



UDC 621.98.01.51

有限要素法による解析法の進歩

— 金属の成形に関連して —

富 田 佳 宏*

Finite Element Methods for Analysis of Metal Forming Processes

Yoshihiro TOMITA

1. ま え が き

有限要素法は構造解析および構造設計の分野においてより正確なデータを提供することを目的として開発された1つの近似解析方法¹⁾で広範な適用性とその解析アルゴリズムが計算機処理によくなじむことから計算機の発達に伴って今日見られるようなめざましい進歩をとげ広く普及するに至った。最近では構造解析においてこれまでの方法では予想もできなかつた大規模線形および非線形問題の解析が可能になったことに刺激され非構造、移動現象²⁾、電磁気の問題³⁾から一般の微分方程式⁴⁾の解析に適用され構造解析の場合と同様にそれぞれの分野における有力な数値解析法となりつつある。

本誌と特に関連の深い金属の成形を取り扱う問題は非構造および移動現象の問題に属するものが多い。周知のように金属の成形過程はきわめて複雑で、大きな弾塑性変形およびそれに伴う熱発生と熱伝導、材料の性質の変化、工具と素材間の摩擦等の多くの問題を含みそれらがお互いに連成し合っている。可能ならばこのような問題を一括して解くことが望ましいが、今までのところその試みは見あたらずそれぞれの問題を単独にあるいは素材の変形を中心に熱伝導、摩擦等との連成問題として解析が行われているのが現状である。

本稿では成形中素材に生じる小さな弾性変形から大きな弾塑性変形まで最も正確に解析し得ると考えられる弾塑性有限要素法および全体が大きく塑性変形して弾性変形が無視できるような問題の解析に有力な剛塑性有限要素法を中心に概説し、成形中の熱発生に伴う連成熱伝導問題を扱う有限要素法についても触れる。あわせてそれらを使つて最近得られたいくつかの問題の解析結果のうちごく限られた範囲のものについて言及する。

2. 弾 塑 性 解 析

2.1 大変形弾塑性有限要素法

大変形問題が微小変形問題と異なる点は、変形を支配する基礎式が明確に設定された基準状態を参照して記述される点にある。通常の弾塑性体の構成式は速度形(増分形)で表されるので基礎式もまた速度形で表され、変形の初期状態あるいは現変形状態を基準状態として参照し記述される。初期状態を参照した定式化を Total Lagrangian Formulation (TLF)、変形状態を参照した定式化を Updated Lagrangian Formulation (ULF) と呼んで区別する⁵⁾。ULF は変形の進行に伴つて基準状態が更新されるのに由来してこの名前がついた。HILL⁶⁾ は直交デカルト座標系 x_i を参照座標系とした ULF によると、弾塑性境界値問題の解はつぎに示す仮想仕事の原理を満足するものであることを示した。

$$\int_V (\dot{S}_{ij} + \sigma_{mj} v_{i,m}) \delta v_{i,j} dV \\ = \int_{A_t} \bar{t}_i \delta v_i dA + \int_V \rho \dot{F}_i \delta v_i dV \dots \dots \dots (1)$$

ここで \dot{S}_{ij} は Kirchhoff の応力速度で Cauchy の応力速度 $\dot{\sigma}_{ij}$ と $\dot{S}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} v_{1,1} - \sigma_{11} v_{j,1} - \sigma_{1j} v_{1,1}$ なる関係にある。 \bar{t}_i は物体の表面 A_t の単位面積に作用する外力の変化率、 \dot{F}_i は単位質量あたりの物体力の変化率を表す。 v_i は速度成分、 $(\)_{,i} = \partial(\) / \partial x_i$ 、 $(\dot{\ })$ は $(\)$ の物質導関数、 δv_i は仮想変位速度である。また V , A , ρ は物体の体積、表面積、密度を表している。

ところで式(1)を実際の問題に適用する場合材料の特性を表す構成式を導入しなければならない。構成式は材料の物理的性質を表すものであるから参照座標系が異なつても不変でなければならない⁶⁾。この性質を客観性

昭和 55 年 10 月 31 日受付 (Received Oct. 31, 1980) (依頼解説)

* 神戸大学工学部 工博 (Faculty of Engineering, Kobe University, Rokkodai-cho Nada-ku Kobe 657)

(Objective) と言う。したがって構成式に用いる量は客観性を有することが要請され、弾塑性構成式の場合 Kirchhoff の応力の Jaumann 速度 $\dot{\bar{S}}_{ij}$ と変形速度テンソル d_{kl} が用いられる^{6)*}。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{S}}_{ij} &= \dot{S}_{ij} + F_{ijk} d_{kl} \\ d_{kl} &= \frac{1}{2}(v_{k,l} + v_{l,k}) \\ F_{ijk} &= \frac{1}{2}(\sigma_{lj} \delta_{kl} + \sigma_{kj} \delta_{li} + \sigma_{li} \delta_{kj} + \sigma_{ki} \delta_{lj}) \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

これらの量を微小変形の場合の Prandtl-Reuss の式⁷⁾の応力速度とひずみ速度のかわりに用いることによつて大変形まで形式的に矛盾なく適用可能な構成式が得られる⁸⁾²³⁾。

$$\begin{aligned} \dot{\bar{S}}_{ij} &= D_{ijkl} d_{kl} \\ D_{ijkl} &= G \left\{ \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right\} \\ &\quad - \frac{2\alpha^* G \sigma_{ij}' \sigma_{kl}'}{\frac{2}{3} \bar{\sigma}^2 (H'/3G+1)} \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

ただし $\alpha^*=0$ 弾性変形, 除荷
 $\alpha^*=1$ 塑性変形, 負荷

$\sigma_{ij}' = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{mm}$, $\bar{\sigma}^2 = \frac{2}{3} \sigma_{ij}' \sigma_{ij}'$, H' は単軸における真応力対数ひずみ線図の勾配, G は横弾性係数, ν はポアソン比。

9) に種々の塑性ポテンシャルに対するマトリックス D_{ijkl} の具体形が求められている。マトリックス D_{ijkl} の対称性から構成式(3)はポテンシャルから導出することができる。外力が保存力である場合微小変形弾性問題における全ポテンシャルエネルギー汎関数に対応した汎関数が存在し、弾塑性速度形境界値問題の解はそれを最小にする可容速度であることを示した変分原理がある⁶⁾。

