



UDC 669.1:51

有限要素法と境界要素法

—数値解析法の実験計測への応用—

木原 諄 二*・相澤 龍彦*2

Finite Element Method and Boundary Element Method

Junji KIHARA and Tatsuhiko AIZAWA

1. はじめに

最近の境界要素法の発達 はめざましく、ポテンシャル問題、弾性問題¹⁾のみならず固有値問題²⁾、弾塑性問題³⁾等、これまで有限要素法が対象としてきた分野に広く応用されてきている。しかし、その余りの急速な研究動向は、一般に境界要素法が有限要素法にとつてかわるというような見方さえみ出しているやに見受けられる。もともと境界要素法は、境界のみを離散化し領域内部の挙動に関しては基本関数により与えているのに対して、有限要素法では領域内部の情報をも要素分割による離散化、要素ごとの内挿関数近似で考慮している。したがって、前者の対象は基本関数が知られている「確定的」問題であり、後者がその威力を発揮するような一般の非線形問題の解析に応用することはきわめて困難であろう。いわば、「もちほもち屋」なのであり、両解析手法のもつ要素・内挿関数等の概念、インプリメンテーションの差異により、両者はおのずとその解析対象を異にすると考えの方がよい。

本解説では、具体的に定式化、インプリメンテーション、計算精度の面からみた有限要素法と境界要素法との差異について考察し、さらに応用面での両者の利用法、特に境界要素法の実験計測法への応用を考える。

2. 定式化からみた有限要素法と境界要素法

数値解析法として、有限要素法と境界要素法はともに、連続系での変分問題を離散系でのそれで近似するのであるが、定式化の段階において、有限要素法は領域を「要素」に分割し各要素内で内挿関数（通常区分多項式）を仮定して離散化問題を構成するのに対し、境界要素法は境界を要素に分割し領域内で基本関数（通常グリーン関数）を利用して解くという違いがある。

まず、この定式化における両者の差異を明確にする目的で、図1に示す2次元領域におけるポアソン問題を、この2つの方法で定式化することを考える。このとき、対象となるポアソン問題は次式で与えられる。

$$-\nabla^2 u = f, \quad \Omega \text{ 内で} \dots\dots\dots (1)$$

$$u = \bar{u} \quad \Gamma_1 \text{ 上で} \dots\dots\dots (2)$$

$$\partial u / \partial n = \bar{q}, \quad \Gamma_2 \text{ 上で} \dots\dots\dots (3)$$

通常有限要素法⁴⁾では、式(1)~(3)に相当する連続系での変分原理を想定する。すなわち、

$$\delta \Pi = 0; \quad \Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u dV$$

$$- \int_{\Omega} f u dV - \int_{\Gamma_2} \bar{q} u dS \dots\dots\dots (4)$$

ここに、解 u は1階連続微分可能で式(2)の基本境界条件を満たす関数の中から選択される。次に、領域を要素分割し ($\Omega \approx \sum A_e$)、さらに式(4)に対応する離散系での変分問題を用いる。

$$\delta \Pi_{\text{FEM}} = 0; \quad \Pi_{\text{FEM}} = \sum_e \left[\frac{1}{2} \int_{A_e} \nabla u^h \nabla u^h dV \right.$$

$$\left. - \int_{A_e} f u^h dV - \int_{A_e \cap \Gamma_2} \bar{q} u^h dS \right] \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 u^h は試行関数であり、通常1階連続微分可能な区分多項式が使用され、また式(2)を満足する。式(5)を用いて解析を実行する場合、暗黙の内に要素がある種の正規条件を満たしていれば u^h は収束し、かつ式(4)の解 u を u^h が近似することを期待している。事実、通常有限要素法では、要素境界上の任意の点で u^h が連続であるため、この期待が実現される。ここで、有限要素法に関するやや高度な数学的議論⁵⁾を用いると、上記の近似性を有する数値解 u^h を式(5)と異なつた変分原理に基づいて決定することもできる。すなわち、その変分原理は

