



UDC 539.3 : 51

境界要素法の二次元弾性問題への応用

木原 諄 二*・相澤 龍彦*2

Some Applications of Boundary Element Method for Two Dimensional Elasticity

Junji KIHARA and Tatsuhiko AIZAWA

1. はじめに

20 数年前, 4 人の技術者¹⁾の手で初めて実際的な問題に適用された有限要素法 (FEM) は, 構造の強度や変形の解析をはじめとし, 流体力学, 音響工学, 伝熱工学, 熱力学における解析によく用いられるようになってきた。その間, 有限要素法は種々の面で改良と向上とがなされてきたが, いくつかの問題点を有していることが明らかになった。その中で最大の問題点は, 要素の節点番号と節点座標といった入力データを作成する作業の冗長さと 3 次元解析の場合の過大な計算機コストに関するものである。しかしながら, これらの問題点は, まず前者については, グラフィック・システムを基調としたマン・マシン系による前処理システムの整備, 後者に対しては計算機の大容量化と高速化によつて対処しなければならないが, これらは現在における計算機の発達速度から考えて近い将来解決を迎えることが期待される。

一方, 工場・研究室などにおいてハンディな科学技術計算をしなければならない技術者には, それに相応しいプログラムの開発も要請されている。そこで, 有限要素法の改良にとどまらず, 原理は同じとも考えられるが他の数値解析法の開発も指向されて来た。ここで紹介する境界要素法 (BEM) はその有力なものの一つである。

2. 境界要素法の歴史

境界要素法の名称で呼ばれるようになったのは, 近年のことであるが, この手法は種々の分野で独自に活用されて来た方法である。

航空工学においては, 機体の翼まわりの流れの解析について比較的早い時期から, 境界積分法という方法が用いられてきた。この方法の概略を述べると次のようになる。空気の流れの支配方程式をラプラス方程式とすれば, これをグリーンンの公式により境界上 (翼表面上) で

定まる量であらわされる積分方程式に変換することができる。そして翼表面を離散化して解析する。もし 2 次元問題であればグリーンンの公式に速度ポテンシャル ϕ と 2 次元ラプラス方程式の特解 $\ln(1/r)$ (r : 距離) を代入することにより解くべき積分方程式を得る。次に境界線を多数の線要素 (たとえば直線要素や円弧要素) に分割し, 各線要素内で, ϕ , $\partial\phi/\partial n$ (ϕ の線方向の勾配) を線分の長さの関数 (たとえば一次式) で近似する。この時前者の離散化を直接法 (Direct Method), 後者の離散化を間接法 (Indirect Method) という。最後に離散化された積分方程式を選点法 (Collocation Method) により解くことにする。

海洋工学においても, 同様な手法が特異点分布法と命名され, 浅海領域における海洋構造物に働く波浪外力の推定などの水面波問題の線形解析手法として広く用いられている。特異点分布法では, ϕ を変数として用いる方法と渦度 ω を変数として用いる方法と, また, これらの両者を併用することも行われる。

固体力学においては, 境界積分法は比較的古くから研究され, MIKHLIN²⁾ や MUSKHELISVILI などの文献³⁾にも既にその記述を見出すことができる。ポテンシャル問題で使用されてきた積分方程式の選点法に基づく離散的な手法が応力分析の分野で最初に検討されたのは MASSONNETS⁴⁾ によるものと思われる。その後 RIZZO⁵⁾ が 2 次元弾性問題に拡張し, さらに CRUSE⁶⁾ が 3 次元弾性問題への適用を行つたが, 角点や尖点における表面力の不連続性の取り扱いおよび影響係数マトリックスの計算に多大な計算時間を要することなどの困難さのために 3 次クラック問題等を含めて多くの場合有限要素法より効率が悪かつた。これに対して, 境界要素として曲面を近似できる高次要素への改良が試みられ, LACHT と WATSON⁷⁾, RICADELLA⁸⁾, CRUSE⁹⁾ は有限要素法で使用されるアイソパラメトリック要素を用いた解析を行つている。こ

昭和 55 年 10 月 30 日受付 (Received Oct. 30, 1980) (依頼解説)

* 東京大学工学部 工博 (Faculty of Engineering, The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo Bunkyo-ku 113)

*2 東京大学宇宙航空研究所 工博 (Institute of Space and Aeronautical Science., The University of Tokyo)