弾塑性問題に対する有限要素法は仮想仕事の原理(1)あるいは対応する変分原理によつて定式化される。いま1つの要素内の任意の点における変位速度 v_i を要素の形状関数 Ψ_N と節点Nにおける変位速度 v_{iN} によつて次式のように表示する。

$$v_i = \Psi_{Nv_{iN}} \dots \dots \dots (4)$$

形状関数 Ψ_N は節点Nで1, その他の節点で0となる。 Ψ_N は要素の形, 節点数によつて異なつたものとなるが、一般に座標の方向によつて近似度が変化しないことが望ましいので幾何学的に等方な関数が選ばれる¹⁰⁾。形状関数の具体的な形については多くの教科書に示されている²⁾¹⁰⁾。式(4)を仮想仕事の原理に代入して、仮想変位速度 δv_i の任意性に注目して整理すると1つの要素の有限要素方程式が得られる¹¹⁾⁴⁰⁾。

$$\left. \begin{aligned} \dot{K}_{NiMi} v_{Ml} &= \dot{P}_{Ni} + \dot{F}_{Ni} \\ \dot{K}_{NiMi} \int_{V_e} \{ (D_{ijkl} - F_{ijk}) \Psi_{M,k} \Psi_{N,j} \\ &\quad + \sigma_{kj} \Psi_{M,k} \Psi_{N,j} \delta_{il} \} dV \\ \dot{P}_{Ni} &= \int_{A_{te}} \dot{i}_i \Psi_N dA, \quad \dot{F}_{Ni} = \int_{V_e} \rho \dot{F}_i \Psi_N dV \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

V_e, A_{te} は要素の体積および表面積を表す。マトリックス \dot{K}_{NiMi} はいわゆる剛性マトリックスで節点Mの*l*方向変位の節点Nの*i*方向の力に対する影響係数を表している。 $\dot{P}_{Ni}, \dot{F}_{Ni}$ は要素表面および内部に分布する表面力と物体力に等価な節点力で、節点Nの*i*方向の力を表している。このような有限要素方程式をすべての要素に対して求め節点力のつり合と変位の適合条件を満足するように重ね合わせることによつて物体全体の有限要素方程式が得られる。同様の有限要素方程式が ULF で埋込み座標系を用いて⁸⁾²³⁾, TLF で直交座標系¹²⁾¹⁹⁾ および曲線座標系¹³⁾を用いて求められ数多くの問題の解析に使われている。いずれも適当な変換をすることによつて式(5)に一致することを示すことができる。ARGYRISらのグループは簡単な要素を用いて要素の辺の伸び縮み量によつて要素内部の変形特性を表すいわゆる固有因子法を確立して多くの成果をあげている¹⁴⁾⁴¹⁾。

ところで前記の有限要素法はいずれも増分形(速度形)であり無限小の増分量に対して正しい結果を与える。増分量が有限な場合、増分変形中の非線形性を無視した第1近似にすぎない。より正確な解を得るために種々の試みがなされている。HOFFMEISTERらは¹⁵⁾式(5)によつて求めた結果は完全には平衡条件を満足したものでないことに注目し式(5)の右辺にその不平衡量を節点力として加えることにより近似的にはあるが各ステップで平衡条件を満足させよい結果を得ている。また1回の増分計算に対して修正オイラ法、予測子修正子法等の繰返し法を適用することも考えられている。このような考察は変形に対する物体の応答の非線形性に焦点をあてたものであるが、同様のことが増分形構成式の非線形性に対しても配慮されねばならないことが指摘され増分摂動法が提案されている¹⁶⁾。この方法は分岐や負荷から除荷あるいはその逆の現象が生じる遷移領域にある部分の正しい解析に用いることができる。

弾塑性材料は降伏点を境にして式(3)の構成式に見られるように特性が急変する。したがって正しい解を得るためには材料が弾性状態にあるか否かをモニターし増分変形中に別の状態に移ることが無いように注意することが重要である。YAMADAら¹⁷⁾は降伏点が一番近い部分をつぎの増分計算ステップで降伏点に到達させるように増分量を決定する手法を提案した。この手法は計算ステップ数を多く必要とするが繰返し無しでもよい結果を与える。完全に降伏点に一致していなくても降伏したと見なすことによつて計算時間を短縮することも考えられている。

塑性変形の特徴として変形の非圧縮性があげられる。有限要素モデルの変形にこの非圧縮性の拘束が作用して良い結果が得られないことがあり、平面応力状態を除いたすべての計算において注意する必要がある。NAGTEGAALら¹⁸⁾は代表的な有限要素モデルに対して分割を小

* 応力は客観性を有することが知られている。

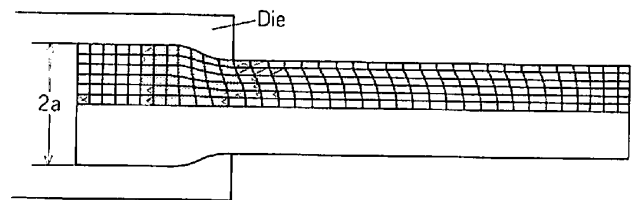
くしていつたときの全自由度 N_F と総拘束数 N_C の比を求めて $N_F/N_C > 1$ となるかどうかを弾塑性問題でよい結果が得られるか否かを判断する一つの目安となることを示している。平面ひずみの場合 6 節点 3 角形要素のみがこの条件を満しそれ以外はすべてこの条件を満足しない。ただし 4 角形を対角線でわけて得られるような特別な配列の 3 角形要素 (Crossed Triangles) を用いると $N_F/N_C = 4/3$ となることが証明されている¹⁹⁾。軸対称、3 次元要素に対して $N_F/N_C > 1$ となる要素あるいは要素の組み合わせは見つかっていないが平面ひずみでよい結果を与えるものは軸対称においてもよい結果を与えるようである¹⁹⁾。これらの議論は完全に非圧縮性の条件を満足させる場合であるが、近似的にこれを満足させることも考えられている²¹⁾²⁰⁾。一般に複雑な要素を用いた場合要素剛性マトリックス(5)₂ は完全に積分することはできないので Gauss の求積法等の近似的手法が用いられる。その場合積分は代表点 (積分点) での被積分項の値に重みを付けたものの和として表される。したがって非圧縮性の条件は積分点において満されれば全体として近似的に満足されたことになる。この場合 1 つの要素あたりの非圧縮性の拘束は Gauss の積分点の数に一致する。適当に Gauss の積分点の数を選べば $N_F/N_C > 1$ の条件を満足させることができる。この手法によると軸対称、3 次元問題に対して $N_F/N_C > 1$ を満す有限要素分割モデルを得ることができる。ただし Gauss の積分点の数を減らすと自由度が増すが積分の近似度が悪くなるので両者のトレードオフを考えねばならない。これとは別に塑性変形の非圧縮性問題を混合型の変分原理を導入することによって解決しようとする試みがある¹⁸⁾²¹⁾²²⁾。