昭和56年7月7日受付 (Received July 7, 1981) (依頼解説)

* 東京大学工学部 工博 (Faculty of Engineering, The University of Tokyo)

*2 東京大学教養学部 工博 (College of General Education, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba Meguro-ku 153)

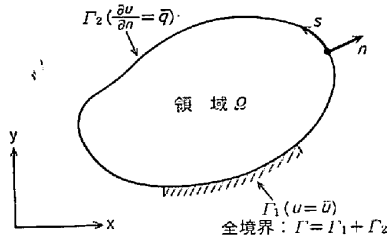


図 1 2次元ポアソン問題における記号の定義

$$\delta \Pi_h = 0; \Pi_h = \sum_{\partial A_0} \int \bar{u}^h q^{*h} dS - \frac{1}{2} \int_{\partial A_0} q^{*h} u^{*h} dS - \int_{\partial A_0 \cap \Gamma_2} \bar{u}^h \bar{q} dS - \int_{A_0} f u^{*h} dV \dots (6)$$

ここに、 ∂A_0 は各要素の要素境界、 \bar{u}^h は要素境界上で定義される試行関数で、通常1階連続微分可能で式(2)を満たす区分多項式が使用される。また、 u^{*h} は各要素内のみで支配方程式 $\nabla^2 u = 0$ を満たす近似関数であり、区分多項式が使用されることが多い。この方法はいわゆるハイブリッド法(混合法)の1つの定式化である。式(5)、(6)を比較すると、 f に関する積分項を除けば、他の項はすべて要素境界上のみでの積分になっていることがわかる。すなわち、 u^{*h} として1つの要素内のみで定義される基本解を用い、 u^{*h} の領域全体での微分連続性を保証するために、要素境界上で連続な試行関数 \bar{u}^h を使用すると、通常の有限要素法と同様な近似条件を満たす数値解を構成することができる。

ここで重要な点は、 $\nabla^2 u = 0$ を満たす解を利用することにより、対象とする問題の次元を1つおとすことができることである。次に、この点に着目して、式(5)に基づく有限要素法と異なる解法を考える。

式(1)~(3)に相当する連続系での次式の変分原理を考える。

$$-\int_{\Omega} u \nabla^2 u^* dV - \int_{\Omega} f u^* dV = \int_{\Gamma_2} (u q^* - \bar{q} u^*) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u} q^* - q u^*) d\Gamma \dots (7)$$

ここに、 u^* は次の式を満足する1つの基本解である。

$$\nabla^2 u^* + \Delta^i = 0 \dots (8)$$

ここに、 Δ^i は1つの集中負荷が点 i に作用することを示す Dirac のデルタ関数である。式(8)を式(7)に代入し整理すると、

$$c^i u^i + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma + \int_{\Omega} f u^* dV \dots (9)$$

ここに、 c^i は次式に示す Δ^i の積分値である。

$$c^i = \int_{\Omega} \Delta^i dV = \begin{cases} 1 & (\text{点 } i \text{ が領域 } \Omega \text{ の内にある場合}) \\ 1/2 & (\text{点 } i \text{ が境界 } \Gamma \text{ 上にある場合}) \\ \dots & \dots \end{cases} \dots (10)$$

式(9)より、この場合も対象とする問題の次元を1つおとすことができることがわかる。ただし、式(6)と異なる点は、採用した基本解の性質・形式が異なるため式(9)

では連続系の変分原理それ自体が境界積分項のみで記述されることである。式(9)に対応する離散系での変分原理も容易に導くことができる。

$$c^i (u^h)^i + \sum_{\Gamma_0 \cap \Gamma_2} \int_{\Gamma_0 \cap \Gamma_2} u^h q^* d\Gamma + \sum_{\Gamma_0 \cap \Gamma_1} \int_{\Gamma_0 \cap \Gamma_1} \bar{u}^h q^* d\Gamma = \sum_{\Gamma_0 \cap \Gamma_2} \int_{\Gamma_0 \cap \Gamma_2} \bar{q}^h u^* d\Gamma + \sum_{\Gamma_0 \cap \Gamma_1} \int_{\Gamma_0 \cap \Gamma_1} q^h u^* d\Gamma + \sum_{A_0} \int_{A_0} f u^* dV \dots (11)$$