他、2次元および3次元の弾性クラック解析では、複数欠陥の強度および安定性の評価を中心に境界要素法が使用されており、その詳細については「割れ」挙動の解析的評価と関連して別の機会に報告したい。また我国における境界要素法を用いた弾性問題の解析は西谷ら¹⁰⁾によつて行われている。彼らの方法は体積力法と呼ばれ2次元クラック解析で良好な数値結果を得ている。この方法はこれから解説する2次元弾性論の境界要素法と基本的に一致している。しかし、西谷らの提案は有限要素法が紹介されはじめた時と同じ頃なされたにもかかわらず、多くの人々の注目を得ることができなかつた。その原因としては、近年の境界要素法が有限要素法で洗練されたいくつかのアルゴリズムを取り入れているのに対して、あまりにも素朴な形態での提案であつたことがあげられる。また葛¹¹⁾らは弾性接触問題を含め実用解析に供することのできる2次元あるいは3次元境界要素解析を周辺積分有限要素法と名づけて行つている。日本では、Boundary Element Methodの直訳の境界要素法と葛らの周辺積分有限要素法の二つの名があるが、本解説では境界要素法という名をとることにした。

本解説では、以上の歴史的経過を踏まえ、鉄鋼技術の各方面に関連の多い、板材に関する弾性問題への応用例について紹介し、また、著者の一名が1980年夏学期に行つた大学院講義での演習における学生の解析例を示すことにする。

3. 板材の弾性変形への応用、境界要素法 二次元弾性論の基礎

今、図1に示す2次元の拡がりをもつ薄板がある。この中の領域Ωに関して次のことがわかつている。Ωを囲む境界Γ=Γ₁+Γ₂に関し、Γ₁上で変位u、Γ₂上で荷重pが既知量として与えられている。Ωに体積力(慣性力、重力など)が作用していないと、釣合方程式は応力成分をσ_{jk}としてσ_{jk,j}=0と書ける。これは座標のk方向に関する力の釣合を表わしている。この式の中で、jは応力のjk成分のj座標に関する偏微分、添字jの重複はj=1,2,3のすべての座標成分についての総和を意味する。σ_{jk,j}=0をx,y,z直ぐ座標系の例で示せば、kがxに対応すると

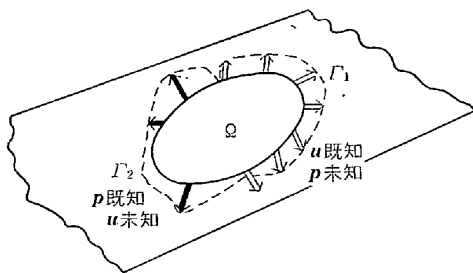


図1 領域Ω, 境界Γ, 境界条件

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

となる。kがy, zに対応する場合も上式と同様である。

Ωに関してσ_{jk,j}=0が成立している時、u_k^{*}を任意の変位数とし、ε_{jk}^{*}=1/2(u_{k,j}^{*}+u_{j,k}^{*})、σ_{jk}^{*}をε_{jk}^{*}に対応する応力とすると、仮想仕事の原理により(1)式が成立する。

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk}^* \cdot \epsilon_{jk}^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_k^* \cdot u_k^* d\Gamma \dots\dots\dots (1)$$

相反定理と応力テンソルの対称性よりσ_{jk}^{*}・ε_{jk}^{*}=σ_{jk}^{*}・ε_{jk}^{*}と変形できる。したがつて(1)式の左辺の第1項は、部分積分により

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk}^* \cdot \epsilon_{jk}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{jk}^* \cdot u_{k,j} d\Omega = \int_{\Gamma} p_k^* u_k d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{jk}^* \cdot u_{k,j} d\Omega \dots\dots\dots (2)$$

となり、(1)と(2)の右辺を等置して次式が得られる。

$$-\int_{\Omega} \sigma_{jk}^* \cdot u_{k,j} d\Omega + \int_{\Gamma} p_k^* \cdot u_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_k \cdot u_k^* d\Gamma = 0$$

さて、u_k^{*}は任意でよいが、もし、u_k^{*}がΩ内のi点でσ_{jk,j}^{*}+Δⁱ=0(Δⁱはi点で1,他では0)を満たすσ_{jk}^{*}に適合する変位関数である場合には上で得られた関係式は(3)のようになる。

$$u_k^i + \int_{\Gamma} p_k^* \cdot u_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma \dots\dots\dots (3)$$