2.2 弾塑性有限要素法の適用例

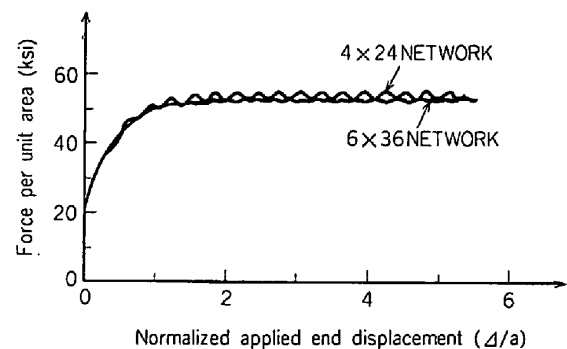
初期の研究は式(5)あるいはそれに対応した有限要素法の妥当性および従来の方法との違いを明確にするためのもので切欠きあるいは有孔板の引張りのような単純な問題の解析⁹⁾¹³⁾、ひずみ分布の実験値との比較²³⁾ が行われた。ブロックあるいは円柱の圧縮問題の解析に対して新しく提案された摩擦のすべり法則が適用された²⁴⁾。この研究は塑性加工中材料と工具との間の複雑な摩擦現象を取り扱う一つの試みとして興味深い。この方面の研究は多く、ブロックあるいは円柱のすえ込みに対する要素分割の影響の検討²⁶⁾、各種手法による結果の比較²⁷⁾、非圧縮性に近い変形に対する解析法の提案と数値計算による holding が生じることの実証²⁵⁾ がある。延性破壊に関連して、ポイドの成長¹³⁾、き裂先端開口、J 積分の経路独立性、き裂付近のポイドの成長²⁸⁾ が調べられた。き裂先端のように特異性を有する応力場の解析に対して適した種々の特異要素も提案されている²⁹⁾。

塑性加工に関連して薄板の軸対称および非軸対称静的パルジ成形³⁰⁾³¹⁾、引張成形^{32) 36)} がある。動的パルジ成形に対して Perzyna 型³⁷⁾ の構成式が用いられ実験によ

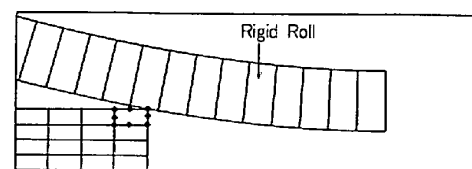
つて得た変形の特徴をよく表した結果を得ている³⁸⁾。ダイスあるいはロールを用いた大変形定常塑性加工は Lee ら³⁹⁾ によつてはじめて解析が行われた。はじめになめらかなダイスに満された素材を押し出してゆき押し出し力がほぼ一定となつたときをもつて定常状態と見なす方法を用いている。Fig. 1 に用いたダイス、要素分割および結果の一部を示す。ダイス出口において要素の節点以外のところが出口と一致した場合、力を両節点にふり分ける操作をしているために押し出し力に波形状の凹凸が見られる。高次要素を用いた場合の上記操作はペナルティ法を用いて行われる³⁹⁾。その後軸対称押し出しも解析された³⁹⁾。Fig. 2 は平面ひずみ状態の圧延を解析したもので圧下率 1/3 である³⁹⁾。固有因子法によつてヘッディング問題の解析も行われている⁴¹⁾。



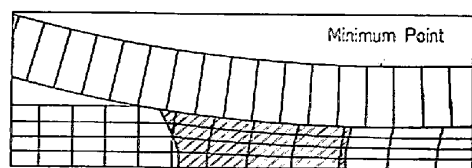
The configuration of the plastic region in the steady state.



The variation of driving force for the extrusion process.
Fig. 1. Extrusion of the strip through smooth die³⁹⁾.



Undeformed mesh



Deformed mesh and yield region

Fig. 2. Close up views of the initial mesh and steady state plate distortion³⁹⁾.

最後に材料の成形性と関連があることで注目されているくびれ、分岐問題の解析に触れる。HILL⁶⁾によると同じ境界条件のもとで異なる解の差に“*”を付けて表すと

$$I = \int_V (\dot{S}_{ij}^* + \sigma_{mj} v_{i,m}^*) v_{i,j}^* dV = 0, \delta I = 0 \dots\dots (6)$$

が非自明解を有するとき分岐が生じる。NEEDLEMAN⁴²⁾は(6)によつて丸棒の引張りにおける分岐点を求め、Hutchinsonの方法によつて基本解から分岐解に移し式(5)によつて増分的に分岐後のくびれ現象を解析した。同様の方法によつて平面ひずみ状態にある板のくびれ⁴³⁾⁵⁰⁾、円柱の圧縮⁴⁴⁾、球かく⁴⁵⁾、円板の2軸引張り⁴⁶⁾、回転円板⁴⁷⁾の分岐等の解析が行われた。はじめに初期不整を与えてその分岐後挙動に及ぼす影響も調べられている⁴⁸⁾⁴⁹⁾、不整を与えなくてもくびれを生じた例についての報告がある⁴⁹⁾。この場合分岐点の近くではほぼ分岐モードに近い増分変形が得られており自然に分岐解に移行してゆくようである。最近内圧を受ける弾塑性円管の非軸対称分岐解析⁵¹⁾⁵²⁾と分岐後解析⁵²⁾が行われ管壁のくびれモードは管の破壊時のモードとよく合うことが示されている。このような分野においては用いる構成式の結果に及ぼす影響は大きく、式(3)のような速度形の構成式を用いた場合、ひずみ速度と降伏曲面の法線との平行性に対する拘束が変形の自由度を低下させ分岐を遅らせることが指摘され⁵³⁾、コーナがある降伏曲面や、有限変形全ひずみ理論にその解決の糸口を見つけようとする試みがある⁵⁵⁾⁶⁴⁾。

3. 剛塑性解析

3.1 剛塑性有限要素

金属材料が外力を受けて変形した場合全変形に占める塑性変形の割合がきわめて大きくなり弾性変形を無視しても十分正確なデータが得られる場合がある。このような場合剛塑性有限要素法を用いることができる。剛塑性有限要素法は MARCAL⁵⁶⁾によつて切欠き材の極限解析を行うときにはじめて用いられ、LUNG と MAHRENHOLTZ⁵⁶⁾、LEE と KOBAYASHI⁵⁷⁾によつて複雑な塑性加工の解析に適用され広く一般に認められるようになった。

剛塑性体の特性は通常応力とひずみ速度を関係付ける Levy-Mises 型の構成式によつて表すことができる⁷⁾。したがつて任意の変形状態における応力および変形履歴が完全に既知である場合物体に生じる変形速度を求める境界値問題を解くことによつて剛塑性変形の解析が可能になる。直交デカルト座標系 x_i を参照座標系とした ULF によると剛塑性境界値問題の解はつぎに示す仮想仕事の原理を満す⁵⁸⁾。

$$\int_V \sigma_{ij} \delta d_{ij} dV = \int_{A_t} \bar{t}_i \delta v_i dA + \int_V \rho F_i \delta v_i dV \dots\dots (7)$$