ここに、 \sum_{Γ_0} は境界 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ 上で定義される境界要素の和であり、 u^h, q^h は境界上で定義される区分連続な試行関数である。

3. プログラム・インプリメンテーションからみた有限要素法と境界要素法

具体的に計算機を用いて、式(5)、(6)あるいは(11)を解く場合においても、数値解析法の性質の差異を反映して、入力データ構造、処理ルーチン、数値積分評価、連立1次方程式の解法等が異なっている。まずそれらの差異を比較するために、一覧表の形で表1に示す。要素分割に関しては、有限要素法では2次元領域を分割し節点番号・座標付けをする必要があるが、境界要素法では境界の方向を定めておけば節点番号は自動的に定めることができるので、節点座標のみを与えればよく、一般的に入力データ作成の省力化がはかれる。半面、数値積分は特異項を含む被積分関数を対象とするため一般に有限要素法と比較して面倒になり、特に点 i の近傍に積分点を取る場合には数値誤差が入りやすい。また連立1次方程式の解法も、系の全体マトリックスがバンド構造を有していないため、フルマトリックスとして解かねばならず、それにとりもなる数値計算の手間の増大も念頭に入れる必要がある。

このように、プログラム・インプリメンテーションに関しても、3つの方法の長所・短所があり、解析対象の性質を熟慮した選択が重要であることを示唆している。

4. 計算精度からみた有限要素法と境界要素法

有限要素法と境界要素法による数値解の挙動の違いをみるために、式(1)で示したポアソン問題⁶⁾を解析する。簡単のため f を定数関数 $f=1.0$ とし、境界条件はすべて Dirichlet 条件、 $u=\bar{u}=0$ とした。また領域 Ω は、図 2a に示すような1辺 10.0 の正方形領域 $0.0, 10.0[x] \times 0.0, 10.0[y]$ とした。図 2b, 2c に、正方形領域に対する境界要素法(定数要素)および有限要素法(3節点3角形要素)の要素分割(5x5)を示す。なお、図 2b において破線で示した分割は、 f が関与する面積積分を実行する際に用いる要素である。また解析にあたって、問題の対称性を考慮しなかつた。

まず、要素分割にとりもなる正方形領域内のポテンシャル値分布の収束挙動をみるために、図 3 に有限要素法と

表 1 有限要素法, ハイブリッド法, 境界要素法の差異

解法	有限要素法	ハイブリッド法	境界要素法
変分原理	式 (5)	式 (6)	式 (11)
要素分割	2次元要素分割 (節点番号, 節点座標)	1次元要素境界分割 (節点番号, 節点座標)	1次元境界要素分割 (節点座標)
数値積分	多項式の積分	多項式の積分 (原則として)	特異性のある積分
連立1次方程式の解法	バンド法 (帯構造マトリックス)	バンド法 (帯構造マトリックス)	対称クラウト法 (フルマトリックス)
処理ルーチン	入力→要素剛性等の作成→ 要素和→連立方程式→出力 (通常ルーチン)	通常ルーチン以外に, 要素 剛性作成の際に, 静的縮約 を実行する	通常ルーチン以外に, 出力 時に, 情報を得たい内点に 関係する積分を実行する