ところでσ_{jk,j}^{*}+Δⁱ=0の解は無有限体に関して2次元問題についても3次元問題についても、すでに求められている。したがつて(3)式中のp_k^{*}、u_k^{*}はその解を基にして容易に導出することができる。

平面応力問題においては、i点におけるl方向の単位荷重により、ある境界上の点におけるk方向の変位と荷重とは(4)式で与えられる。平面ひずみ問題の場合には(4)式中のνにν/(1-ν)を代入すればよい。(4)式中のr, n_k, n_lの意味を図2に示す。

$$\begin{cases} u_k^i = \frac{1+\nu}{8\pi\mu} \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \Delta_{lk} + \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \\ p_k^i = -\frac{1+\nu}{4\pi r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \Delta_{lk} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_l} \right) - \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x_l} \cdot n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} \cdot n_l \right) \right\} \dots\dots\dots (4) \end{cases}$$

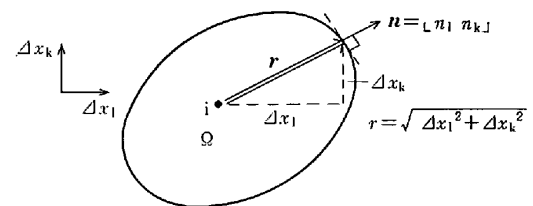


図2 境界上の点とi点との幾何学的関係

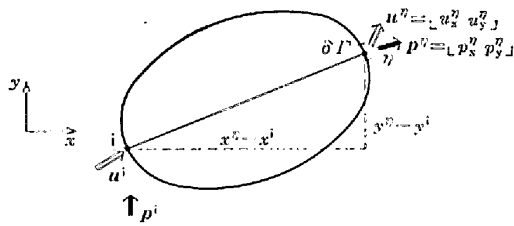


図 3 二つの境界上の点の間の幾何学的関係

d_{1k} : クロネッカーの d , μ : 剛性率, ν : ポアソン比
 さて, (3) 式は i 点が図 2 に示すごとく Ω 内にある場合の関係式であるが, i 点が境界上にある場合には (4) 式に見るごとく $1/r, \ln(1/r)$ の項があるので特別に求めなければならない。その結果, Γ がなめらかであれば, i 点が Γ 上にある場合には

$$\frac{1}{2} u_k^i + \int_{\Gamma} p_k^* \cdot u_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_k \cdot u_k^* d\Gamma = 0 \dots \dots (5)$$

が成立することになる。 Γ 上の i 点が角点の場合には u_k^i の係数は $1/2$ ではなく一応 C^i としておいて, 直接これを求める必要はない。このことは後に説明する。

一般に Γ 上の点に関して

$$C^i u_k^i + \int_{\Gamma} p_k^* \cdot u_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_k \cdot u_k^* d\Gamma = 0 \dots \dots (6)$$

が成立する。(5)式または(6)式で得られた関係を図 3 を用い, x, y 方向別に関係式を書き下すと次のようになる。 Γ 上に i 点と η 点を図 3 に示すようにとる。 η 点の近傍に $\delta\Gamma$ なる線分素をとり, この線分素の法線ベクトルを $u^\eta = (u_x^\eta, u_y^\eta)$ とする。 η 点における $p_x^\eta, p_y^\eta, u_x^\eta, u_y^\eta$ は i 点の変位 u_x^i, u_y^i に対して, それぞれ

$$\begin{cases} -u_x^\eta (p_{xx}^{*i\eta} + p_{yy}^{*i\eta}) \delta\Gamma + p_x^\eta (u_{xx}^{*i\eta} + u_{yy}^{*i\eta}) \delta\Gamma \\ -u_y^\eta (p_{xy}^{*i\eta} + p_{yx}^{*i\eta}) \delta\Gamma + p_y^\eta (u_{xy}^{*i\eta} + u_{yx}^{*i\eta}) \delta\Gamma \end{cases}$$

の寄与又は影響を与えるわけである。 $p_{xx}^{*i\eta} \dots u_{xx}^{*i\eta}$ の 8 個の係数は (4) 式に従い図 3 に示された諸量によつて計算される。上式からわかるように $p_{xx}^{*i\eta} \dots p_{yy}^{*i\eta}, u_{xx}^{*i\eta} \dots u_{yy}^{*i\eta}$ は, η 点における, $(u_x^\eta, u_y^\eta), (p_x^\eta, p_y^\eta)$ のベクトルに作用する係数マトリックス $[p^{*i\eta}], [u^{*i\eta}]$ の成分である。そこで (6) 式を書き直すと,

$$C^i u^i + \int_{\Gamma} [p^{*i}] u d\Gamma - \int_{\Gamma} [u^{*i}] p d\Gamma = 0$$

