2.1 仮定および基礎式

Fig. 1 に本報で解析の対象とした実験室的規模の高周波誘導炉の概略を示した。

るつぼ②内の液体金属①は誘導コイル③によつて電磁攪拌されており, また液体金属の上面( $z=z_1$ )はガスと接している。

上記炉内における液体金属の流れを解析するにあたり, つぎのことを仮定した。

† 既往の研究概要を Appendix I に示した。



①Liquid metal, ②Crucible, ③Induction coil.

Fig. 1. Configuration of high frequency induction furnace.

1) 系の温度は一定である。2) 電磁場および流れの場に関する諸物性値は場所によらず一定である。

3) 流れは層流でかつ定常状態にある。4) 系は円柱軸対称である。5) 電磁場は流れに無関係である<sup>†2)</sup>。

上記1) ~ 5) の仮定のもとでは, 流れの場の基礎式は Eq. (1) で与えられる。

$$U \frac{\partial \zeta}{\partial R} + V \frac{\partial \zeta}{\partial Z} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial R^2 \zeta}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial Z^2} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial F_R^*}{\partial Z} - \frac{\partial F_Z^*}{\partial R} \right) \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここに,

†2 電磁場に及ぼす流れの影響については Appendix II で考察した。

昭和 51 年 10 月本会講演大会にて発表 昭和 58 年 10 月 11 日受付 (Received Oct. 11, 1983)

\* 東北大学工学部 工博 (Faculty of Engineering, Tohoku University, Aza-Aoba Aramaki Sendai 980)

$$\zeta \left\{ \frac{1}{R} \left( \frac{\partial U}{\partial Z} - \frac{\partial V}{\partial R} \right) \right\} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} \dots\dots\dots (2)$$

$$U \left( \frac{r_1 u}{\nu} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial Z}, \quad V \left( \frac{r_1 v}{\nu} \right) = -\frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} \dots\dots\dots (3)$$

$$F_R^* = \frac{F_r r_1^3}{\rho \nu^2}, \quad F_Z^* = \frac{F_z r_1^3}{\rho \nu^2} \dots\dots\dots (4)$$

$$F_r = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ J(r, z) \bar{B}_z(r, z) \}, \quad F_z = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ J(r, z) \bar{B}_r(r, z) \} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $\bar{B}_r$  および  $\bar{B}_z$  はそれぞれ  $B_r$  および  $B_z$  の共役複素数をあらわす。

また境界条件は Eq. (6) で示される。

$$\left. \begin{aligned} R=0, \quad Z=0 \sim Z_1 : \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) = 0 \\ R=1, \quad Z=0 \sim Z_1 : \frac{\partial \phi}{\partial Z} = \frac{\partial \phi}{\partial R} = 0 \\ Z=0, \quad R=0 \sim 1 : \frac{\partial \phi}{\partial Z} = \frac{\partial \phi}{\partial R} = 0 \\ Z=Z_1, \quad R=0 \sim 1 : \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} = \frac{\partial \phi}{\partial R} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

前報<sup>3)</sup>で、実験室的規模の高周波誘導炉内の磁場および被熱物に発生するジュール熱を測定した。その結果、流れの影響のない電磁場は被熱物が無限円柱および有限円柱の場合、それぞれ LAVERS<sup>1)</sup>の無限円柱モデルおよび有限円柱モデルで記述された。そこで本報の電磁場を LAVERS の有限円柱モデルで記述した。

また、前報<sup>3)</sup>では装置条件一定の場合、ジュール熱  $W$  に関する無次元量は Eq. (7) で示されるように、 $r_1/\delta$  の関数であることが示された。

$$\frac{\sigma_e W}{r_1 (NI_m/L)^2} = g_w(r_1/\delta) \dots\dots\dots (7)$$

ここに  $g_w$  は  $r_1/\delta$  に関する関数で、 $\delta$  は Eq. (8) で定義される表皮の厚さ (skin depth) である。

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi \mu_e \sigma_e f}} \dots\dots\dots (8)$$

前報<sup>3)</sup>と同様に  $F_r, F_z$  を無次元化すると、それらの無次元量は装置条件一定の場合、Eq. (9) で示されるように  $r_1/\delta$  の関数として与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{r_1 F_r}{\mu_e (NI_m/L)^2} = f_r(R, Z; r_1/\delta) \\ \frac{r_1 F_z}{\mu_e (NI_m/L)^2} = f_z(R, Z; r_1/\delta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

したがって、Eq. (4) における  $F_R^*, F_Z^*$  は Eq. (10) のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} F_R^* = C_I \cdot f_r(R, Z; r_1/\delta) \\ F_Z^* = C_I \cdot f_z(R, Z; r_1/\delta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $C_I$  はコイル電流  $I_m$  などを含む無次元量で、Eq. (11) で与えられる<sup>†3)</sup>。

$$C_I = \frac{r_1^2 \mu_e (NI_m/L)^2}{\rho \nu^2} \dots\dots\dots (11)$$

また、Eq. (7) と Eq. (11) から Eq. (12) が得られる。

$$W^* \left( = \frac{r_1 \mu_e \sigma_e W}{\rho \nu^2} \right) = C_I \cdot g_w(r_1/\delta) \dots\dots\dots (12)$$

Eq. (1)~Eq. (4) および Eq. (10) から、流速  $U(R, Z), V(R, Z)$  は装置条件一定の場合、 $r_1/\delta$  と  $C_I$  の2つの無次元パラメータで規定されることがわかる。

