

論 文

UDC 536.212.2

急激な温度変化を伴う際の数値計算法と 簡単なモデルへの応用例

花崎 紘一*・小門 純一*・八田 夏夫*

Numerical Method for Violent Change of Temperature and Application to a Simple Model

Koichi HANASAKI, Jun-ichi KOKADO, and Natsuo HATTA

Synopsis :

In order to improve the accuracy and computing time of the numerical simulation for a heat transfer problem where the rate of temperature change is extremely high, the authors have developed a unique method which is proposed in this paper.

The method, for a non-steady heat transfer equation, has a distinctive feature that two fundamental equations on the heat transfer phenomena, that is,

$$\mathbf{q} = -\lambda \text{grad } \theta,$$

and

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c} \text{div } \mathbf{q}$$

are utilized respectively in computation. In this way, it mainly becomes much easier to determine the increment time of computing cycle, Δt which considerably affects to the accuracy as well as computing time of the numerical simulation.

The detail of the method and discussion on results of some simulations are described here.

1. 緒 言

鉄鋼の製造プロセスでは鋼材の加熱および冷却の作業がひんばんに行われる。これらの作業の良否によつて、鉄鋼製品に品質が左右されるので、きめの細かい伝熱現象を知ることが重要である。しかも、ほとんどの場合、非定常な工程で処理されるので、いわゆる熱の拡散方程式を解くことにより伝熱現象の把握や温度の予測を行っている場合が多い¹⁾。

この拡散方程式を解くための代表的な数値計算法として、前進差分法がある²⁾。これは与えられた初期条件をもとにして、ある時点の状態を知り、それをもとにしてさらにつぎの時点の状態を決定していく方法できわめて便利な計算法である。よく知られているように、この前進差分法には Implicit 形差分法と Explicit 形差分法がある。

前者の場合については、分割時間の設定は任意である

が、一つの差分方程式の中にはつぎの時点の値が少なくとも二個以上含まれており、すべての点について成り立つ差分方程式系を連立方程式によつて解かねばならない。したがつて、Implicit 形差分法は、日下部ら³⁾が行つているように、温度変化が緩慢で長時間にわたる温度推移の状態をシュミレートするのに有効であると考えられる。

それに対して、Explicit 形差分法の場合には、一個の差分方程式の中につぎの時点の値が一個だけしか含まれていないので、既知の値から直接的に解を得ることができる。しかしながら、この解法によつて、予知できる解を得るためには収束・安定条件によつて決まる分割時間で計算されねばならない。したがつて、分割時間が比較的大きく選択できるときには、非常に有効な計算法であると考えられる。いずれにしても、前進差分法の使用の適否は境界条件、熱媒体の形状、熱移動の緩急などのほかに計算時間の長短によつて決められるべきものであ

昭和 55 年 8 月 15 日受付 (Received Aug. 15, 1980)

* 京都大学工学部 工博 (Faculty of Engineering, Kyoto University, Yoshidahonmachi Sakyo-ku Kyoto 606)

る。

本論文では、短時間に急激な温度変化を伴う現象を、計算時間を短くしてシュミレートできる数値解法について論じている。一般に、熱伝導方程式は温度 θ 、時間 t 、熱伝導率 λ 、比熱 c 、比重 ρ とすると、

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \nabla^2 \theta \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる。これはつぎの二つの式、

$$\mathbf{q} = -\lambda \text{grad } \theta \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c} \text{div } \mathbf{q} \dots\dots\dots (3)$$

と全く等価であるので、それぞれ独立な式として用いる。(2)および(3)式はともに一階の差分式に変換されるので、座標変換が比較的容易となり、複雑な境界形状の熱媒体に対しても適用できる。また、すべての温度場における \mathbf{q} が(2)式によつて計算されると、(3)式の右辺の値が直接求まるので、左辺の $\partial \theta / \partial t$ に対して適当な条件を与えることができるので、温度変化の急激なときには密に、温度変化が緩慢なときには必要な程度に粗く、しかも同様の精度を保つて、温度推移の状態をシュミレートすることができる。

本論文の後半では、簡単なモデルにこの計算法を応用し、計算ルーチンに現れる $\partial \theta / \partial t$ を利用して、計算時間の短縮の方法と計算精度に対して評価を加えている。