と書ける。

η 点の囲りに線分素をとつたように, Γ 上にいくつかの点をとる, それぞれに線分素を代表させ (6) 式を離散化することができる。

$$\begin{aligned} [C^i] u^i + \sum_{\eta=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_\eta} [p^{*i}] u d\Gamma \right\} - \sum_{\eta=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_\eta} [u^{*i}] p d\Gamma \right\} &= 0 \\ [C^i] &= \begin{bmatrix} C^i & 0 \\ 0 & C^i \end{bmatrix} \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

ここで各分素を Γ_η としたが, この Γ_η 上の u と p とを代表する量を $\bar{u}^\eta, \bar{p}^\eta$ とすると (7) 式は

$$\begin{aligned} [C^i] \bar{u}^i + \sum_{\eta=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_\eta} [p^{*i}] [\Phi] d\Gamma \right\} \bar{u}^\eta \\ - \sum_{\eta=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_\eta} [u^{*i}] [\Phi] d\Gamma \right\} \bar{p}^\eta = 0 \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

と書ける。 $[\Phi]$ として $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ を用いる場合は constant element といい, Γ_η 上で u 及び p が一定で各境界の代表点として中点を選ぶ場合である。

一般にこの constant element を用いる場合は積分が簡単になるが, 各境界要素上で p_k や u_k が直線分布あるいは二次関数の分布をすることも $[\Phi]$ をそれに適した形にすれば, 基本的に問題はない。理想的には u_k の分布関数の次数を p_k の分布関数の次数より 1 だけ大きくするのがよいと言われている。本解説は以後 constant element を用いた例のみを扱うが, 他の分布の場合の取り扱い, 例えば C. A. BREBBIA¹²⁾ の入門書を参照されるとよい。

さて constant element の場合 (8) 式は

$$[C^i] \bar{u}^i + \sum_{\eta=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_\eta} [p^{*i}] d\Gamma \right\} \bar{u}^\eta - \sum_{\eta=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_\eta} [u^{*i}] d\Gamma \right\} \bar{p}^\eta = 0$$

となる。ここで

$$\int_{\Gamma_\eta} [p^{*i}] d\Gamma = [H^i]^\eta, \int_{\Gamma_\eta} [u^{*i}] d\Gamma = [G^i]^\eta$$

とおくと, 総和規約を併用して

$$\begin{cases} [C^i] d^i + [H^i]^\eta \bar{u}^\eta - [G^i]^\eta \bar{p}^\eta = 0 \\ \eta = 1 \sim n \end{cases}$$

$$[C^i] d^i + [H^i]^\eta = [H^i]^\eta \text{ とすると}$$

$$[H^i]^\eta \bar{u}^\eta - [G^i]^\eta \bar{p}^\eta = 0 \dots \dots \dots (9)$$

と書くことができる。先に i 点が表面上の角点である時 $C^i \approx 1/2$ であるが直接求める必要はないと述べた。それは剛体変位を考えれば $\bar{p}^\eta = 0$ でなければならない。したがつて, 今 $\bar{u}^\eta = [1 \dots 1]$ という剛体変位が生じたすると

$$[H^i]^\eta \bar{u}^\eta = 0 \quad \eta = 1 \sim n$$

より

$$[H^i]^i = - \sum_{\substack{\eta=1 \\ \eta \neq i}}^n [H^i]^\eta$$

の関係が得られるからである。

一般に $[H^i]^\eta$ や $[G^i]$ は $i \neq \eta$ の場合ガウスの積分公式で計算する。 $i = \eta$ の時, $[G^i]^i$ は (4) 式に基づいて次のように計算する。

$$[G^i]^i = \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{gx} \\ G_{yx} & G_{yy} \end{bmatrix}^{ii} \text{ と置き図 4 を参照して}$$

$$\begin{aligned} G_{xx} &= \frac{1+\nu}{8\pi\mu} \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} \int_{(1)}^{(2)} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma + \int_{(1)}^{(2)} \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 d\Gamma \right] \\ &= \frac{1+\nu}{8\pi\mu} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{2(1-\nu)}{1+\nu} \int_{\epsilon}^R \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma + 2 \int_{\epsilon}^R \cos^2 \theta dr \right] \\ &= \frac{2R(1+\nu)}{8\pi\mu} \left\{ \frac{1-\nu}{1+\nu} (1 - \ln R) + \frac{r_x^2}{4R^2} \right\} \end{aligned}$$