ここで \bar{t}_i および F_i は物体表面に作用する外力の成分

と物体の単位質量あたりの物体力の成分を表している。式(7)は構成式の形によらず成立する一般的なものである。ところで剛塑性体の構成式として一般に広く用いられているのはつぎの形で表すことができる⁵⁹⁾。

$$d_{ij} = g \sigma_{ij}' \dots\dots\dots (8)$$

ここで g は偏差応力 σ_{ij}' 、ひずみ履歴等の関数である。構成式(8)によるとひずみ速度 d_{ij} は非圧縮性の条件を満足するので、仮想仕事の原理(7)はつぎのように書き改めることができる。

$$\int_V \sigma_{ij}' \delta d_{ij} dV = \int_{A_t} \bar{t}_i \delta v_i dA + \int_V \rho F_i \delta v_i dV \dots (9)$$

式(7)は圧縮性、(9)は非圧縮性の剛塑性問題の解析に用いることができる。ただし式(9)を用いる場合可容速度は非圧縮性の条件を満足しなければならない。ところが平面応力状態を除いてこれを一般に満す可容速度を見つけることは困難であるので Lagrange の乗数法を用いて可容速度に加わる非圧縮性の拘束を外す場合が多い。すなわち

$$\int_V \sigma_{ij}' \delta d_{ij} dV - \int_{A_t} \bar{t}_i \delta v_i dA - \int_V \rho F_i \delta v_i dV - \int_V \delta \lambda d_{ii} dV - \int_V \lambda \delta d_{ii} dV = 0 \dots\dots\dots (10)$$

ここで λ は Lagrange 乗数で変位速度が真の解に一致したとき静水圧成分になることが知られている⁵⁶⁾⁵⁷⁾。上式において左辺第3項までは仮想仕事の原理を表し、第4、5項は非圧縮性拘束に関する項である。構成式(8)がポテンシャルから導かれ、外力が保存力である場合、仮想仕事の原理(9)、(10)はそれぞれ範囲関数の可容速度 v_i による最小条件あるいは範囲関数の可容速度 v_i と Lagrange 乗数 λ による停留条件になる。これらの変分原理は可容速度 v_i が剛塑性境界値問題の正解に一致したとき範囲関数が極値を持つことを述べている上界定理⁶⁰⁾と同等であることを示している。式(10)のように速度 v_i と Lagrange 乗数(静水圧) λ を変数とする変分原理を混合型の変分原理と呼ぶ。

剛塑性体の有限要素法は仮想仕事の原理(10)あるいはそれに対応した変分原理によつて導出することができる。ここでは式(10)を用いて有限要素法を導出する。この場合変数は速度 v_i と Lagrange 乗数 λ の2つでありそれらを式(4)と同様に近似する。

$$v_i = \psi_N v_{iN} \quad \lambda = \phi_M \lambda_M \dots\dots\dots (11)$$

v_{iN} は節点Nにおける速度 v_i の値、 λ_M は節点Mにおける Lagrange 乗数 λ の値を表す。 ψ_N, ϕ_M は形状関数である。一般に Lagrange 乗数 λ に関する節点は要素内部にとり速度に対する節点と一致させない。これは式(10)においてひずみ速度の近似度と Lagrange 乗数の近似度が同程度になるように配慮されることによる。式(11)を(10)に代入して構成式(8)を考慮し仮想変位速度 δv_i 、Lagrange 乗数の変動 $\delta \lambda$ の任意性に注目すると次式が得られる⁶¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} K_{NIM1} v_{M1} + V_{NIM} \lambda_M &= P_{Ni} + F_{Ni} \\ V_{NIM} v_{iM} &= 0 \\ K_{NIM1} \int_{V_0} \frac{1}{2g} (\psi_{M,i} \delta_{j1} + \psi_{M,j} \delta_{i1}) \psi_{N,j} dV & \dots (12) \\ V_{NIM} &= - \int_{V_0} \phi_M \psi_{N,i} dV, \\ P_{Ni} &= \int_{A_{te}} \bar{t}_i \psi_N dA, F_{Ni} = \int_{V_0} \rho F_i \psi_N dV \end{aligned} \right\}$$

式 (12)_{1,2} は要素の有限要素方程式と非圧縮性の条件を表している。マトリックス K_{NIM1} は式 (5) の場合と同様剛性マトリックスを表している。 P_{Ni} , F_{Ni} は表面力と物体力に等価な節点力マトリックス, V_{NIM} 非圧縮性の拘束によるマトリックスである。上式中 g は応力を介して速度 u_1 の関数となつていたので式 (12)₁ は速度に関して非線形方程式である。すべての要素について式 (12) に対応した有限要素方程式と非圧縮性の条件式を導出し式 (5) の場合と同様にして重ね合わせると未知数の数に等しい非線形連立方程式が得られる。通常このような方程式は Newton-Raphson 法のような繰返し法を用いて解析される⁵⁷⁾⁵⁸⁾。

ところで、式 (12) が示すように Lagrange 乗数が未知数として入っているために全体の未知数の数が増加し得られる連立方程式の係数マトリックスの対角成分に零が現れるので注意を要する。

ZIENKIEWICZ らは⁶²⁾ 流れ関数を用いて体積一定の条件を満す可容速度を表し仮想仕事の原理 (9) から流れ関数を未知数とする有限要素法を提案している。この手法では 2 次元、軸対称問題は節点における流れ関数の値を求める問題におきかえられる。ただし変位成分は流れ関数の 1 次導関数として表されるので、要素内および要素間において流れ関数の 1 次導関数の連続性を満すことが要請され、板の曲げにおけると同様 C^1 連続についての注意が必要になる。とくに任意形状の要素を用いたとき、それを満足させることは困難でいわゆるハイブリッド型の有限要素法を用いなければならない⁶³⁾。この方法では圧力分布を直接求めることはできないので応力はつり合式の積分等によつて計算される。上記の要素内および要素間の流れ関数の連続性の問題を解決し計算時間を短縮する試みがある⁶⁴⁾。それによると流れ関数を既知流れ関数モードと流れ方向に変化する未知結合係数の積で表し剛塑性問題を未知結合係数を決定する 1 次元の問題に置きかえている。

可容速度に加わる非圧縮性の拘束を数値計画法においてしばしば用いられるペナルティ法を用いて処理する試みがある⁶⁵⁾⁶⁶⁾。その場合式 (10) の Lagrange 乗数 λ のかわりに正の大きな数が用いられる。また $\delta(d_{ii})$ のかわりに $\delta(d_{ii})^2$ を用いる。このようにすることによつて $d_{ii} \approx 0$ のとき式 (10) を最小条件とするもとの範囲関数の最小化のペナルティとなりその結果非圧縮性に近い変形速度が得られる。この場合も応力はつり合式から求めな

なければならない。

以上は変位速度に何んらかの拘束を加えて非圧縮性条件を満足させ剛塑性問題を解くことを試みた例であるが、材料にごくわずかに圧縮性を許容させることによつて速度のみを未知数とし、しかも直接応力も求めることができる有限要素法も提案されている⁶⁷⁾⁶⁸⁾。