2. 計算法の概要

2.1 座標系

本節では、単一のラミナフローによる高温鋼板の冷却過程の解析などに都合のよい軸対称円筒座標 (r - z 座標) を用いる場合の計算法について述べる。

軸対称問題では解析しようとする物体の中心軸を含む平面で切断した断面の右半分の部分についてのみ解析を行えばよい。したがつて、中心軸を z 軸、その直角方向を r 軸とする r - z 平面上にその半断面を描き、さらに Fig. 1 に示すように適当な格子点座標 (k - l 座標) により半断面を格子要素に分割し、このモデルについて差分近似の計算を行う。

したがつて、格子点の r - z 座標は k および l の関数と考えられるから、任意の r, z の関数 $f(r, z)$ の k, l に関する微分は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial k} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial k} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial k} \\ \frac{\partial f}{\partial l} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial l} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

さらに、これらから f の r および z の微分を求めると

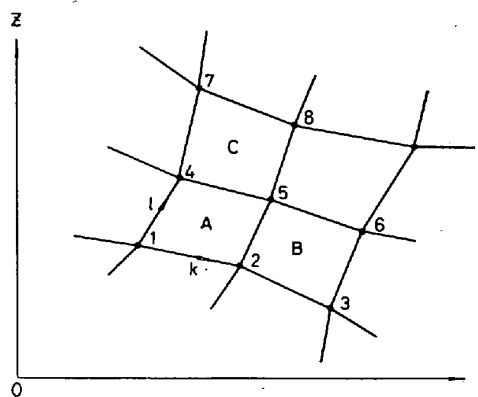


Fig. 1. Explanatory scheme for the principle of the calculation.

次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{1}{J} \left(\frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial z}{\partial l} - \frac{\partial f}{\partial l} \frac{\partial z}{\partial k} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{-1}{J} \left(\frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial r}{\partial l} - \frac{\partial f}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial k} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここに J は座標変換のヤコビアンであり、幾何学的には一つの格子要素の面積を表している。すなわち、

$$J = \frac{\partial r}{\partial k} \frac{\partial z}{\partial l} - \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial z}{\partial k} \dots\dots\dots (6)$$

したがつて(5)式を用いることにより任意の関数の r, z による微分を k, l による微分で表すことができる。

2.2 熱流束の計算

単位時間に単位面積を通して流れる熱の r および z 方向の成分をそれぞれ q_r および q_z とし、物体中の温度を θ 、熱伝導率を λ とすれば、(2)式は

$$\left. \begin{aligned} q_r &= -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} \\ q_z &= -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

となるから(5)式より

$$\left. \begin{aligned} q_r &= \frac{-\lambda}{J} \left(\frac{\partial \theta}{\partial k} \frac{\partial z}{\partial l} - \frac{\partial \theta}{\partial l} \frac{\partial z}{\partial k} \right) \\ q_z &= \frac{\lambda}{J} \left(\frac{\partial \theta}{\partial k} \frac{\partial r}{\partial l} - \frac{\partial \theta}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial k} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

となる。

いま(8)式で与えられる q_r および q_z は相隣接する格子要素の境界線上の値であるとみなし、また物体の温度は格子要素内で一定と考え、その温度を格子要素の重心における温度と考える。したがつて、格子要素の作り方は自由であるが、隣接する格子点の間隔は上式に含まれる $\partial \theta / \partial k$, $\partial \theta / \partial l$ が差分近似できる程度に設定すべきことは当然である。Fig. 1 に示す要素Aと要素Bとの境界線、すなわち線分2-5上での q_{r25} および q_{z25} を

求める。境界線上での温度変化はないので、

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial l}\right)_{25} = 0$$

が成立する。また

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial k}\right)_{25} = \frac{\theta_B - \theta_A}{(k+1) - k} = \theta_B - \theta_A$$

であるから、

$$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{25} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\Delta z_A}{l_4 - l_1} + \frac{\Delta z_B}{l_5 - l_2} \right\}$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial l}\right)_{25} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\Delta r_A}{l_4 - l_1} + \frac{\Delta r_B}{l_5 - l_2} \right\}$$