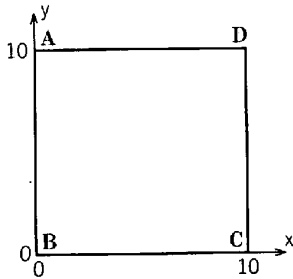


図 2. a 解析対象

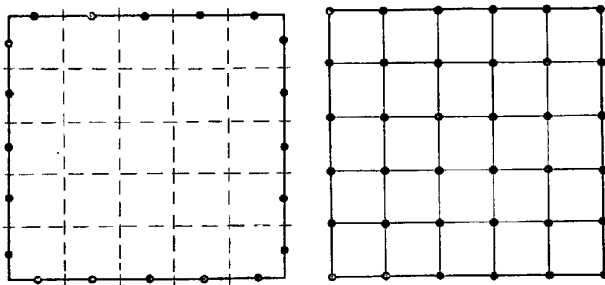


図 2. b 境界要素法の要素分割
(●: 節点位置)

図 2. c 有限要素法の要素分割
(●: 節点位置)

図 2 ポアソン問題の解析対象形状

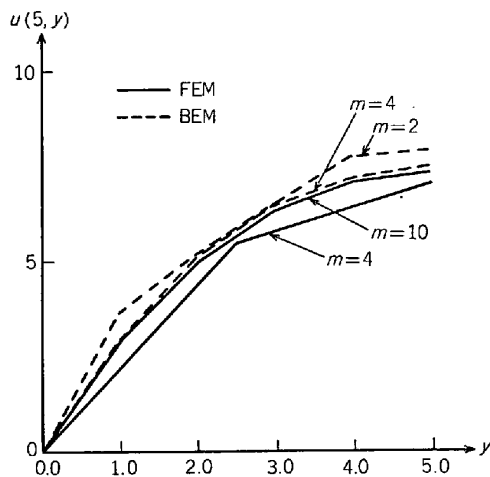


図 3 有限要素法と境界要素法との計算結果の比較

表 2 有限要素法と境界要素法による計算結果の比較
(正方形領域の中心でのポテンシャル値: $u(5, 5)$)

解法	有限要素法	境界要素法
分割数		
2	6.250	7.890
4	7.031	7.475
6	7.212	7.411
8	7.278	7.390
10	7.310	7.382
Exact	7.367	

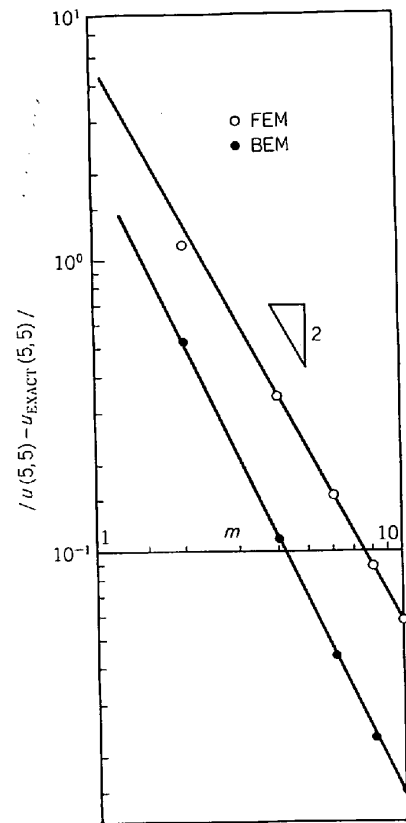


図 4 有限要素法と境界要素法との計算精度の比較

表 3 応用面からみた有限要素法, ハイブリッド法, 境界要素法

項目 \ 解法	有限要素法	ハイブリッド法	境界要素法
計算機規模	中型, 大型計算機	マイコン, 小型計算機	マイコン, 小型計算機
使用目的	数値解法	実験計測と併用する半実験的手法	実験計測系に組み込む実験的手法
期待する結果	領域内部における挙動, 系の応答	境界の解に与える影響を調べる	境界の解に与える影響を調べる
特徴	手軽に使用できて, しかも一般的な方法	理解するのが難しくて目的により有利, 不利がある	理解するのがやや難しく, また目的別手法である

境界要素法による解析結果をそれぞれ実線, 破線で示す. なお, 図中の m は正方形一辺の要素分割数である. 同図より, 分割数を増すにつれて, 有限要素解は下から境界要素解は上から正解に近づいていくことがわかる. また, 同じ m の分割に対しては, 境界要素法が有限要素法に比べて精度が良いようである.