いずれの解析法を用いても剛塑性体の変形は非圧縮性かそれに近いものであると考えてよい。式 (12) によつて剛塑性変形を解析する場合、非圧縮性の拘束が節点速度に加わり自由度が少なくなることに注意しなければならない。もし要素内で平均的に非圧縮性の条件を満足させるならば、 $\phi_1 = 1$ となり Lagrange 乗数は要素ごと一定値をとり要素 1 個あたりの非圧縮性の拘束は 1 となる。しかしながら Lagrange 乗数が要素内で分布する場合、 ϕ_M も一定ではなくなり、式 (12) の V_{NIM} の計算は Gauss の積分法等によつて数値的に行われる。したがつて 2・2 において述べたと同じ理由によつて Gauss 点の数だけ非圧縮性の拘束が加わることになる。またペナルティ法あるいはごくわずかに圧縮性を許容する手法を用いた場合は上記のように陽な形の拘束はないが弾塑性解析のところで言及したと同じ拘束が加わる。以上から剛塑性解析のときも $N_F/N_C > 1$ となるような有限要素分割モデルを用いなければよい結果は得られない。

ところで式 (12) を線形化して解く場合、初期値の与え方によつては収束した解が得られない場合がある。現在のところいかなる初期値を用いれば収束するかといった収束に対する判断規準はないようである⁶⁹⁾。解析者はこれまでに得られた結果、経験などから初期値を決めるのであるが、定常問題のような場合はポテンシャル流れを解析してそれを初期値とするのも一つの方法である。非定常問題に対しては弾性変形を初期値とし、それにつづく計算では 1 つ前の解を初期値とすることによつてよい結果が得られている。このようにすると式 (12) の解が 2 個以上存在する場合、1 つまえの解の延長上につぎの解が得られるので都合がよい。

剛塑性問題においても剛性域と塑性域を区別することは重要であるが、あらかじめそれはわからないので式 (12) を解く繰り返し計算の各ステップでそれを判断しなければならない。はじめに全体を塑性域と見なし、ひずみ速度がある大きさ以下のところを剛性域とする方法が最も簡単である。このようにして速度を求めたあとそれを積分して変位を求める方法は弾塑性問題の場合に準じる。

3.2 剛塑性有限要素法の適用例

平面応力状態にある切欠き板の極限解析⁵⁵⁾、超塑性有孔板の変形解析⁵⁸⁾、平面ひずみ状態にある板内のポイドの成長の解析⁷⁰⁾が行われた。

塑性加工における基本的な問題として重要な柱体のすえ込みが解析された⁵²⁾。解析には 4 角形 4 節点リング要

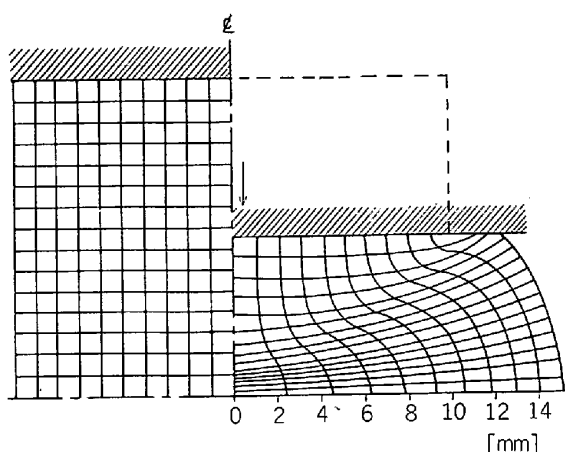


Fig. 3. Distorted grid on diametral section of workpiece upset down to 50% of initial height⁸⁴⁾.

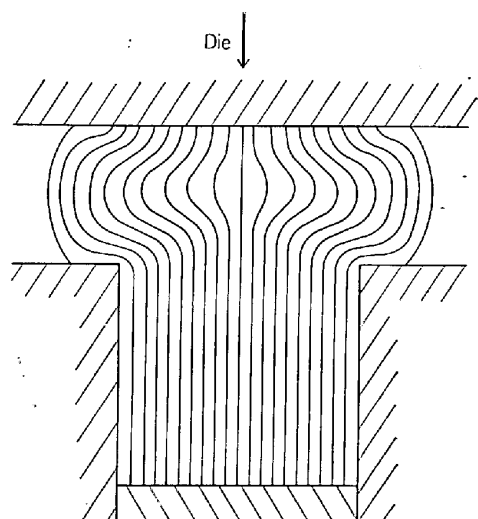


Fig. 4. Cold heading process and flow lines in the workpiece⁷⁵⁾

素が用いられ、要素平均で非圧縮性の条件が満たされるようになってきている。端面の摩擦が大きくなるとはじめに試料の自由側面にあつた一部が圧縮中ダイスと接触をはじめめるいわゆる folding 現象がはじめて解析された。Fig. 3 に変形前と圧縮率が 50% のときのグリッドの変形を示す⁸⁴⁾。同じ問題が重み付き残差法⁷¹⁾、圧縮性を許容する有限要素法⁶⁷⁾によつて解析されている。工藤らは多くの研究者によつて解析された結果の比較検討を行つている²⁷⁾。72) と 73) ではリングの圧縮を解析している。複雑な形状の鍛造解析⁷⁴⁾、板の圧縮⁶⁸⁾、ポンチの押込み問題⁶⁷⁾が解かれた。Fig. 4 はヘッディング過程中の物体内の材料の流れを表す流線⁷⁵⁾で実験によつて得たものといふ一致を示している。

押し出し加工に関しても幅広い解析が行われている。56) は平面ひずみ押し出し、66)、76)、77) は軸対称押し出しを扱っている。KOBAYASHI ら⁷⁸⁾ は 2 段押し出しと

1 段押し出しによる結果の比較検討を行い前者の変形が後者に比べてゆるやかであることを示した。押し出しと引き抜き加工における延性破壊を研究する目的で 79) ではきわめて広範囲の計算例を示し材料定数、ダイス形状、摩擦の影響等が調べられた。これらのデータをもとに押し出しおよび引き抜きの加工性が調べられた⁸⁰⁾。パイプの押し出し⁸¹⁾⁵⁸⁾および引き抜き⁵⁸⁾、後方押し出し⁶⁶⁾、側面押し出し⁶¹⁾に関する研究もある。このようなダイスを用いた加工過程の解析ではダイスに入る部分とダイスから出てゆく部分において変形拘束が急に变化する。したがつて変形に特異性を含むような要素を用いた取り扱いも必要であろう。82) ではペナルティ法を用いてダイレス引き抜き加工の解析を行つている。

77)、81)、83) は圧延に関する論文で、77) は応力速度の影響も考慮している。81) は粘塑性体として Perzyna 型の構成式を用いて解析を行つておりロールに入るまえおよび後の自由表面の取り扱いに注意が払われている。

板の引張成形、深絞り、パンチング⁸¹⁾の解析、深絞り中のフランジ部の耳の発生に関する考察⁸⁴⁾⁸⁵⁾が行われ、初期フランジ形状と深絞り中のフランジ板厚の分布との関係が調べられた⁵⁸⁾。いずれの研究もフランジ部のみを計算の対象としているため大きく変形したところにおいては本来の深絞りとは違つてくることは否めないであろう。今後フランジ以外の部分をも含めた計算が望まれる。