### 2.2 計算法および計算条件

Eq. (1) を upwind 法<sup>5)6)</sup>により、その他の式を中心差分法によりそれぞれ差分化した。得られた式をSOR法により解いた。

本報では前報<sup>3)4)</sup>の装置条件 ( $r_2/r_1=2.7, L/r_1=7, z_1/r_1=3$ )で、流れに及ぼす  $r_1/\delta$  と  $C_I$  の影響を検討する。その条件は以下のとおりである<sup>†4)</sup>。

- 1)  $C_I=1.6 \times 10^3, r_1/\delta=1.03 \sim 22.5$
- 2)  $r_1/\delta=1.03, C_I=1.6 \times 10^3 \sim 2.83 \times 10^9$
- 3)  $r_1/\delta=3.1, C_I=1.6 \times 10^3 \sim 1.97 \times 10^8$
- 4)  $r_1/\delta=22.5, C_I=1.6 \times 10^3 \sim 6.4 \times 10^5$

なお、溶鉄 (Fe-3% C, 1773 K) の場合、 $r_1/\delta=1.03, 3.1, 22.5$  および  $C_I=1.6 \times 10^3 \sim 2.83 \times 10^9$  はそれぞれ  $f=1, 9.1, 480$  kHz および  $I_m=1 \sim 1330$  A に相当する。また上記の計算条件下では高周波加熱によつて固体金属が溶解しない場合もある。この場合には抵抗加熱その他で金属を溶解している場合を考え、またそれによつて電磁場の諸量は変化しないと考えている。

計算に用いた格子点間隔の大きさは以下のとおりである。

- a)  $r_1/\delta \leq 7.26 : \quad \Delta R = \Delta Z = 0.05$
- b)  $r_1/\delta \geq 7.26 :$ 
  - $R \leq 0.75, 0.25 \leq Z \leq 2.75 : \Delta R = \Delta Z = 0.05$
  - $R \geq 0.75 : \Delta R_i = 0.83 \Delta R_{i-1}$
  - $Z \leq 0.25 : \Delta Z_{k-1} = 0.83 \Delta Z_k$
  - $Z \geq 2.75 : \Delta Z_k = 0.83 \Delta Z_{k-1}$

ここに ( $i, k$ ) は格子点をあらわす。

計算の収束条件としては Eq. (13) を用いた。

$$|\zeta_{i,k}^{n+1} - \zeta_{i,k}^n|_{\max} / |\zeta_{i,k}^{n+1}| < 10^{-4} \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 $n$  は反復数で、その最大は約 1500 回であった。

<sup>†3)</sup>  $H_0 = NI_m/L$  とおけば、 $C_I$  は電磁流体力学<sup>7)</sup>における磁気プラントル数  $Pr_m (= \nu \mu_e \sigma_e)$  と Hartmann 数  $Ha (= \mu_e H_0 r_1 \sqrt{\sigma_e / \rho \nu})$  によつて  $C_I = Ha^2 / Pr_m$  とあらわせる。

<sup>†4)</sup>  $r_1/\delta=22.5, C_I=2.2 \times 10^7$  は前報<sup>4)</sup>の実験条件の1つであるが、この場合には流れの解は得られなかった。

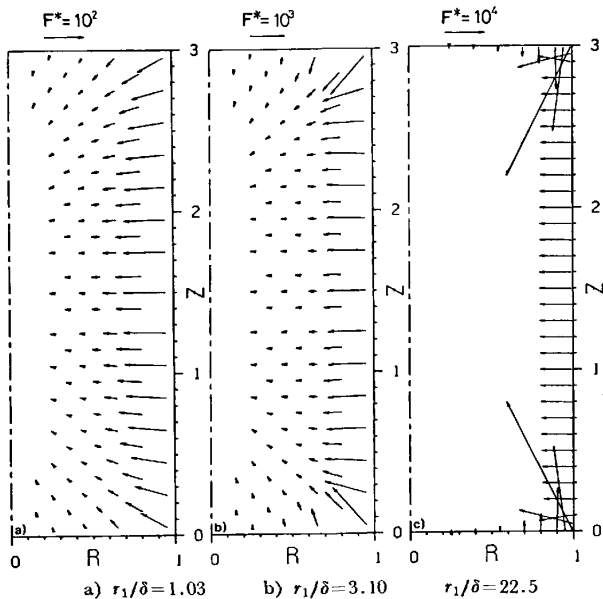


Fig. 2. Distribution of electromagnetic forces ( $C_I = 1.6 \times 10^3$ ).

計算には東北大学大型計算機センター ACOS シリーズ 77 NEAC システム 700 を用いた。計算に要した時間は最大で約 15 min であった。

### 3. 計算結果および考察

流れに関して考察する前に、流れの駆動力である電磁力について考察する。

#### 3.1 電磁力分布および $r_1/\delta$ の臨界値

$C_I = 1.6 \times 10^3$  の場合の電磁力の分布を Fig. 2 に示した。図より、いずれの  $r_1/\delta$  の場合も電磁力は  $Z = 1.5$  (液体金属の高さの中心) に関して対称で、また液体金属を圧縮する向きに作用しているのがわかる。また周波数の高い  $r_1/\delta = 22.5$  の場合、電磁力は液体金属の内部にはほとんど作用せず、側面の近傍に集中しており、表皮効果 (skin effect) の著しいことがわかる。