ここで、

$$\Delta z_A = \frac{(z_4 - z_1) + (z_5 - z_2)}{2}, \quad \Delta z_B = \frac{(z_5 - z_2) + (z_6 - z_3)}{2},$$

$$\Delta r_A = \frac{(r_4 - r_1) + (r_5 - r_2)}{2}, \quad \Delta r_B = \frac{(r_5 - r_2) + (r_6 - r_3)}{2},$$

$$l_4 - l_1 = l_5 - l_2 = 1$$

であるから、結局

$$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{25} = \frac{1}{4} \{ (z_4 - z_1) + 2(z_5 - z_2) + (z_6 - z_3) \}$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial l}\right)_{25} = \frac{1}{4} \{ (r_4 - r_1) + 2(r_5 - r_2) + (r_6 - r_3) \}$$

を得る。これらの関係を用いると、

$$\left. \begin{aligned} q_{r25} &= \frac{-\lambda_{25}}{J_{25}} \left(\frac{\partial \theta}{\partial k}\right)_{25} \left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{25} \\ &= \frac{-\lambda_{25}}{J_{25}} (\theta_B - \theta_A) \\ &\quad \times \left\{ \frac{(z_4 - z_1) + 2(z_5 - z_2) + (z_6 - z_3)}{4} \right\} \\ q_{z25} &= \frac{\lambda_{25}}{J_{25}} \left(\frac{\partial \theta}{\partial k}\right)_{25} \left(\frac{\partial r}{\partial l}\right)_{25} \\ &= \frac{\lambda_{25}}{J_{25}} (\theta_B - \theta_A) \\ &\quad \times \left\{ \frac{(r_4 - r_1) + 2(r_5 - r_2) + (r_6 - r_3)}{4} \right\} \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

が得られる。また、線分 4-5 上の q_{r45} および q_{z45} も全く同様の手続きによつて求まる。この場合は

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial k}\right)_{45} = 0$$

であることを考慮すればよい。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} q_{r45} &= \frac{\lambda_{45}}{J_{45}} (\theta_C - \theta_A) \\ &\quad \times \left\{ \frac{(z_2 - z_1) + 2(z_5 - z_4) + (z_8 - z_7)}{4} \right\} \\ q_{z45} &= \frac{-\lambda_{45}}{J_{45}} (\theta_C - \theta_A) \\ &\quad \times \left\{ \frac{(r_2 - r_1) + 2(r_5 - r_4) + (r_8 - r_7)}{4} \right\} \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

となる。ただし、 θ, r および z に付した符号または数字は、それぞれその符号の要素の温度またはその数字の格子点の座標を表す。また、微分項に付した 25 および 45 はそれぞれの線分上での値を表している。また λ_{25} および λ_{45} はそれぞれ要素 A と B, A と C の熱伝導率によつて定まるべき値で、本論文の計算例では、要素 A と B の平均温度における鋼板の熱伝導率および要素 A と C のそれを採用している。さらに、 J_{25} および J_{45} は次のように各要素の座標変換のヤコビアン の平均値である。

$$\left. \begin{aligned} J_{25} &= \frac{1}{2} (J_A + J_B) \\ J_{45} &= \frac{1}{2} (J_A + J_C) \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

ここで、 J_A, J_B および J_C はそれぞれの要素 A, B および C のヤコビアンであり、各要素の面積に等しい。この要素面積は簡単に求めることができる。たとえば、四辺形 1452 の要素面積 J_A は、三角形 451 と三角形 521 の面積和であるから、各点の座標を $(r_1, z_1), (r_4, z_4), (r_5, z_5)$ および (r_2, z_2) とするとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} J_A &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{vmatrix} r_4 - r_5 & z_4 - z_5 \\ r_1 - r_5 & z_1 - z_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r_1 - r_5 & z_1 - z_5 \\ r_2 - r_5 & z_2 - z_5 \end{vmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{ (r_4 - r_5)(z_1 - z_5) - (r_1 - r_5)(z_4 - z_5) \\ &\quad + (r_1 - r_5)(z_2 - z_5) - (r_2 - r_5)(z_1 - z_5) \} \dots (12) \end{aligned}$$