次に, 両者の精度を比較するために, m を変えたときの正方形領域中心でのポテンシャル値 $u(5,5)$ の変化を求めた. 結果を, 表 2 および図 4 に示す. 図 4 は, 数値解と厳密解との誤差の絶対値を各 m 値に対して求めた図であるが, 有限要素法では理論どおり傾き 2.0 の直線となり数値解は要素分割の 2 乗に逆比例して精度を向上させていくことがわかる. しかし, 境界要素法では傾きがやや急になつており, 有限要素法より収束がややよいように思われる.

5. 応用面からみた有限要素法と境界要素法

有限要素法と境界要素法との差異に関する議論を総括する目的で, 両者の応用面における差異について考える. 表 3 にその概要を示す. 最近の計算機, 特にマイクロ・コンピュータの発達はめざましく, 1W=16 bit, 主記憶 128KB が通常である現時点では, 有限要素法, ハイブリッド法, 境界要素法をすべてマイ・コン上で機能させることが可能となつてきているが, 後者の 2 つはプログラム量が少なく主記憶を十分に活用できるという点で有利となろう. さらに, 実際面でもより重要な点はマイ・コンが使用できるとか, 計算速度がやや早いということ以上に, 対象とする問題として, 領域を支配する方程式の性質は十分わかっているが, 境界が解に与える影響を知りたい, さらに解がある定まつた量を示すように未知境界を求めたいということにある. つまり, 領域の内部挙動より境界の影響因子を知ることが重要となる問題も比較的多いのである. この場合には, 領域内部はラプラス方程式により支配される, あるいは弾性であるとして基本関数によりその挙動を表し, 境界についてはそれを離散化して詳細に検討する方法がよいであろう. ここに, 境界要素法が採用される根拠がある.

したがつて, 有限要素法が一般的な数値解法であるのに対して, 境界要素法は応用する目的によつてその有利, 不利が決定され, 例えば無限境界, 自由表面境界が問題となる場合には有利になり得るが, 他の応用ではフル・マトリックス性など手法自体のもつ短所を補うことができない場合も多い.

6. 境界要素法の実験計測への応用

前節で述べたように, 境界要素法が有利となるのは:

- ① 領域内部よりも境界条件が重要となる問題
 - ② マイ・コン程度で解き得る自由度数の少ない問題
- であり, ここではその 1 例として, 圧延板材の残留応力計測への境界要素法の応用について述べる.

これまで, 圧延材の形状不良と密接な関係を有する板幅方向残留応力分布を測定した例はきわめて少なく, 木原ら⁷⁾による, 板幅方向の垂直応力分布を 4 次式近似する方法, 石川ら⁸⁾による, 板材を圧延方向に平行に分割し各分割内の応力緩和量の和として板幅方向の垂直応力分布を求める方法が知られている程度である. ここでは, 定量計測として精度が高くまた簡便な残留応力測定法⁹⁾として, 境界要素法を用いた層除去法 (Layer Removed Method) を提案する.

本法では, 図 5 に示すような板材の適当な l ケ所にひずみゲージを貼付し, その後に圧延方向に垂直な方向に切断して, 板内の残留応力の再分布によるひずみの計測を行う. 次に, 切断線を含めた境界の要素分割を行い, 式(11)にしたがつて定式化する. このとき, 点 i をゲージ位置に定めることにより $3l$ 個の方程式が得られるが, 切断線上では, 変位, 圧力ともに未知であるため, この計測によつて得た $3l$ 個の式を用いてそれらを決定することを考える. なお, 切断線上の分割数を m とすると, 未知数は 1 節点 4 自由度 (2 つの変位成分, 圧力成分) で $4m$ 個, 方程式は式(11)より $2m$ 個, 実験計測より $3l$ 個であり, 本法により解を得るためには, $3l=2m$ でなければならない.