電磁力の大きさ  $F^* (= \sqrt{(F_R^*)^2 + (F_Z^*)^2})$  に対する  $r_1/\delta$  の影響<sup>†5</sup> をみるために、1 例として  $Z = 1.5$  における  $F^* (= -F_R^*)$  と  $r_1/\delta$  との関係を Fig. 3 に示した。図より、 $-F_R^*|_{Z=1.5}$  の  $r_1/\delta$  に対する依存性はいずれの  $R$  の場合も  $r_1/\delta = 2 \sim 3$  を境としてことなっているのがわかる。

ところで、電磁場に及ぼす  $r_1/\delta (= r_1 \sqrt{\pi \mu_0 \sigma_0 f})$  すなわち周波数  $f$  の影響についてつぎのことが知られている<sup>9)</sup>。すなわち、無限長のコイル内に無限長の被熱物を設置した場合、被熱物単位長さ当たりが発生するジュール熱は  $f$  が小さく表皮効果が無視しうる場合は  $f^2$  に比例し、一方  $f$  が大きく表皮効果が著しい場合には  $f^{1/2}$  に比例する。そしてこの両特性の分岐点における周波数

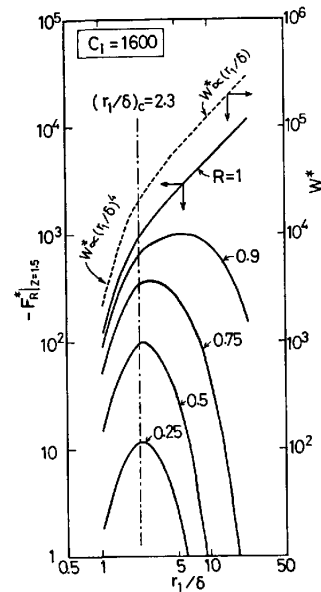


Fig. 3. Effect of  $r_1/\delta$  on the values of  $-F_R^*|_{Z=1.5}$  and  $W^*$  ( $C_I = 1.6 \times 10^3$ ).

すなわち臨界周波数は  $r_1/\delta$  の臨界値  $(r_1/\delta)_c = 2.25 (\approx 2.3)$  から算出される周波数で与えられる。

有限コイル内に有限長の被熱物が設置されている本報の条件の場合、ジュール熱と  $f$  との関係は不明であるので、 $W^*$  と  $r_1/\delta$  との関係を求めてみた。その結果、Fig. 3 より、本報の条件の場合も  $r_1/\delta$  の臨界値  $(r_1/\delta)_c$  は約 2.3 として求められ、また  $W^*$  に対する  $r_1/\delta$  すなわち  $f$  の依存性も上述の結果と一致した。なお、Fig. 3 は  $C_I = 1.6 \times 10^3$  の場合であるが、Eq. (12) より  $W^*$  は  $C_I$  に比例するので、 $C_I$  が  $1.6 \times 10^3$  以外の場合も  $W^*$  に対する  $r_1/\delta$  の依存性は Fig. 3 のそれと同じである。

前述の  $-F_R^*|_{Z=1.5}$  の  $r_1/\delta$  に対する依存性も  $r_1/\delta = (r_1/\delta)_c (\approx 2.3)$  を境としてことなっているとみることができる。

以上より、液体金属の流動状態も  $r_1/\delta = (r_1/\delta)_c$  を境としてことなると類推される。

#### 3.2 フローパタンおよび速度分布

フローパタンの計算結果を Fig. 4~Fig. 7 に示した。また、Fig. 4 a), e) および i) の場合の速度分布を Fig. 8 に示した。これらの図より、流れにおよぼす  $r_1/\delta$ ,  $C_I$  などの影響についてみる。

##### 3.2.1 $r_1/\delta$ の影響 ( $C_I = 1.6 \times 10^3$ の場合)

Fig. 4 より、 $r_1/\delta = 1.03$  および 1.45 のいずれの場合も、液体金属の流れは上部で時計まわり、下部で反時計まわりのほぼ対称な 2 つの循環流からなっている。し

<sup>†5</sup>  $F^*$  と  $C_I$  との関係は Eq. (10) より明らかなように、 $F^* \propto C_I$  という関係で与えられる。