以上に述べた計算式は、熱媒体中における熱流束の計算式であるが、媒体表面でのそれは境界条件によつて決定される。ここでは、高温鋼板の水冷却解析に必要なものについて述べる。媒体表面の温度を θ_s とし、それに接する空気の温度を θ_a 、冷却水の温度を θ_w とすれば、空気のみが接している面ではその面に垂直に流れる単位時間当たり単位面積当たりの熱流束 q_n は次のようになる。

$$q_n = \alpha_a (\theta_s - \theta_a) \dots (13)$$

ただし α_a は自然対流による熱伝達率 α_{ac} とふく射による相当熱伝達率 α_{ar} の和、すなわち

$$\alpha_a = \alpha_{ac} + \alpha_{ar} \dots (14)$$

であり、 α_{ar} は次式で求められる。

$$\alpha_{ar} = 4.88 \cdot \varepsilon \cdot \left\{ \left(\frac{273 + \theta_s}{100} \right)^4 - \left(\frac{273 + \theta_a}{100} \right)^4 \right\} / (\theta_s - \theta_a) \dots (15)$$

ただし、 ε はふく射率である。

つぎに、冷却水が接している面においては

$$q_n = \alpha_w (\theta_s - \theta_a) \dots (16)$$

となる。ただし α_w は鋼板表面と冷却水の間熱伝達率

である。

2.3 温度の計算

物体の温度は各要素ごとに定義されるから、たとえば Fig. 1 における要素Aについて考えれば、境界線上（線分 1-2, 4-5, 2-5 および線分 1-4）の q_r および q_z が前節で述べた方法で求まるので、各境界面を通して流入する熱流束の収支を計算し要素Aの比重量 ρ_A と比熱 c_A の積で除することによって単位時間当たりの温度変化が計算される。ここでは、軸対称の熱伝導方程式を数値計算することが目的であるので、それを差分方程式に変換する。すなわち、この場合 (3) 式は、

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c} \left(\frac{\partial q_r}{\partial r} + \frac{q_r}{r} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \dots \dots \dots (17)$$

で与えられ、これを (5) 式を用いて要素Aに適用すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_A}{\partial t} = & -\frac{1}{\rho_A c_A} \left[\frac{1}{J_A} \left\{ (q_{r25} - q_{r14}) \left(\frac{z_5 - z_2 + z_4 - z_1}{2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - (q_{r45} - q_{r12}) \left(\frac{z_5 - z_4 + z_2 - z_1}{2} \right) \right\} \right. \\ & + \frac{q_{r45} + q_{r12} + q_{r25} + q_{r14}}{r_1 + r_2 + r_4 + r_5} \\ & \left. + \frac{-1}{J_A} \left\{ (q_{z25} - q_{z14}) \left(\frac{r_5 - r_2 + r_4 - r_1}{2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - (q_{z45} - q_{z12}) \left(\frac{r_5 - r_4 + r_2 - r_1}{2} \right) \right\} \right] \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

となる。

すなわち $\frac{\partial \theta_A}{\partial t}$ は単位時間当たりの要素Aの温度変化の割合を表している。したがって、この割合が一定に保たれているとみなされる程度に十分短い時間 Δt の経過後の要素Aの温度は次のように表される。

$$\theta_A^n = \theta_A^{n-1} + \left(\frac{\partial \theta_A}{\partial t} \right)^{n-1} \cdot \Delta t^{n-1/2} \dots \dots \dots (19)$$

ただし、右肩の添字 n および $n-1$ は n 回目および $(n-1)$ 回目の時間サイクルにおける値であることを示しており、 $n-1/2$ はその間の値であることを示している。すなわち (19) 式により解析モデル全体のそれぞれの要素についての n 回目の温度が求まることになる。したがって、初期条件として、最初の $n=0$ の場合に相当する温度分布が与えられれば (9) 式～ (19) 式を逐次繰り返し計算することにより、温度分布の推移が把握できることになる。

2.4 $\Delta t^{n-1/2}$ の決定法

前節で述べたように、 $(n-1)$ 回目の計算サイクルにおける温度分布から n 回目のそれを求めるためには、(19) 式の右辺に表れる $\Delta t^{n-1/2}$ の値を決定しなければならない。