本法の特徴は, 所与の境界条件を用いて解を得るのではなく, 既知境界(本解析の場合切断線以外の外周では圧

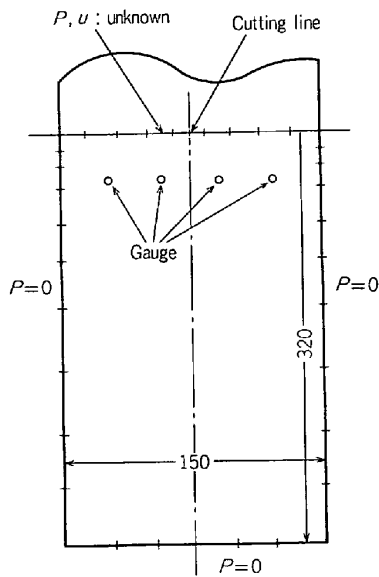


図5 圧延板材の境界条件, 寸法および代表的な要素分割

力はすべてゼロ)と領域内点における計測値から逆に未知の境界条件を求めるところにあり, 内点から未知境界までの補間は弾性問題における基本関数が負っている。

本解析を実施する場合には, 要素分割のし方と計測用に内点に貼布するゲージの位置が問題となる。前者に関しては, 点 i から要素までの距離と要素長さの比にばらつきがあると計算精度が落ちるので, 点 i からの要素の見込み角をほぼ等しくし, (要素長さ)/(距離)比がほぼ同程度になるように要素分割を行った。

後者に関しては, 理論上ゲージの位置はどこでもよいわけであるが, 切断線上の応力解放の影響は切断線から離れる程小さくなるという性質と切断をする際の攪乱, カッタの影響をさけるためにゲージを離して貼付したいという要請を考慮しなければならない。本実験では, 以下に述べるような試行計算によりゲージ位置を定めた。

従来の残留応力分布の測定結果の中から, 図6に示すように, P_x , P_y がそれぞれ切断線上での総和をゼロにする例を選び, 切断線上でその圧力分布を仮定し, 式(11)のみを用いて境界での変位を求め, これより内点での垂直方向応力 σ_y を計算した。図7に示す結果より, 内点が切断線から遠のくにつれて応力変化幅は小さくなり 120 mm 隔たつた位置ではほぼゼロとなることより, ゲージ位置は少なくともこの位置より内部でなければならないことがわかった。

次に, 本解析法の妥当性を示すために, 仮想的なゲージ位置を十分切断線から隔てて, ゲージ値をゼロとして本解析法により切断線上での残留応力分布を求めた。結果を図8に示す。図6, 8がほぼ一致することより, 本解析法の正しいことが示された。

最後に, 長さ 680, 板幅 150, 厚さ 1.09 の軟鋼板 ($G = 8400$; $E = 21500$, $\nu = 0.259$) をほぼ中心位置で切