同様に

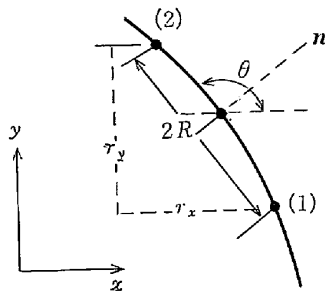


図 4 自己要素の G マトリックス成分の計算における幾何学的条件

$$G_{yx} = G_{xy} = \frac{1+\nu}{8\pi\mu} \left(\frac{r_x r_y}{2R} \right)$$

$$G_{yy} = \frac{2R(1+\nu)}{8\pi\mu} \left\{ \frac{1-\nu}{1+\nu} (1 - \ln R) + \frac{r_y^2}{4R^2} \right\}$$

のように諸量が計算される。

ここで(9)式に戻って考えれば、 $[H^i]^\eta$ 、 $[G^i]^\eta$ がすべて計算できるから、問題は境界 Γ 上の変位と荷重に関する $2n$ 元の連立一次方程式を解くことに帰着する。そこで Γ 上で既知の変位に対する未知の荷重、既知の荷重に対する未知の変位をマトリックス構造力学の手法によつて求めることができる。

さて、有限要素法では Ω 内の節点における変位と要素の応力とひずみを求めるわけであるが、一方、本境界要素法はまず境界上の力学的状況を求めるのである。 Ω 内の応力とひずみは境界上で明らかにされた変位と荷重に基づいて、(3)式に従つて計算される。(3)式を改めて示すと

$$u^i = \int_{\Gamma} [u^{*i}] p d\Gamma - \int_{\Gamma} [p^{*i}] u d\Gamma \quad \dots\dots\dots (10)$$

であるが、 Ω 内のあらかじめ選定した点の応力とひずみをそれぞれの定義に従つて求めることができる。式の演算の詳細をはぶけば $[D]$ 及び $[S]$ を 3 階の行列として

$$\sigma_{pq} = \int_{\Gamma} D_{kpq} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kpq} u_k d\Gamma \quad \left(\begin{matrix} k : x, y \\ p, q : x, y, z \end{matrix} \right) \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで

$$D_{kpq} = \frac{1}{r\alpha} \left\{ (1-2\nu) \left(A_{kp} \frac{\partial r}{\partial x_q} + A_{kq} \frac{\partial r}{\partial x_p} - A_{pq} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) + \beta \frac{\partial r}{\partial x_p} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_q} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_k} \right\} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$S_{kpq} = \frac{2\mu}{r\beta} \left\{ \beta \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu) A_{pq} \frac{\partial r}{\partial x_k} + \nu \left(A_{pk} \frac{\partial r}{\partial x_q} + A_{qk} \frac{\partial r}{\partial x_p} \right) - \gamma \frac{\partial r}{\partial x_p} \frac{\partial r}{\partial x_q} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] + \beta\nu \left(n_p \frac{\partial r}{\partial x_q} \frac{\partial r}{\partial x_k} + n_q \frac{\partial r}{\partial x_p} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) + (1-2\nu) \left(\beta n_k \frac{\partial r}{\partial x_p} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_q} + n_q A_{pk} + n_p A_{qk} \right) - (1-4\nu) n_k A_{pq} \right\} \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)} \quad \dots\dots\dots (13)$$

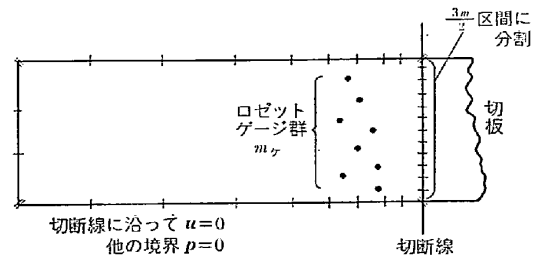


図 5 切除法で残留応力分布を求める板試料

である。平面ひずみ問題の場合は $\alpha=1$ 、 $\beta=2$ 、 $\gamma=4$ とし、平面応力問題の場合は平面ひずみ問題の表式中の ν の代わりに $\nu/(1+\nu)$ を用いればよい。