この種の計算方法では、 $\Delta t^{n-1/2}$ の値が解の安定と精度に大きな影響を与える。よく知られているように Explicit 形差分法を用いて計算する場合には、温度伝ばん率 $a (= \lambda/\rho c)$ 、熱伝導率 λ 、 r 方向および z 方向の境界に対する熱伝達率 α_r および α_z とすると、分割時間 $\Delta t^{n-1/2}$ と格子間隔のそれぞれの方向の最小値 Δr 、 Δz の関係が、

$$\Delta t^{n-1/2} \leq \frac{1}{2a \left\{ \left(\frac{1}{\Delta r} \right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_r}{\lambda \Delta r} \right) + \left(\frac{\alpha_z}{\lambda \Delta z} \right) \right\}} \dots \dots \dots (20)$$

に保たれていると、安定した解が得られる。しかしながら、ここで問題としている 1000°C 近い高温材を急冷する場合、冷却開始直後の温度変化の急激な状態を精度よく詳細にシュミレートするためには (20) 式を満足する分割時間の数 10 分の 1 以下の値を $\Delta t^{n-1/2}$ に採用しなければならない。一方、時間の経過につれて温度変化が緩慢になると、 $\Delta t^{n-1/2}$ に (20) 式の右辺よりも大きな値を与えても十分な精度で安定した解が得られる。これは鋼材と水との温度差が小さくなって、(16) 式の q_n の値が (8) 式の q_r や q_z の値と同等のオーダーになり、熱伝達率が関係する (20) 式で表される表面の安定条件が緩和されるからと考える。したがって、このような場合は内部領域の安定条件、

$$\Delta t^{n-1/2} \leq \frac{1}{2a \left\{ \left(\frac{1}{\Delta r} \right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z} \right)^2 \right\}} \dots \dots \dots (21)$$

を満足する $\Delta t^{n-1/2}$ を用いても差し支えない。

したがって、冷却直後から長時間にわたって精度よく、しかも計算機使用時間を短縮するには、時々刻々と $\Delta t^{n-1/2}$ の値を変化させねばならない。その一つの方法として、各時刻の温度変化に応じた $\Delta t^{n-1/2}$ の値を決定する方法が考えられる。それは各時間サイクルにおいて、全要素のうち最大の温度変化率が現れる要素が一つ以上あるが、その要素の温度変化が一定温度 $\tilde{\theta}$ になるような $\tilde{\Delta t}^{n-1/2}$ を求め、この値から $\Delta t^{n-1/2}$ を決定する方法である。すなわち、各時間サイクルにおいて、計算の対象としている熱媒体のすべての分割要素での温度変化率 $\partial \theta / \partial t$ が (18) 式により求められているので、その最大値を求め、その値を $(\partial \theta / \partial t)_{\max}$ とすれば、

$$\tilde{\Delta t}^{n-1/2} = \tilde{\theta} \left/ \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_{\max} \right. \dots \dots \dots (22)$$

の関係が得られ、 $\tilde{\Delta t}^{n-1/2}$ が決まる。温度変化の急激な場合には、これを $\Delta t^{n-1/2}$ に採用するのであるが、以下に述べる理由により、実際には $\tilde{\Delta t}^{n-1/2}$ と (21) 式の右

辺の値とを比較し、小さい方の値を $\Delta t^{n-1/2}$ に採用しなければならぬ。その理由はある時刻における温度勾配により生ずる熱移動によつて、 $\Delta t^{n-1/2}$ 後に新しい温度勾配が得られるが、その新しい温度勾配が古いそれと勾配の方向が逆転しないように $\Delta t^{n-1/2}$ を選択する必要があるからである。したがつて、適切に選んだ $\tilde{\theta}$ に対し、(22)式で得られる $\tilde{\Delta t}^{n-1/2}$ を用いれば、温度勾配の大きい冷却初期には解の安定性が維持されるが、冷却後期では温度勾配が小さくなり、その勾配が逆転し、解の安定性が維持できなくなる場合がある。そのような逆転を生じさせないための安定条件が、とりもなおさず(21)式である。したがつて、 $\Delta t^{n-1/2}$ はこの条件を常に満足しなければならないので、上記の方法によつて、 $\Delta t^{n-1/2}$ を決定するのである。

なお、以上に述べた方法では、境界における熱伝達率が直接安定条件に関与しないように見られるが、熱伝達率がきわめて大きな値を持つ場合には、一般に温度変化が激しく、 $\tilde{\theta}$ を適切に選べば十分に安定した解が得られ、 $\tilde{\theta}$ の大きさの制限が熱伝達率にかかわる安定条件をも抱有していると考えられる。また、熱伝達率が比較的小さい場合には、(20)式の安定条件は(21)式により近似できるので問題はない。