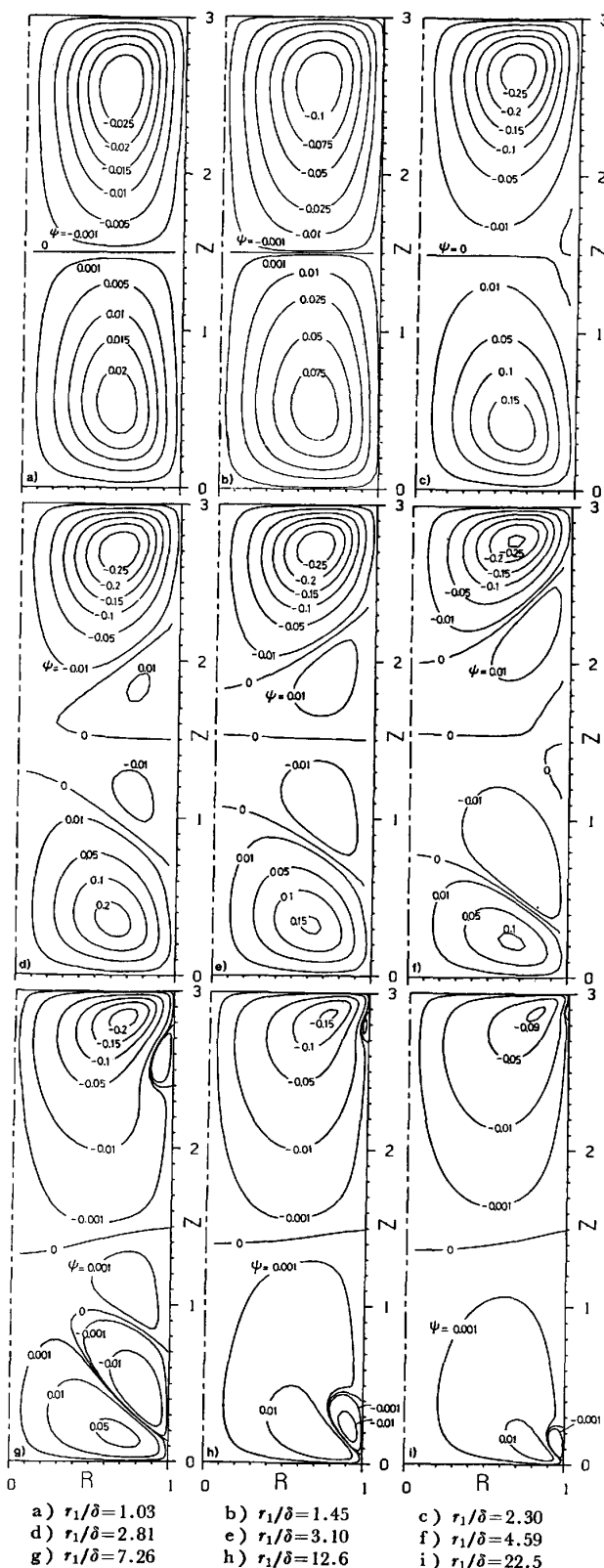


Fig. 4. Flow patterns obtained for various values of  $r_1/\delta$  ( $C_1=1.6 \times 10^9$ ).

しかし、 $r_1/\delta$  が前述の臨界値  $(r_1/\delta)_c (\approx 2.3)$  になると、新たな2つの流れが生じ、それらは  $r_1/\delta$  の増加につれて大きく発達するとともに主流の2つの循環流はそれぞ

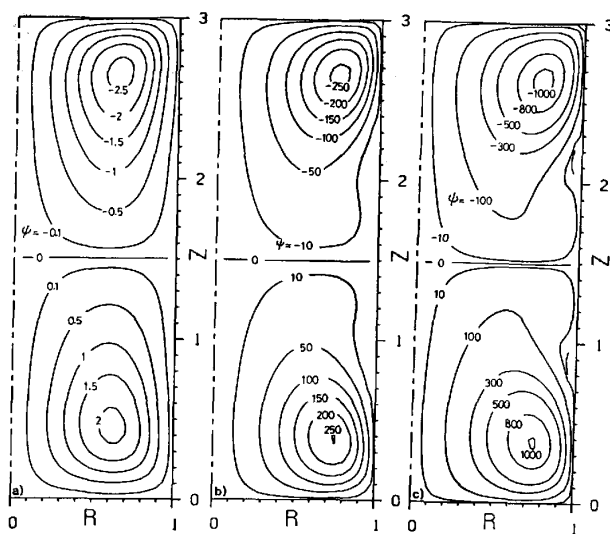


Fig. 5. Flow patterns obtained for various values of  $C_1$  ( $r_1/\delta=1.03$ ).

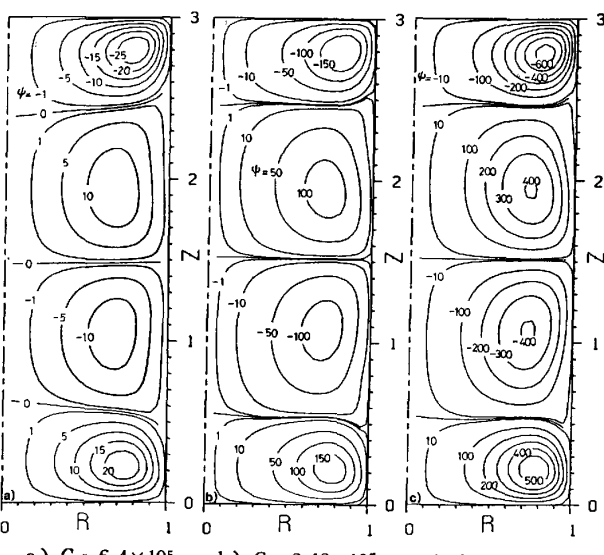
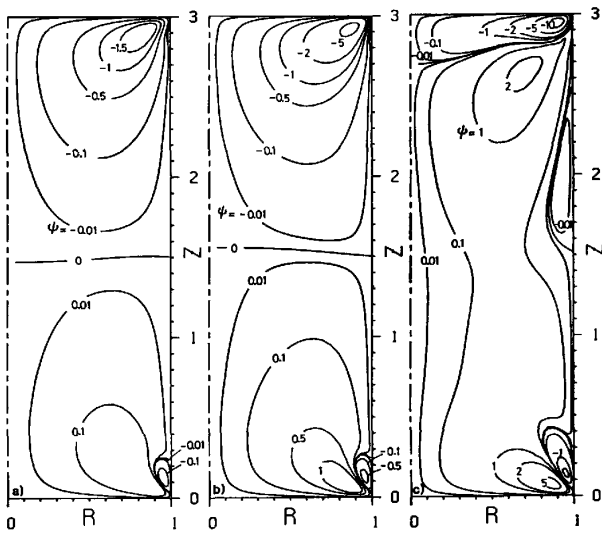


Fig. 6. Flow patterns obtained for various values of  $C_1$  ( $r_1/\delta=3.10$ ).