Ω 内の点 i における平面応力状態での応力を $[\sigma_x^i, \sigma_y^i, \tau_{xy}^i]$ とすると(11)式は

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^i \\ \sigma_y^i \\ \tau_{xy}^i \end{pmatrix} = \sum_{\eta} \int_{\Gamma} \eta \begin{pmatrix} D_{xxx}^i & D_{yxx}^i \\ D_{xyy}^i & D_{yyy}^i \\ D_{xxy}^i & D_{yyx}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} d\Gamma - \sum_{\eta} \int_{\Gamma} \eta \begin{pmatrix} S_{xxx}^i & S_{yxx}^i \\ S_{xyy}^i & S_{yyy}^i \\ S_{xxy}^i & S_{yyx}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} d\Gamma \quad \dots\dots\dots (14)$$

今形式的に

$$\int_{\Gamma} D_{xxx}^i d\Gamma = ID_{xxx}^i, \quad \int_{\Gamma} S_{xxx}^i d\Gamma = IS_{xxx}^i$$

のように書けば

$$\sigma_{pq}^i = ID_{kpq}^i p_k^i - IS_{kpq}^i u_k^i \quad \dots\dots\dots (15)$$

のように表される。

4. 板材の面内弾性変形の解析への応用

板材の面内弾性変形の問題で鉄鋼工学と関連の深いものとして、厚板のプランキング後の変形予測や薄板のプランキング後の形状不良の予測を含めた圧延板の残留応力の解析が筆者の念頭にある。そこで、現在筆者らが計画している圧延板の残留応力解析への本法の応用の概要を一つの演習問題として解説しよう。

今図 5 に示すような短冊形の圧延板があり、一応平坦度は良好であるとする。この圧延板の適当な m 所にロゼットゲージを貼布し、その次に圧延板をたとえば圧延方向に直角な線に沿つて切断したとする。この切断により、ロゼットゲージにひずみ出力が現れたとすると、切断が純粋に自由境界を作り出す役割のみを果せばこれは圧延板内にあつた残留反応力の再分布に伴う変形である。

この切断によつて得られる情報量は m 所に現れたひずみ出力から得られる $3m$ 々の応力成分の値である。今、切断した線を $3m/2$ 区間に分割すると、各分割において変数はやはり $3m$ 々の荷重成分となる。

今、この切断後の圧延板の周を l 区間に分割したとしこの場合の境界条件として、切断線以外で $p=0$ 、切断線に沿つて p および u は未知である。ロゼットの位置で

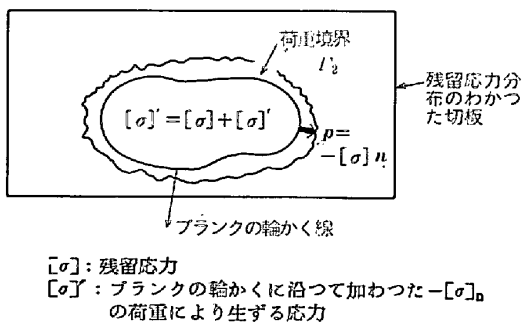


図 6 ブランクの残留応力の計算の方法

の応力成分は符号を逆にして、切断線に沿つての荷重分布を求め、残留応力分布を得ることとする。

解析は以下の手順による。

圧延板内の m 点でロゼットより求めた応力成分の符号を逆にした応力成分 σ_{pq} を列ベクトルであらわすと、

$$\begin{matrix} \vdots \\ 3 \\ m \text{ 行} \\ \vdots \end{matrix} \left\{ \sigma_{pq} \right\} = \begin{bmatrix} ID_{k,pq}^1 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \leftarrow 2l \rightarrow & \uparrow & \downarrow \\ & 3 \text{ m 行} & \\ & \downarrow & \uparrow \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} p_k^2 \\ \vdots \\ 2 \text{ l 行} \\ \vdots \end{matrix} \right\} \\ \leftarrow 2l \rightarrow \\ - \left[IS_{kqp} \right] \left\{ u_k \right\} \uparrow \downarrow 2l$$