また、時刻 t^n は次式で表される。

$$t^n = t^{n-1} + \Delta t^{n-1/2} = t^0 + \sum_{i=1}^n \Delta t^{i-1/2} \dots \dots \dots (23)$$

したがつて、 $t^0, t^1, t^2, \dots, t^n$ は時間的に等間隔でなく、一般に冷却問題では初期の間隔が小さく後期ほど長い。

なお、この計算方法は r-z 座標系から格子点座標系に座標変換されているので、複雑な境界をもつ熱媒体の温度推移をシュミレートする際にも有効と考えられるが、いま適当な具体例が見つからない。したがつて、著者らが行つているラミナフローによる高温鋼板の冷却実験の結果と上記計算法によつて得られた数値計算結果と対比することによつて応用例としたい。Fig. 2 はその際の計算手順を示すフローチャートである。

3. 本計算法の応用例

3.1 高温鋼板の冷却実験

ここでは、既述の計算方法の応用例として、ラミナフロー冷却による高温鋼板の温度推移をシュミレートする。したがつて、簡単な実験を行つたので、実験の概略を述べる。Fig. 3 はラミナフロー冷却による高温鋼板の測定装置の概略図である。

実験に使用した試料は一边 20 cm、厚さ 1 cm の正方形の 18-8 ステンレス鋼板で片側の面の中心点①と、その点から半径方向に 2 cm 間隔で②～⑤までの合計 5 点の測点に熱電対がとりつけられており、それぞれの温度変化が連続的に測定できるようになっている。実験手順

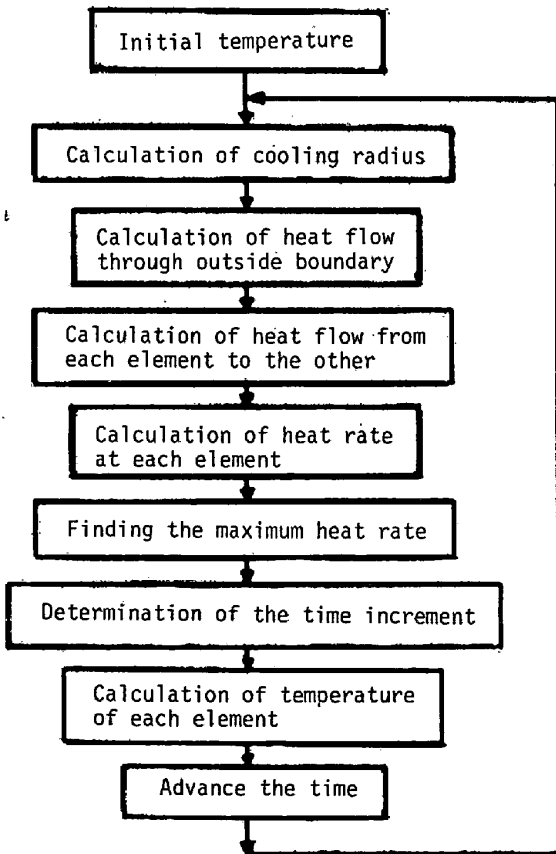


Fig. 2. Outline of the computational flow.

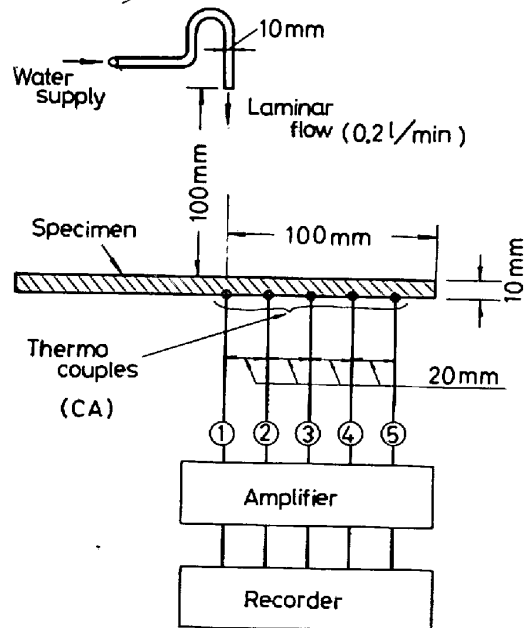


Fig. 3. Block diagram of the experimental apparatus for measuring the temperature changes during the laminar flow cooling of a hot steel plate.