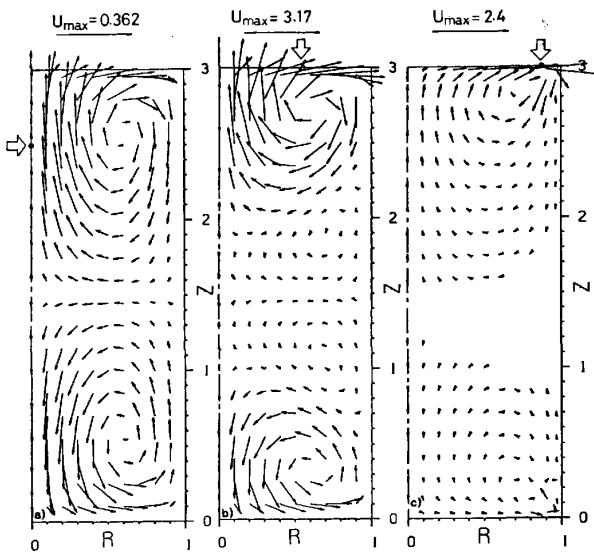
れ上方および下方に移動するのがみとめられる。 $r_1/\delta=4.59$  になると、また新たな流れが生じ、以後  $r_1/\delta$  の増加とともに循環流の数、形などが複雑に変化している。

つぎに Fig. 8 より、 $r_1/\delta=1.03$  の場合、系の中間部と上、下部とでは流速の差が小さく、系全体がほぼ均一に流動しているのがわかる。しかし、 $r_1/\delta=3.10$  では系の中間部と上、下部とでは流速の差が大きくなり、流動状態が不均一となっている。この流動状態の不均一性は  $r_1/\delta=22.5$  になるといつそう顕著である。

また Fig. 8 には流速の最大値  $U_{\max} = (U^2 + V^2)^{1/2}_{\max}$  を示す位置を示した。この位置は  $r_1/\delta=1.03$  の場合は



a)  $C_I = 4.0 \times 10^4$  b)  $C_I = 1.6 \times 10^5$  c)  $C_I = 6.4 \times 10^5$   
 Fig. 7. Flow patterns obtained for various values of  $C_I$  ( $r_1/\delta = 22.5$ ).



a)  $r_1/\delta = 1.03$  b)  $r_1/\delta = 3.10$  c)  $r_1/\delta = 22.5$   
 Fig. 8. Velocity distributions of liquid metal ( $C_I = 1.6 \times 10^5$ ).

$R=0$  の上部にあるが,  $r_1/\delta = 3.10$  では気-液界面上の  $R=0.5$  の近くにある. この位置は  $r_1/\delta = 22.5$  になると, 壁面近くに移行している.

流れにおよぼす  $r_1/\delta$  の影響を明確に知るために, 1例として,  $R=0.5$  における気-液界面流速  $U_s$  と  $r_1/\delta$  との関係を求め, それを Fig. 9 に示した. また参考のために, Fig. 9 には  $U_{max}$  および流れの関数の最大値  $|\psi|_{max}$  も示した. 図より,  $U_s|_{R=0.5}$  は  $r_1/\delta < (r_1/\delta)_c = 2.3$  では  $r_1/\delta$  とともに急激に大きくなっているが,  $r_1/\delta > (r_1/\delta)_c$  では  $r_1/\delta$  とともにわずかに大きくなり最大となつたのち, 小さくなつていくのがわかる. この  $r_1/\delta$  依存性は  $U_{max}$ ,  $|\psi|_{max}$  の場合も同様である.

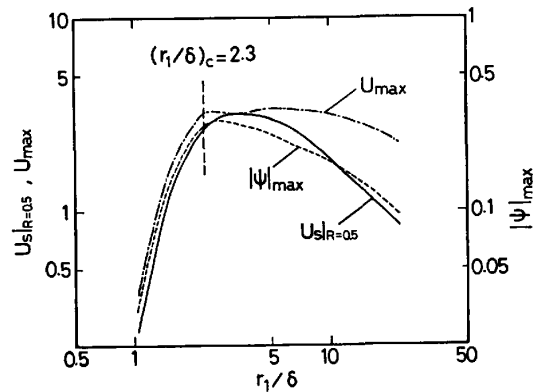


Fig. 9. Effect of  $r_1/\delta$  on the values of  $U_s|_{R=0.5}$ ,  $U_{max}$  and  $|\psi|_{max}$  ( $C_I = 1.6 \times 10^5$ ).

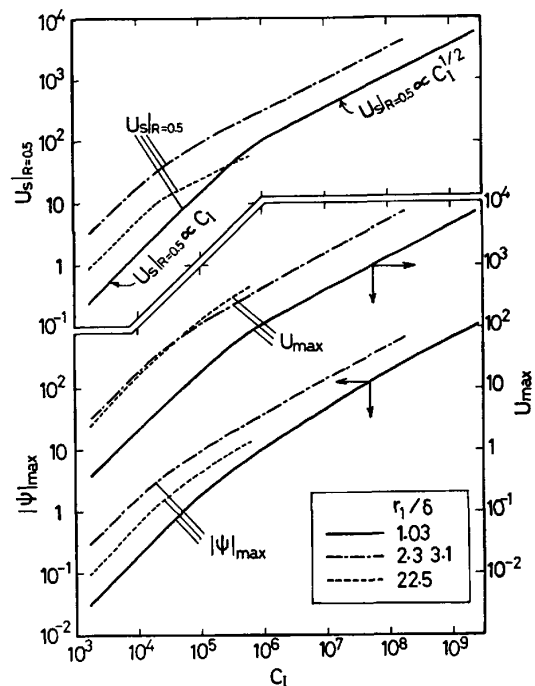


Fig. 10. Effect of  $C_I$  on the values of  $U_s|_{R=0.5}$ ,  $U_{max}$  and  $|\psi|_{max}$ .