4. 金属成形中の熱伝導問題

4.1 熱伝導解析のための有限要素法

大部分の金属の成形は熱発生を伴うのでそれによつて材料に温度変化が生じ特性が变化する。したがつて変形と温度変化はお互いに連成し解析を困難なものとしている。しかしながら最近このような問題に対しても個別に適した手法を見つけて解く試みがなされいくつかの興味深い結果が得られている。ここでは有限要素法による連成および非連成熱伝導問題の解析方法を概説する。

物体内の温度分布が変形による消散エネルギー Q によつて決定される連成問題において熱の平衡方程式はつぎのように表される²⁾。

$$\rho c \dot{T} = (KT, i)_{,i} + Q \dots \dots \dots (13)$$

ここで T は絶対温度、 K は熱伝導率、 c は比熱、 ρ は密度を表す。消散エネルギー Q は一般に変形量の非線形関数として表される。したがつて式 (13) には温度と変位の 2 種類の変数が含まれていることになる。さらに第 2、3 章で示した材料の構成式は温度変化の影響を含んだものとなる。このように変形を求める基礎式と温度を求める基礎式は構成式と消散エネルギーを介してお互いに連成する。現在のところ熱弾性の特別な場合⁹⁰⁾を除いてこのような連成問題を一般に解いた例は見あたらないようであ

る。

ところで式(13)の有限要素表示を得るために、要素内の温度 T とその時間導関数 \dot{T} を要素の節点におけるそれらの値 T_M, \dot{T}_M と形状関数 ψ_M を用いてつぎのように表す。

$$T = \psi_M T_M, \quad \dot{T} = \psi_M \dot{T}_M \dots\dots\dots (14)$$

式(13)に前記仮想仕事の原理に対応した Galerkin 法を適用することによって次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} R_{NM} T_M + \dot{R}_{NM} \dot{T}_M &= S_N + R_N \\ R_{NM} &= \int_{V_e} K \psi_{M,i} \psi_{N,i} dV, \\ \dot{R}_{NM} &= \int_{V_e} \rho C \psi_N \psi_M dV \\ S_N &= \int_{A_{eq}} \bar{q} \psi_N dA, \quad R_N = \int_{V_e} Q \psi_N dV \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

ここで \bar{q} は物体の表面 A_{eq} で大きさが規定された熱流である。消散エネルギー Q の具体形が与えられると R_N はマトリックスと節点変位の積によつて表すことができる。ただし消散エネルギー Q が変位の非線形関数の場合、そのマトリックスにも節点変位が含まれた非線形系になる。定常状態では $\dot{T}_M = 0$ となり式(15)₁左辺第2項は無くなる。非連成の場合 R_N を既知とすることができ(15)₁ はいわゆる熱伝導有限要素方程式となる。式(15)₁ はいわゆる連立非線形微分方程式を表しているが、差分法を適用することによつて微分は以前の計算ステップにおける値によつて表示でき、代数方程式に置き換えることができる⁸⁷⁾。

4.2 熱伝導有限要素法の適用例

熱伝導のみを扱う場合の詳細な説明については Zienkiewicz の教科書²⁾にあるのでここでは最近解析された2, 3の連成問題の例を示す。

MORGAN らは⁸⁸⁾⁸⁹⁾ 連続铸造中の熱応力を求めるために、ある小さな時間間隔の温度変化を式(15)で R_N を落したもから求めそれを変形を求めるときに初期ひずみ項として付け加える手法を用いた。材料特性は温度に依存し、応力が降伏限を越えたとき Perzyna 型³⁷⁾の構成式が用いられた。ロールに入るまでの板厚が一樣な場合と徐々に薄くなる場合が比較され、後者の冷却特性がよいことが示された。

定常状態では式(15)で $\dot{T}_M = 0$ となる。ZIENKIEWICZ ら⁸⁷⁾はこの状態にある押し出し加工中の材料に生じる変形と温度変化を式(12), (15)を交互に解くことによつて求め、押し出し速度を変化させたときの加工材中の温度分布の変化を求めた。Fig. 5 は同様の手法を用いて求めた軸対称押し出し中の材料とダイスの温度分布を表している⁷⁷⁾。Fig. 6 はリングの圧縮で温度効果を考慮した場合とそれを考慮しない場合の格子の変形および変形中のリングとダイスの温度分布を表している⁷⁵⁾。温度を考慮することによつて材料の流れがよくなったことが示され

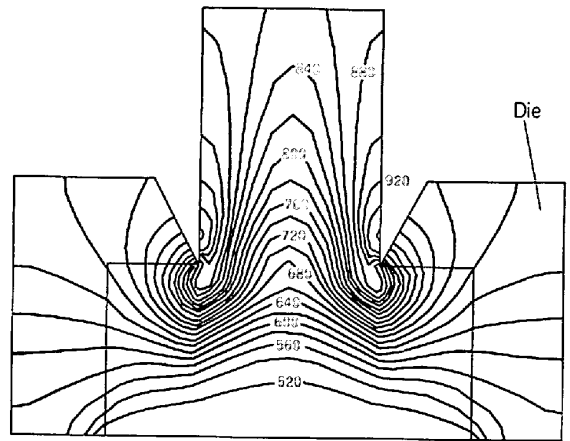
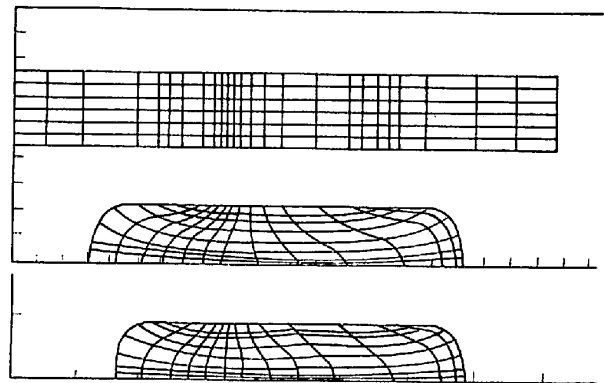
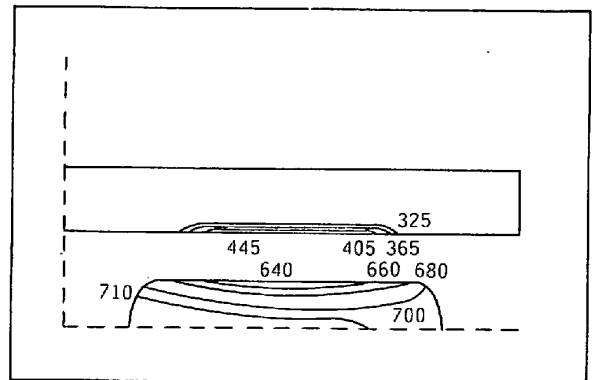


Fig. 5. Axisymmetric extrusion temperature distribution⁷⁷⁾.