また、(9)式より

$$\begin{matrix} \uparrow & \leftarrow 2l \rightarrow & \uparrow \\ (2l) & \left[H \right] & \left\{ u_k \right\} = 2l \left[G \right] \left\{ p_k \right\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left\{ u_k \right\} = \left[H \right]^{-1} \left[G \right] \left\{ p_k \right\} \end{matrix}$$

$$\left\{ \sigma_{pq} \right\} = \left[ID_{k,pq} \right] - \left[IS_{k,pq} \right] \left[H \right]^{-1} \left[G \right] \left\{ p_k \right\}$$

ここで境界条件から「 p_k 」中零でない成分は $3m$ ヲであるからその成分に関係する $[ID_{k,pq}]$, $[IS_{k,pq}]$, $[H]^{-1}$, $[G]$ の成分を整理して、 σ_{pq} と「 p_k 切断部」との 1 対 1 の関係式を得ることができる。

このようにして圧延切板の残留応力の分布図を完成させると、次にこの圧延切板から任意の形のブランクを採取した時、そのブランクが有するであろう応力分布を知ることができる。図 6 に示すように、この場合はブランクの輪かくに沿って存在していた荷重の反対符号の荷重を輪かくに沿って加え、ブランク内の応力分布を求め、それともの残留応力分布図とかさねればよいからである。また厚板についても代表サンプルについて切断、穴あけなどにより残留応力を求めておけば、同一製造条件のロケットについて、切断後のキャンパーの発生や寸法の伸び縮みなどの推定をすることもできる。

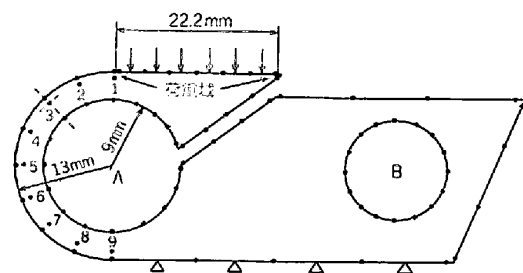


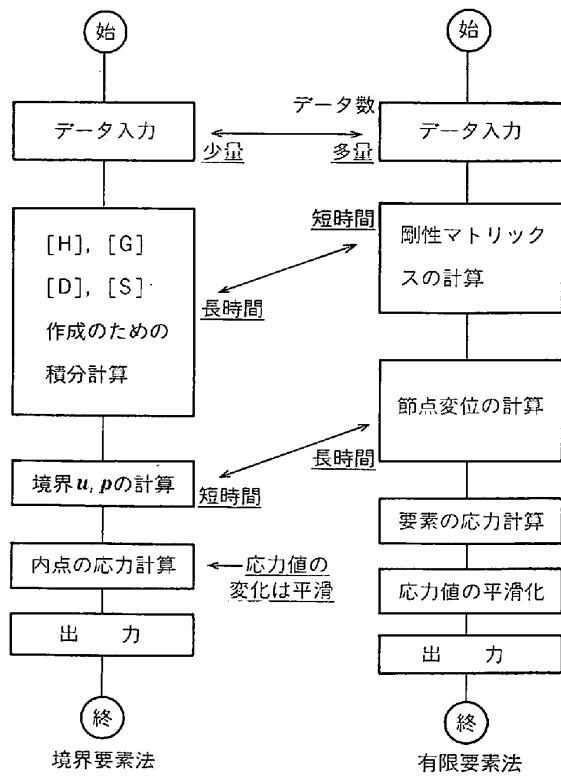
図 7 義足のひざ (厚さ: 25 mm)