以上のように流れの特性が  $r_1/\delta = (r_1/\delta)_c$  を境としてことなっているが, これは前述のごとく電磁場の特性が  $(r_1/\delta)_c$  を境としてことなっているためである.

### 3.2.2 $C_I$ の影響 ( $r_1/\delta = 1.03 \sim 22.5$ の場合)

$r_1/\delta$  が  $(r_1/\delta)_c$  より小さい 1.03 の場合 (Fig. 4a), Fig. 5), 2つの循環流が生じており, それらの流れはゆるやかである.  $C_I$  が大きくなると, 流れが激しくなり,  $C_I = 2.83 \times 10^5$  では新たな流れが生成する傾向が認められる.

$r_1/\delta$  が  $(r_1/\delta)_c$  より大きい 3.10 の場合 (Fig. 4e), Fig. 6), 計算範囲の  $C_I$  では4つの循環流が生じており, それらの流れは  $C_I$  とともに激しくなっている.

$r_1/\delta$  が 22.5 の場合 (Fig. 4 i), Fig. 7),  $C_I = 1.6$

$\times 10^2 \sim 1.6 \times 10^5$  では2つの大きな循環流の他に1つの小さい循環流の生成もみとめられる。また  $C_I = 6.4 \times 10^5$  の場合のフローパタンの傾向は  $C_I < 1.6 \times 10^5$  の場合のそれと著しくことなっている。

流れにおよぼす  $C_I$  の影響を明確に知るために、1例として  $U_s|_{R=0.5}$  と  $C_I$  との関係を求め、それを Fig. 10 に示した。この場合も参考のために  $U_{max}$  および  $|\phi|_{max}$  も示した。図より、 $U_s|_{R=0.5}$  はいずれの  $r_1/\delta$  の場合も  $C_I$  とともに大きくなっている。またその値は  $r_1/\delta = 2.3 \sim 3.1$  でもつとも大きな値となっている。 $U_{max}$  および  $|\phi|_{max}$  の  $C_I$  に対する依存性も  $U_s|_{R=0.5}$  の場合と同様である。

また、Fig. 10 より  $U_s|_{R=0.5}$  は  $C_I$  が小さいときは  $C_I$  に比例し、 $C_I$  が大きいときは  $C_I^{1/2}$  に比例することがわかる。これらの比例関係からつぎの比例関係が得られる。 $C_I$  が小さいとき：

$$\mu \frac{u_s|_{R=0.5}}{r_1} \propto \mu_e (NI_m/L)^2 \propto r_1 F \dots (14)$$

$C_I$  が大きいとき：

$$\rho (u_s|_{R=0.5})^2 \propto r_1 F \dots (15)$$

すなわち、上式より  $C_I$  が小さいときは粘性力が電磁力とつり合い、流れは粘性抵抗支配となり、一方  $C_I$  が大きいときは慣性力が電磁力とつり合い、流れが慣性抵抗支配となることがわかる。

### 3.2.3 $W^*$ の影響 ( $r_1/\delta = 1.03 \sim 22.5$ の場合)

高周波誘導炉内では誘導攪拌とともに誘導加熱がおこなわれるが、これは被熱物に発生するジュール熱  $W$  によつてなされる。

ところで、前述のように流れは  $r_1/\delta$  および  $C_I$  でことなるが、Eq. (12) より明らかなように  $W^*$  もこれら2つの無次元量で変化する。つまり、系周囲の伝熱条件が同一であれば系内温度は  $r_1/\delta$  および  $C_I$  で変化することになる。逆に系周囲の伝熱条件を一定にして系内温度を変えることは、それに応じて攪拌力も変化していることになる<sup>†6</sup>。

液側物質移動が関与するガス-溶鉄間反応の総括反応速度の温度依存性を検討する際には、上記の点を十分留意しておく必要がある。

$U_s|_{R=0.5}$  と  $C_I$  との関係を  $U_s|_{R=0.5}$  と  $W^*$  との関係に点線しなおすと、Fig. 11 のようになる<sup>†7</sup>。 $U_s|_{R=0.5}$  に対する  $W^*$  の依存性は  $C_I$  の依存性と同様である。

しかし Fig. 10 の場合とことなり、 $U_s|_{R=0.5}$  は  $r_1/\delta$  が

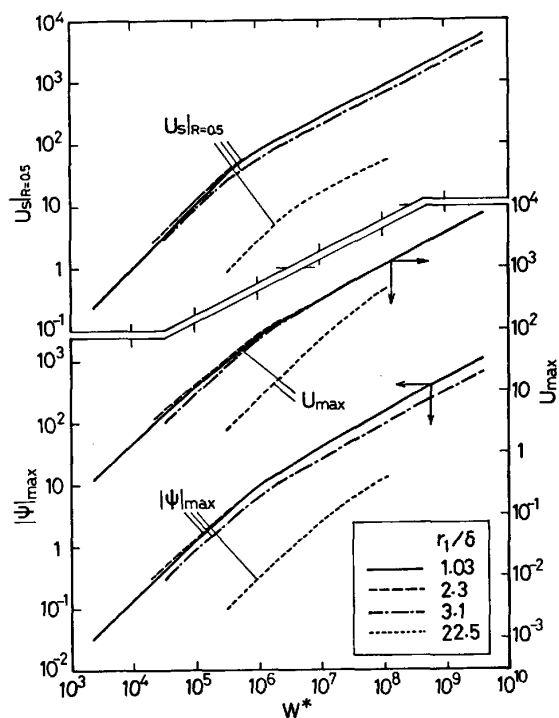


Fig. 11. Effect of  $W^*$  on the values of  $U_s|_{R=0.5}$ ,  $U_{max}$  and  $|\phi|_{max}$ .