Computed grid distortions in ring compression at 50% reduction in height with (upper) and without (lower) temperature effect.



Temperature field in the die and the workpiece at 50% reduction in height in ring compression (unit degree K).

Fig. 6. Compression of the ring⁷⁵⁾.

ている。

井上らは⁸⁶⁾⁹¹⁾焼入れ時に鋼が組織変化(相変態)することから通常の弾塑性解析では十分でないので、組織変化と温度場の連成を考慮した熱伝導方程式を導き、式(15)に対応した有限要素方程式を求めた。微小時間間隔に対してそれを解き重量分率、温度変化を独立変数に取り入れた構成式⁹²⁾を用いて式(5)に対応した有限要素方

程式を解くことによつて鋼焼入れ時における温度、組織分布、冷却曲線、残留応力等を求めている。

5. あとがき

金属成形問題の解析に関連して、弾塑性、剛塑性有限要素法および熱伝導を扱う有限要素法とそれによつて得られた最近の成果を概説した。これらの成果は金属の成形にたずさわる人々からの要請に対して十分ではないが部分的には答えるものであると考える。しかしながら本文であげた例は解析出来たものであり、同様の手法を用いて別の問題を解いた場合必ずよい結果を得るという保証はない。これは非線形問題の特徴であり、この分野において有限要素法を線形構造解析におけるようなブラックボックス的な解析法として使うにはまだ時期尚早であるとする。有限要素法はあくまでも解析法であつてそれが持つ能力を十分に発揮するか否かは成形にかかわる諸現象のより高度の研究にかかつている。今後その成果をふまえてより多くの人々が出来ただけ多くの問題を解く努力を重ねることが非線形問題解析における有限要素法の信頼性および実用性向上に結びつくものと思われる。

筆者の手許にある資料を中心に本文を書いたために内容に偏りがあるものとする。紙面の都合と力量不足で十分意を尽せなかつた点および書き落した点があることと合せてお許しいただきたい。本文が今後この分野の研究をされる方に多少とも役立てば幸甚である。

最後に本文を書く機会を与えて下さいました東京工業大学神馬敬教授、東京大学木原諄二助教授に感謝致します。

文 献

- 1) M. J. TURNER, R. W. CLOUGH, H. C. MARTIN, and L. J. TOPP: *J. Aeron. Sci.*, 23 (1956), p. 805
- 2) O. C. ZIENKIEWICZ: *The Finite Element Method*, 3rd Edition (1977) [McGraw-Hill]
- 3) 加川: 電気・電子のための有限要素法入門 (1977) [オーム社]
- 4) A. R. MITCHELL and R. WAIT: *The Finite Element Method in Partial Differential Equations*, (1977) [Wiley]
- 5) K. J. BATHE and H. OZDEMIR: *Computer & Structures*, 6 (1976), p. 81
- 6) R. HILL: *J. Mech. Phys. Solids*, 6 (1958), p. 236
- 7) R. HILL: 原著, 鷺津, 山田, 工藤訳: 塑性学 (1954) [培風館]
- 8) H. KITAGAWA and Y. TOMITA: *Proc. 21 st. Japan. Natl. Congr. Appl. Mech.*, (1971), p. 271
- 9) H. KITAGAWA and Y. TOMITA: *ZAMM.*, 25 (1972), p. 183
- 10) R. H. GALLAGHER: 原著, 川井監訳: 有限要素解析の基礎 (1976) [丸善]
- 11) R. McMEEKING and J. R. RICE: *Int. J. Solids & Struct.*, 11 (1975), p. 601
- 12) H. D. HIBBITT, P. V. MARCAL, and J. R. RICE: *Int. J. Solids & Struct.*, 6 (1970), p. 1069
- 13) A. NEEDLEMAN: *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 39 (1972), p. 964
- 14) H. J. ARGYRIS and J. St. DOLTSINIS: *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 20 (1979), p. 213
- 15) L. D. HOFFMEISTER, G. A. GREENBAUM, and D. A. EVENSEN: *AIAA. J.*, 9 (1971), p. 1248
- 16) Y. YOKOO, T. NAKAMURA, and K. UETANI: *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 10 (1976), p. 503
- 17) Y. YAMADA, N. YOSHIMURA, and T. SAKURAI: *Int. J. Mech. Sci.*, 10 (1968), p. 343
- 18) J. C. NAGTEGAAL, D. M. PARKS, and J. R. RICE: *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 4 (1974), p. 153
- 19) E. H. LEE, R. L. MALLETT, and R. M. McMEEKING: *Numerical Modeling of Manufacturing Process*, Eds. R. F. Jones. H. Armen and J. T. Fong, (1977), p. 19. [ASME]
- 20) D. S. MALKUS and J. R. HUGHES: *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 15 (1978), p. 63
- 21) L. R. HERRMANN: *AIAA. J.*, 3 (1965), p. 1896
- 22) S. NEMAT-NASSER and M. TAYA: *Int. J. Solids & Struct.*, 16 (1980), p. 483
- 23) 北川, 富田: 塑性と加工, 14-153 (1973), p. 778
- 24) 瀬口, 進藤, 春原: 塑性と加工, 14-153 (1973), p. 796
- 25) 高橋, 塩野, 小林: 塑性と加工, 14-153 (1973), p. 558
- 26) H. KUDO and S. MATSUBARA: *Ann. C. I. R. P.*, 23/2 (1974), p. 219
- 27) H. KUDO and S. MATSUBARA: *Proc. IUTAM, Symp. Metal Forming Plasticity.*, (1978), p. 378
- 28) R. M. McMEEKING: *J. Mech. Phys. Solids*, 25 (1977), p. 357
- 29) R. WAIT: *J. Inst. Maths. Applics.*, 20 (1977), p. 133
- 30) 井関, 神馬, 室田: 機論, 40-330 (1974), p. 372
- 31) 北川, 仲町, 富田, 山口: 機論43-366 (1977), p. 470
- 32) A. S. WIFE: *Int. J. Mech. Sci.*, 18 (1976), p. 23
- 33) S. W. KEY, R. D. KRIEG, and K. J. BATHE: *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 17/18 (1979), p. 597
- 34) Y. YAMADA, A. S. WIFE, and T. HIRAKAWA: *Proc. IUTAM. Symp. Metal Forming Plasticity*, (1978), p. 158
- 35) C. C. CHU: *Int. J. Solids & Struct.*, 16 (1980),