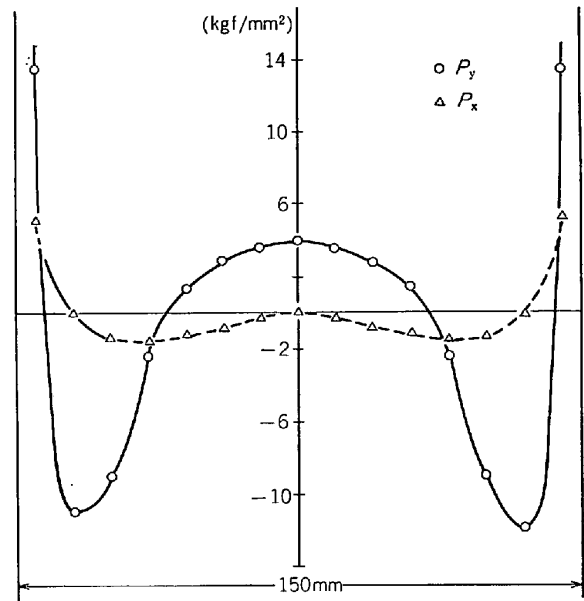
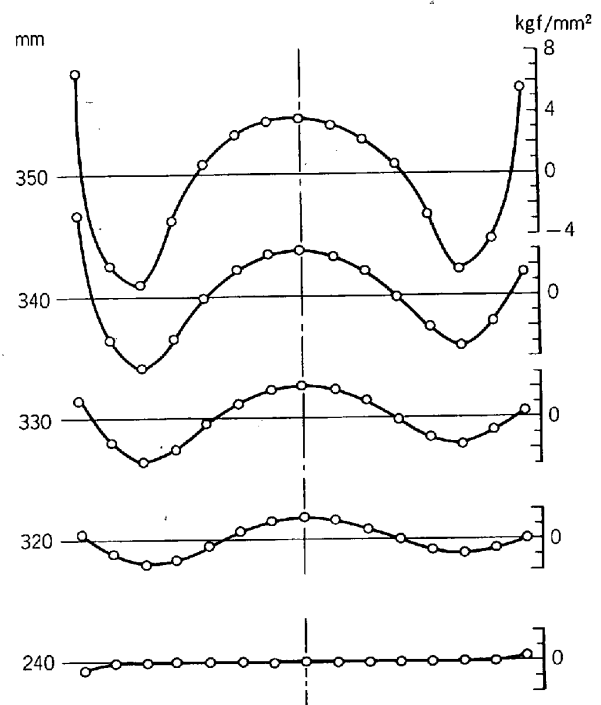


図6 切断線上の想定した応力分布

図7 内点での垂直応力 σ_y の計算結果

断して, 長さ 320, 板幅 150 の板を切り出した場合の切断線上での残留応力分布を図9, 10に示す。なお, 図9は切断直後のひずみ出力から計算した結果, 図10は 10 min 後のひずみ出力から求めたものである。まず両図を比較して一致することより, 応力の再分布は瞬時的でありゲージによる測定は切断後時間を置いて行う必要がないことがわかる。また同図より, 切断線の端部に大きな応力が生じこれが形状不良をもたらす原因となると推察される。