5. 人工関節の応力と変形解析への応用

55 夏学期の弾塑性力学特論で BREBBIA の境界要素法の入門書の英文輪講を行つた。学生の三宅英徳氏にはテキストがなかつたので、身近の問題をとり上げ境界要素法で解くように求めた。彼は図 7 に示すような人工関節(義足のひざ)のブロックに荷重がかかった場合の応力分布と変形を、BREBBIA の入門書に掲載されている汎用プログラムを用いて解いた。図 7 の Δ は支点、 \downarrow 印はこの部分に体重が均等にかかるとし、他の境界は自由境界とした。また、応力を計算する内点としては外周から 1 mm 内部に入つた点 1 ~ 点 9 を選んだ。入門書の汎用プログラムが東大の計算機とあわない二三の修正と明白な誤りをチェックすることにより解析を行うことができた。Al 系の材料の場合として $\mu = 2000 \text{ kg/mm}^2$, $\nu = 0.3$, Ti 系の材料の場合として $\mu = 4000 \text{ kg/mm}^2$, $\nu = 0.3$, Fe 系の材料の場合として $\mu = 8000 \text{ kg/mm}^2$, $\nu = 0.3$ の物性値を用いた。得られた結果の主なものは、変位指定境界が小さいため、応力値は μ にほとんど関係しなかつた。内周直径の減少量は μ が小さい程大きく、点 7 を通る直径上で一番大きくなつた。応力分布で最も降伏の危険のある位置は点 2 を通る直径上で、最外周に近づく程大きくなつた。降伏応力が 60 kg/mm^2 を越える材料を用いる必要のあることがわかつた。A の穴には関節の芯棒が通つており、荷重した時の内径減少によりこの芯棒をしめて関節の回転運動にブレーキがかかる仕組みとなつている。従つて μ が大きい程、A の穴径と芯棒の直径との工作精度が要求され、 μ が小さい程、降伏応力の大きいものを見つけることが難しいことが明らかにされた。表 1 に、点 7 における内径減少量 Δr 、点 2 における $2\bar{\sigma}^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 6\tau_{xy}^2$ より求めた $\bar{\sigma}$ 、及び、各 μ に対応する材料のうち使用候補に挙げ

表 1

$\mu(\text{kg/mm}^2)$	$\Delta r(\text{mm})$	$\bar{\sigma}(\text{kg/mm}^2)$	0.2% 耐力 (kg/mm^2)/(材料名)
2000	0.056	58.5	93.3/17-7PH
4000	0.028		
8000	0.014		44.3/7075 合金



境界要素法
 Ω の形態が同一面積に比し周長の短い円形に近いもの程、境界要素法を用いる利点がある。
 図 8 境界要素法と有限要素法との比較

られている材料の 0.2% 耐力を示す。なお点 2 の $\bar{\sigma}$ は $\mu=8000 \text{ kg/mm}^2$ の場合の値であつて、先に述べた理由でこの値は μ によつてほとんど変化しない。

6. おわりに

電子計算機の発達により、境界要素法を用いる時のマトリックス $[H]$, $[G]$, $[D]$, $[S]$ を求める積分計算の時間が大幅に短縮されて、本法によつて比較的手軽に数値解析ができるようになった。最後に図 8 に計算の流れ図を有限要素法と比較して示し、このあたりの事情の理

解のための参考に供したい。本解説は切除法や穴あけ法により、材料の残留応力の測定を行つている立場から¹³⁾、測定と計算とを結びつけるラボオートシステムに採用する計算手法の一つとして、境界要素法を紹介したものである。

本解説を終えるにあつて、東芝重電技研高石和年博士、東大大学院生山内徹氏、筆者の大学院講義聴講者諸氏、就中、三宅英徳氏に感謝の意を表したい。

文 献

- 1) M. J. TURNER, R. W. CLOUGH, H. C. MARTIN, and L. J. TOPP, : "Stiffness and Deflection analysis of complex structures", J. Aero. Sci., 23 (1956), p. 805
- 2) S. G. MIKHLIN : "Integral Equations". (1957) [Pergamon]
- 3) N. I. MUSKHELISVILI : "Singular Integral Equations" (1953), Gremingers
- 4) O. C. ZIENKIEWICZ, and G. S. HOLISTOR : Stress Analysis, (1965), Wiley, p. 198
- 5) F. J. RIZZO : Appl. Math., 25 (1967), p. 83
- 6) T. A. CRUSE : Int. J. Solid Struct., 5 (1969), p. 1259
- 7) J. C. LACHT and J. O. WATSON : ASME, Proc. AMD, 11 (1975)
- 8) P. C. RICARDELLA : Rep. Univ. Carnegie Mellon, SM73-10 (1973)
- 9) T. A. CRUSE : Comp. and Struct., 4 (1974), P. 741
- 10) 西谷弘信 : 日本機械学会誌, 70 (1967), p. 741
- 11) 蔦 紀夫, 山地成一 : 機講論, 関西 238(昭53/6)
- 12) C. A. BREBBIA : "The Boundary Element Method for Engineers" (1978) [Pentech Press] 邦訳 神谷, 田中(正)・田中(喜) 共訳 : 「境界要素法入門」(1980) [培風館]
- 13) 世利修美, 木原諄二 : 昭和55年春季壘加講論 (昭55/5), p. 243