は、まず熱電対をとりつけた鋼板をガス炉に入れガス炉内を 900°C に保つ。十分時間が経つてから鋼板をガス炉からとり出し、冷却台の上のせて Fig. 3 に示すような形状のノズルから冷却水を流し始める。鋼板をガス炉からとり出してから冷却水を流し始めるまで約 15 s かかり、この間、鋼板の全面は空冷状態にある。なお冷却水の流量は 0.2 l/min で、ノズル口径は 1 cm で、鋼板からの高さは 10 cm である。

Fig. 4 は測定結果を示したものである。横軸に冷却時間を取り、鋼板をガス炉からとり出した時刻を原点とついている。曲線の番号は Fig. 3 の熱電対の番号に対応しており、どの測点も最初の 15 s 間は空冷による温度降下の影響のみが現れている。その後、まず①の測点に水冷の影響が現れ、さらに②から⑤の測点にも順次その影響が現れている。すなわち、各測定点の水冷効果は図中の点線の印で示された時刻から現れ始めている。また、中心からはなれた位置の測点②～⑤では温度降下の傾向がよく似ており、しかも比較的急激に変化していることから、明らかに鋼板表面の冷却範囲が時間とともに拡がっていることがわかる。事実ラミナフローが鋼板に衝突した後の水の挙動を観察してみると、本実験例のように冷却水量がきわめて少ない場合には大部分の水は蒸発するが、残りの水は鋼板の表面に円形状の水膜を形成して、その水膜半径が徐々にほぼ等速に増加していくのがわかる。Fig. 4 の破線矢印の時間間隔 a, b, c がほぼ等しいということから、水膜半径 R_w は時間の一次関数であると考えられる。すなわち、測点間隔が 2 cm であることから

$$R_w = 2.0 \left(\frac{a+b+c}{3} \right) \times t_w + R_c$$

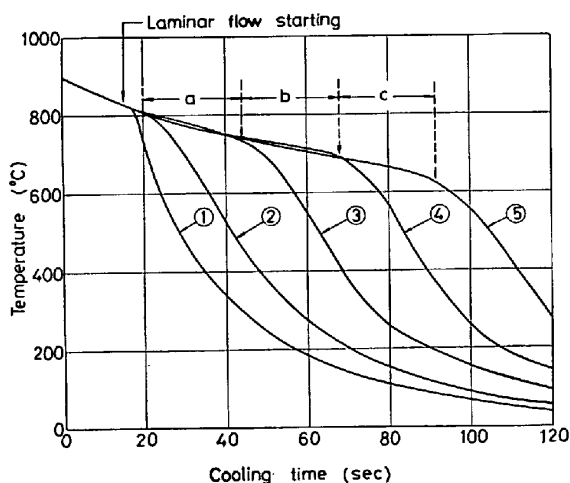


Fig. 4. Experimental results with a water flow rate of 0.2 l/min. Circled numbers marking curves are corresponded to those shown in Fig. 3 respectively.

$$= 0.08t_w + R_c \dots\dots\dots (24)$$

とした。ただし、 t_w は水冷開始後の時間であり、 R_c は定数である。

3.2 計算モデルと計算条件

実験に用いられた試料は厚さ 1 cm で一辺が 20 cm の正方形であるが、計算ではその正方形に内接する円筒形として取り扱い、その半断面を Fig. 5 に示されている格子要素に分割する。したがって、鋼板の周辺部分においては、計算値と実験値では若干の差異が生ずるものと思われるが、中央部の大部分についてはほとんどその影響を受けないものとする。Fig. 5 において鋼板の半断面 ABCD を k 方向に 5 mm 間隔に、l 方向には 1 mm 間隔の格子要素に分割し、k 軸と r 軸および l 軸と z 軸をそれぞれ平行に設定した。