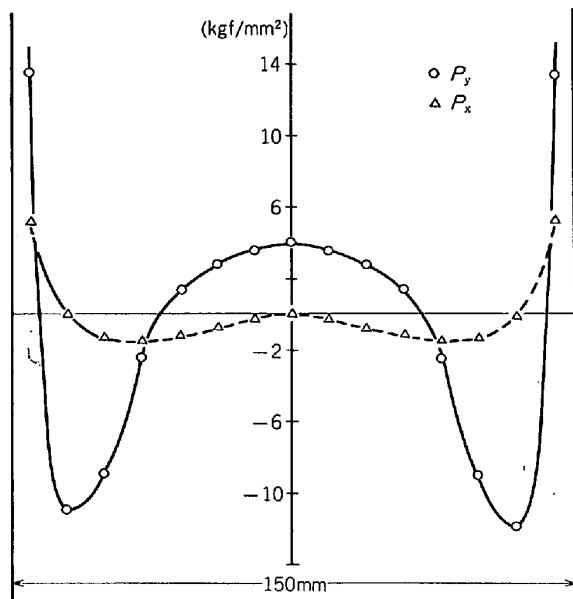


図8 内点でのゲージ値をゼロとして本解析法より求めた切断線上の圧力分布

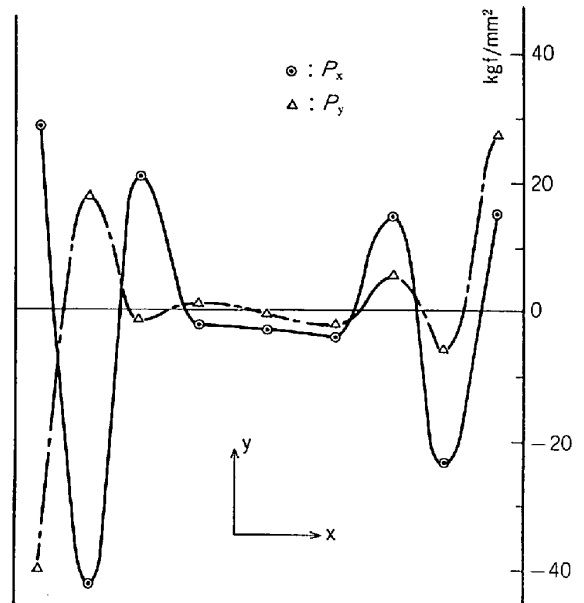


図10 切断10 min後の切断線上の圧力分布

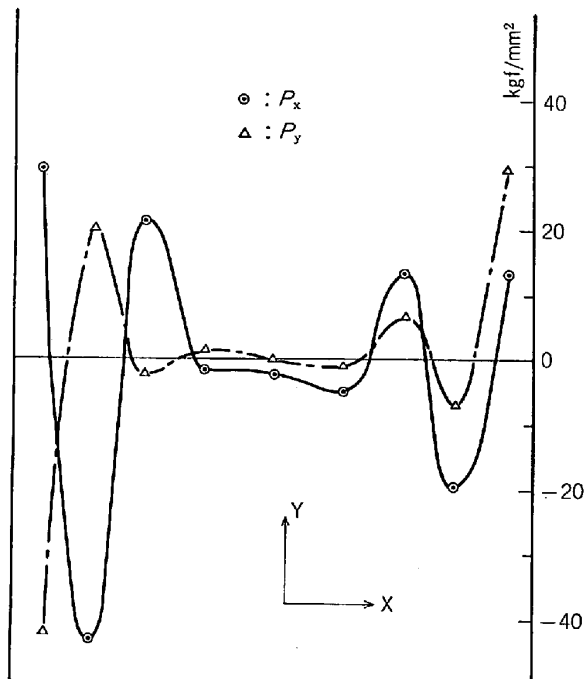


図9 切断直後の切断線上の圧力分布

7. おわりに

有限要素法と境界要素法との質的および量的差異を明らかにするために、ポアソン問題を例にとり、その定式化、インプリメンテーション、計算精度に関する両解析法の違いについて論じた。さらに応用面における両者の利用法の差異について述べる中で、実験計測手法として

の境界要素法の位置付けを強調し、その論拠として境界要素法を用いた残留応力測定法を示した。

今後、マイ・コンの機能向上にとともに、境界要素法を始めとする数値解法を組み込んだ実験計測法の研究が重要になるであろう。

文 献

- 1) C. A. BREBBIA: The Boundary Element Method For Engineers (1978) [Pentech Press]
- 2) Y. NIWA, S. KOBAYASHI, and M. KITAHARA: Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, 285 (1979), p. 17
- 3) P. K. BANERJEE, D. N. CATHIE, and T. G. DAVIES: Developments in Boundary Element Method, ed. by P. K. BANERJEE and R. BUTTERFIELD (1979), p. 65 [Applied Science Publishers LTD]
- 4) O. C. ZIENKIEWICZ: The Finite Element Method, 3rd Ed. [McGraw-Hill]
- 5) F. STUMMEL: R. A. I. R. O. Analyse numérique, 4 (1980), p. 81
- 6) 菊地文雄: 有限要素法概説 (1980) [サイエンス社]
- 7) 木原諄二, 狩野 彰: 塑性と加工, 20 (1979) 217, p. 116
- 8) T. ISHIKAWA, Y. TOZAWA, M. NAKAMURA, and T. KATO: Proc. of the International Conference on Steel Rolling, 2 (1980), p. 772
- 9) 木原諄二, 相澤龍彦: 鉄と鋼, 67 (1981) 6, p. 72