小さくなるにつれて大きくなり、 $r_1/\delta = 1.03 \sim 2.3$  で一定値になっている。 $U_{max}$  および  $|\phi|_{max}$  に対する  $W^*$  の依存性も  $U_s|_{R=0.5}$  の場合と同様である。

## 4. 結 論

実験室的規模の高周波誘導炉内における液体金属の流れを装置条件一定のもとで数値的に検討した。流れの駆動力である電磁力としては LAVERS の有限円柱モデルの解析解を用いた。

得られた結果を要約すると以下のようなになる。

- (1) 無次元電磁力  $F_R^*$ ,  $F_Z^*$  および無次元流速  $U$ ,  $V$  は  $r_1/\delta$  および  $C_I$  の2つの無次元量で規定される。
- (2) 電磁場および流れの場の特性は  $r_1/\delta = (r_1/\delta)_c$  を境としてことなる。 $(r_1/\delta)_c$  の値は約 2.3 として与えられる。
- (3) 電磁力  $F_R^*$ ,  $F_Z^*$  は  $C_I$  に比例する。
- (4)  $U_s|_{R=0.5}$  は  $C_I$  が小さいときは  $C_I$  に比例し、一方  $C_I$  が大きいときは  $C_I^{1/2}$  に比例する。これより、 $C_I$  が小さいときは流れは粘性抵抗支配で、一方  $C_I$  が大きいときは慣性抵抗支配であることが示される。
- (5) 系周囲の伝熱条件と  $r_1/\delta$  を一定にして、液体金属の温度を変えることは  $W^*$  を変えることに相当する。この場合、 $W^*$  の変化に応じて液体金属の流動状態も変化する。

<sup>†6</sup> 本報では系内温度を一定と仮定しているため、 $r_1/\delta$  および  $C_I$  に応じて系周囲の伝熱条件を変えていることになる。

<sup>†7</sup> 系周囲の伝熱条件を一定にすると、Fig. 11 は系内の温度の影響をあらわす図とみることもできる。

Table A1. Studies on the electromagnetic field and the flow field.

Investigator	Electromagnetic field	Flow field	Liquid	$r_1/m$	$f/Hz$	$r_1/\delta$
Reichelt <sup>(9)10)</sup>	Numerical solutions	Numerical solutions of NS*	Liquid iron	0.7 0.45	10 150	3.8 9.2
Tarapore and Evans <sup>11)12)</sup>	Numerical solutions	Numerical solutions of the turbulent model	Mercury Liquid iron	0.104 0.145 0.61	$3 \times 10^3$ $3 \times 10^3$ 60	11.7 16.3 7.9
Lavers and Biringer <sup>13)</sup>	Analytical solutions	Numerical solutions of NS**	Liquid lead, liquid tin	$r_2/r_1=1.2\sim 1.65$ $L/r_1=1.6\sim 2.5$ $z_1/r_1=1.25\sim 1.88$		0.77~12
This study	Analytical solutions	Numerical solutions of NS	Liquid metal	$r_2/r_1=2.7$ $L/r_1=7$ $z_1/r_1=3$		1.03~22.5

\* NS=Navier-Stokes equation.  
\*\* The inertia terms in NS were neglected.

Table A2. Predicted values of  $\eta_{max}$ .

$r_1/\delta$	$C_1$	$\eta_{max}$	$R$	$Z$
1.03	$1.6 \times 10^3$	$3.8 \times 10^{-7}$	0.05	3.0
	$2.8 \times 10^9$	$6.6 \times 10^{-3}$	0.55	3.0
3.10	$1.6 \times 10^3$	$4.9 \times 10^{-7}$	0.25	3.0
	$2.0 \times 10^8$	$8.0 \times 10^{-4}$	0.75	3.0
22.5	$1.6 \times 10^3$	$1.4 \times 10^{-8}$	0.93	2.9
	$6.4 \times 10^5$	$2.3 \times 10^{-6}$	0.95	3.0

$$\eta_{max} = \left| \frac{C_{conv}}{C_{conv} + C_{diff}} \right|_{max} \dots \dots \dots (A-3)$$

その結果, Table A2 に示すように,  $r_1/\delta$  一定の場合, 当然であるが  $C_1$  が大きい方が  $\eta_{max}$  が大きくなっている。しかし, 本報の計算条件では  $\eta_{max} \ll 1$  となっている。

Appendix I. 既往の研究

単相, 無鉄心型誘導炉の電磁場および液体金属の流れに関する既往の研究概要を Table A1 に示した。

既往の研究のなかでは LAVERS ら<sup>13)</sup>の研究における装置条件および  $r_1/\delta$  の計算条件が最も広範である。しかし彼らの流れの計算結果は, 流れの基礎式における慣性項が無視しうる条件で求められたものである。

Appendix II. 電磁場におよぼす流れの影響

電磁場の基礎式は Eq. (A-1) で与えられる。

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_e \sigma_e} \nabla^2 \mathbf{A} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \dots \dots \dots (A-1)$$