- p. 913
- 36) *N. M. WANG and B. BUDIANSKY*: Trans. ASME, J. Appl. Mech., 45 (1978), p. 73
- 37) *P. PERZYNA*: Fundamental Problems in Visco-Plasticity, Recent Advances in Applied Mechanics, (1960), p. 9 [Academic Press]
- 38) *H. KITAGAWA, E. NAKAMACHI, and Y. TOMITA*: Proc 6th NAMRC., (1978), p. 236
- 39) *E. H. LEE, R. L. MALLETT, and W. H. YANG*: Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 10 (1977), p. 339
- 40) 山田, 高塚: 塑性と加工, 14-153(1973), p. 758
- 41) *J. H. ARGYRIS and J. St. DOLTSINIS*: Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 20 (1979), p. 213
- 42) *A. NEEDLEMAN*: J. Mech. Phys. Solids., 20 (1972), p. 111
- 43) *M. A. BURK and W. D. NIX*: Int. J. Solids & Struct., 15 (1979), 379
- 44) *A. NEEDLEMAN*: Int. J. Solids & Struct., 9 (1973), p. 981
- 45) *A. NEEDLEMAN*: J. Mech. Phys. Solids., 24 (1976), p. 339
- 46) *A. NEEDLEMAN and V. TVERGAARD*: J. Mech. Phys. Solids., 25 (1977), p. 159
- 47) *V. TVERGAARD*: Int. J. Mech. Sci., 20(1978), p. 109
- 48) *V. TVERGAARD*: J. Mech. Phys. Solids., 24 (1976), p. 291
- 49) 北川, 田辺, 宿利, 浜田: 機論, 46-405(1980), p. 486
- 50) *Y. YAMADA*: Int. J. Comp. Struct., 8 (1978), p. 533
- 51) *C. C. CHU*: Trans. ASME, J. Appl. Mech., 46 (1979), p. 889
- 52) 冨田, 北川, 進藤: 第30回応用力学連合講演会論文集 (1980), p. 127
- 53) *S. STÖREN and J. R. RICE*: J. Mech. Phys. Solids., 23 (1975), p. 421
- 54) *J. W. HUTCHINSON and V. TVERGAARD*: Int. J. Mech. Sci., 22 (1980), p. 339
- 55) *P. V. MARCAL and I. P. KING*: Int. J. Mech. Sci., 9 (1967), p. 143
- 56) *M. LUNG and O. MAHREHOLTZ*: Trans. CSME., 2 (1973-1974), p. 31
- 57) *C. H. LEE and S. KOBAYASHI*: Trans. ASME, J. Engng. Ind., 95 (1973), p. 865
- 58) *Y. TOMITA and R. SOWERBY*: Int. J. Mech. Sci., 20 (1978), p. 361
- 59) *F. K. G. ODQVIST and J. HULT*: 村上訳: クリ-ブ強さの理論, (1967) [培風館]
- 60) 工藤: 塑性力学, (1968) [森北]
- 61) *Y. TOMITA and R. SOWERBY*: Int. J. Mech. Sci., 21 (1979), p. 505
- 62) *O. C. ZIENKIEWICZ and P. N. GODBOLE*: Int. J. Num. Meth. Engng., 8 (1974), p. 3
- 63) *T. H. H. PIAN*: Variational Methods in Engineering, Ed., Department of Civil Engineering University of Southampton, 1 (1972) 3/1-3/23
- 64) *Y. TOMITA, Y. SEGUCHI, A. SHINDO, and K. TANAKA*: Proc. 8th NAMRC (1980), p. 144
- 65) *J. W. H. PRICE and J. M. ALEXANDER*: Proc. 4th NAMRC (1976), p. 46
- 66) *O. C. ZIENKIWICZ and P. N. GODBOLE*: J. Strain Analysis, 10 (1975), p. 180
- 67) 森, 島, 小坂田: 機論 45-396 (1979), p. 955
- 68) 森, 島, 小坂田: 機論 45-396 (1979), p. 965
- 69) 中桐: 数値計算の安定と収束に関する考察, 第15, 16回塑性加工学会講習会テキスト(1979), p. 21
- 70) *M. A. BURKE and W. D. NIX*: Int. J. Solid. Struct., 15 (1979), p. 55
- 71) *K. ROLL*: Annals. CIRP., 28/1 (1979), p. 141
- 72) *C. C. CHEN and S. KOBAYASHI*: ASME-Paper, 28 AMD (1978), p. 163
- 73) *J. W. H. PRICE and J. M. ALEXANDER*: Int. J. Mech. Sci., 21 (1979), p. 417
- 74) *S. KOBAYASHI*: Proc. 4th Int. Conf. Production Engineering Tokyo, (1980), p. 50
- 75) *S. KOBAYASHI*: Proc. 8th U. S. National Congr. Appl. Mech., (1978), p. 115
- 76) *W. KLIE, M. LUNG, and O. MAHRENHOLTS*: Mec. Res. Comm. 1 (1974), p. 315
- 77) *P. R. DAWSON*: ASME-Paper AMD 28 (1978), p. 55
- 78) *C. C. CHEN and S. KOBAYASHI*: Annals. CIRP., (1978)
- 79) *S. I. OH, C. C. CHEN, and S. KOBAYASHI*: Trans. ASME, J. Engng. Ind., 101 (1979), p. 36
- 80) *C. C. CHEN, S. I. OH, and S. KOBAYASHI*: Trans. ASME, J. Engng. Ind., 101 (1979), p. 23
- 81) *O. C. ZIENKIEWICZ, P. C. JAIN, and E. ONATE*: Int. J. Solids & Struct., 14 (1978), p. 15
- 82) *J. W. H. PRICE and J. M. ALEXANDER*: 2nd Int. Symp. Finite Element Methods in flow Problems, (1976), p. 715
- 83) *S. SHIMA, K. MORI, T. ODA and K. OSAKADA*: Proc. 4th Int. Conf. Production Engineering Tokyo (1980), p. 82
- 84) 小林, *C. H. LEE, S. N. SHAH*: 塑性と加工, 14-153 (1973), p. 770
- 85) 後藤, 石瀬: 機論, 45-395 (1979), p. 808
- 86) 上村, 長岐, 井上: 材料, 27-303 (1978), p. 1152
- 87) *O. C. ZIENKIEWICZ, E. ONATE, and J. C. HEINRICH*: ASME-Paper, AMD. 28 (1978), p. 107
- 88) *K. MORGAN, R. W. LEWIS, and J. R. WILLIAMS*: The Mathematics of Finite Elements and Applications 111 Ed, J. R. Whiteman (1978), p. 319

-
- 89) *K. MORGAN and R. W. REWIS*: *FINITE Element Methods in the Commercial Environment*, Ed, J. Robinson 2 (1978) [Robinson and Associate], p. 681
- 90) *J. T. ODEN*: 原著, 山田監訳: 非線形連続体の有限要素法 1・2 (1979) (培風館)
- 91) 橋本, 井上, 山田: 材料, 27-296 (1978), p. 422
- 92) *T. INOUE and B. RANIECKY*: *J. Mech. Phys. Solids.*, 26 (1978), p. 187
- 93) 富田: 日本材料学会講座 “固体力学の基礎と最近の進歩” (1979), p. 64
-