ここに  $\mathbf{A}$  はベクトルポテンシャルである ( $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ )。円柱軸対称系のベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を  $\mathbf{A} = A(r, z)e^{-j\omega t}$  とおくと, Eq. (A-1) より Eq. (A-2) が得られる。

$$j\omega A(r, z) = C_{diff} + C_{conv} \dots \dots \dots (A-2)$$

ここに,

$$C_{diff} = \frac{1}{\mu_e \sigma_e} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} A(r, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} A(r, z) - \frac{1}{r^2} A(r, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A(r, z) \right]$$

$$C_{conv} = -v \frac{\partial}{\partial z} A(r, z) + u \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A(r, z)$$

LAVERS<sup>1)</sup> は  $C_{conv} = 0$  として Eq. (A-2) の解析解を得ており, 本報でもその解析解を用いている。

いま, LAVERS の解析解と本報の  $u, v$  の数値解を用いて, Eq. (A-3) で定義した  $\eta_{max}$  を計算してみた。

また,  $\eta_{max}$  を示す位置 ( $R, Z$ ) も求めた。

記 号

- $A$  = ベクトルポテンシャルの円周方向成分 (Wb/m)
- $B$  = 磁束密度 (Wb/m<sup>2</sup>)
- $C_1$  = コイル電流に関する無次元量 (Eq. (11)) (-)
- $F$  = 電磁力 (N/m<sup>3</sup>)
- $F^* = Fr_1^3 / \rho \nu^2$  (-)
- $f$  = 周波数 (Hz)
- $I_m$  = コイル電流の最大値 (A)
- $i$  = 半径方向の格子点番号 (-)
- $J$  = 渦電流密度 (A/m<sup>2</sup>)
- $j$  = 虚数単位 (-)
- $k$  = 軸方向の格子点番号 (-)
- $L$  = コイルの高さ (m)
- $N$  = コイルの巻数 (ターン)
- $n$  = 計算の反復数 (-)
- $P = pr_1^2 / \rho \nu^2$  (-)
- $p$  = 圧力 (Pa)
- $R = r/r_1$  (-)
- $Re$  = 複素数の実数部 (-)
- $r$  = 液体金属の中心から半径方向の距離 (m)
- $r_1$  = 液体金属の半径 (m)
- $r_2$  = コイルの半径 (m)
- $U = r_1 u / \nu$  (-)
- $u$  = 半径方向の流速 (m/s)
- $V = r_1 v / \nu$  (-)
- $v$  = 軸方向の流速 (m/s)
- $W$  = 被熱物に発生するジュール熱 (J/s)
- $W^* = r_1 \mu_e \sigma_e W / \rho \nu^2$  (-)
- $Z = z/r_1$  (-)
- $Z_1 = z_1/r_1$  (-)
- $z$  = 液体金属の底面より軸方向の距離 (m)
- $z_1$  = 液体金属の高さ (m)
- ギリシャ文字
- $\delta$  = 表皮の厚さ (m)
- $\mu$  = 粘性係数 (kg/m·s)
- $\mu_e$  = 透磁率 (H/m)
- $\rho$  = 密度 (kg/m<sup>3</sup>)
- $\nu$  = 動粘度 (m<sup>2</sup>/s)

$\zeta$ = 渦度 (Eq. (2))	(-)
$\phi$ = 流れの関数 (Eq. (3))	(-)
$\sigma_e$ = 導電率	( $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ )
$\omega = 2\pi f$	(1/s)
ベクトル	
$\mathbf{A}$ = ベクトルポテンシャル	(Wb/m)
$\mathbf{B}$ = 磁束密度	(Wb/m <sup>2</sup> )
$\mathbf{v}$ = 流速	(m/s)
$\nabla$ = ハミルトンの演算子	(m <sup>-1</sup> )
<b>添 字</b>	
$r, R$ = 半径方向成分	
$z, Z$ = 軸方向成分	
max = 最大値	
$s$ = 液体金属表面 ( $z=z_1$ ) における値	

## 文 献

- 1) *J. D. LAVERS*: Diss Thesis, Univ. Toronto (1970)
- 2) *J. D. LAVERS* and *P. P. BIRINGER*: *Elektrowärme*, **29** (1970), p. 232
- 3) 谷口尚司, 渡辺 実, 菊池 淳, 只木楨力: 鉄と鋼, **66** (1980), p. 363
- 4) 谷口尚司, 菊池 淳, 前田四郎: 鉄と鋼, **65** (1979), p. 1455
- 5) *A. K. RUNCAL*: *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **4** (1972), p. 541
- 6) *H. Z. BARAKAT* and *J. A. CLARK*: *Proc. 3rd Int. Heat Transf. Conf.*, **2** (1966), p. 152
- 7) *A. B. CAMEL*: プラズマ物理学と電磁流体力学 (橋藤雄訳) (1966), p. 269 [好学社]
- 8) 高橋勘次郎, 深町成一, 渡辺哲哉, 久保田喜郎: 高周波の工業への応用 (1979), p. 6 [東京電機大学出版局]
- 9) *K. REICHEL*: *Elektrowärme*, **26** (1968), p. 113
- 10) *K. REICHEL*: *Sci. Electrica*, **16** (1970), p. 126
- 11) *E. D. TARAPORE* and *J. W. EVANS*: *Metall. Trans.*, **7B** (1976), p. 343
- 12) *E. D. TARAPORE*, *J. W. EVANS*, and *J. LANGFELDT*: *Metall. Trans.*, **8B** (1977), p. 179