鋼板の熱常数は Table 1 に示すとおりであり⁴⁾、比重 ρ は 7800 kgf/m³ とした。

初期温度は鋼板の全域で 900°C とし、その周囲の温度

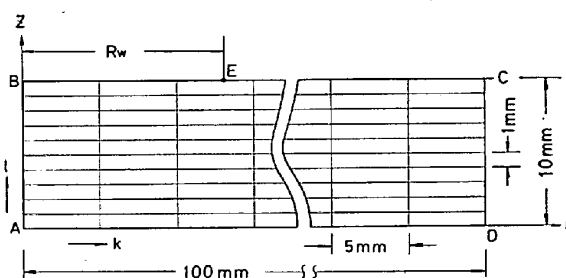


Fig. 5. Lattice model set up for the calculation of temperature.

Table 1. Thermal properties of the steel applied in the calculation.

Temperature (°C)	Specific heat (kcal/kg °C)	Thermal conductivity (kcal/m · h °C)
0-50	0.118	13.7
50-100	0.122	13.7
100-150	0.126	14.0
150-200	0.128	14.4
200-250	0.128	14.8
250-300	0.132	15.1
300-350	0.132	15.8
350-400	0.136	16.6
400-450	0.140	17.3
450-500	0.142	18.0
500-550	0.150	18.7
550-600	0.156	19.8
600-650	0.150	20.5
650-700	0.150	21.2
700-750	0.148	22.0
750-800	0.154	22.7
800-850	0.154	23.0
850-900	0.154	22.7

すなわち、冷却水および空気の温度はつねに 20°C とし不変であるとする。また Fig. 5 における E 点を水膜領域の外縁とすれば、 \overline{BE} は水冷状態にあるので (16) 式を用いて鋼板から外部へ流出する熱流束 q_n を計算する。同様に \overline{EC} , \overline{AD} および \overline{CD} は空冷状態にあるから (13) 式を用いる。なお \overline{AB} は中心軸であり、これを通過する熱流束はないので $q_n=0$ とおく。

境界条件に用いた係数は、まず空冷に関するものとして、自然対流による熱伝達率 $\alpha_{ac}=13.6 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$ 、ふく射率 $\epsilon=0.8$ を用いた。これらの値は、あらかじめ空冷のみによる高温鋼板の温度推移の計算値と実測値とがよく一致することが確かめられ、妥当な値であると思われる。つぎに水冷領域は (24) 式で示されている R_w を半径とする円形領域とする。したがって、水膜半径が水冷半径に相当するものと考え、水冷領域を決定する R_w は時間の関数であるので、各計算サイクルでその値を求めている。また、鋼板表面と冷却水との熱伝達率 α_w は $5000 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$ として計算している。

また、(22) 式によつて決まる分割時間 $\Delta t^{n-1/2}$ は $\bar{\theta}$ によつて左右されるが、ここでは $\bar{\theta}=1^\circ\text{C}$ とした。

3.3 計算結果

Fig. 6 は (24) 式に含まれている R_c を 1.0 cm として計算した結果と実測値を示したものである。実線は Fig. 4 に示した実測値であり、番号は Fig. 3 に示す熱電対の番号に対応する。また、各種の記号は計算値であり、図の上部に示すように中心軸に接する要素の温度 (X, Y, Z 印) と、冷却面と反対側の表面温度 (□, ○, △, +, ◇印) を表している。計算値と実験値は比較的よく合っている。しかし、ここでは著者らが提起している計算法の適用を問題にしているのであつて、計算値と実験値の一致に対する詳論は割愛させていただきたい。別な機会に述べる。

4. 本計算法に対する評価

前節で述べた応用例は 120 s の冷却過程を 1 回の計算サイクルによつて生ずる全要素の温度変化の上限値を $\bar{\theta}=1^\circ\text{C}$ としてシュミレートしたものである。Fig. 6 では計算結果を計算サイクル 100 回ごとに温度と時間の関係をプロットしたものであるから、約 6500 サイクルを要したことになる。Fig. 7 は計算に関する条件を全く同一にして、 $\bar{\theta}$ だけを 10°C に変えて行つた計算結果を示したものである。これは計算サイクル 20 回ごとにプロットしたものである。なぜなら、Fig. 6 におけるように、計算サイクル 100 回ごとに温度と時間の関係をプロットすると、 $\bar{\theta}$ が大きいために、プロットされた点と

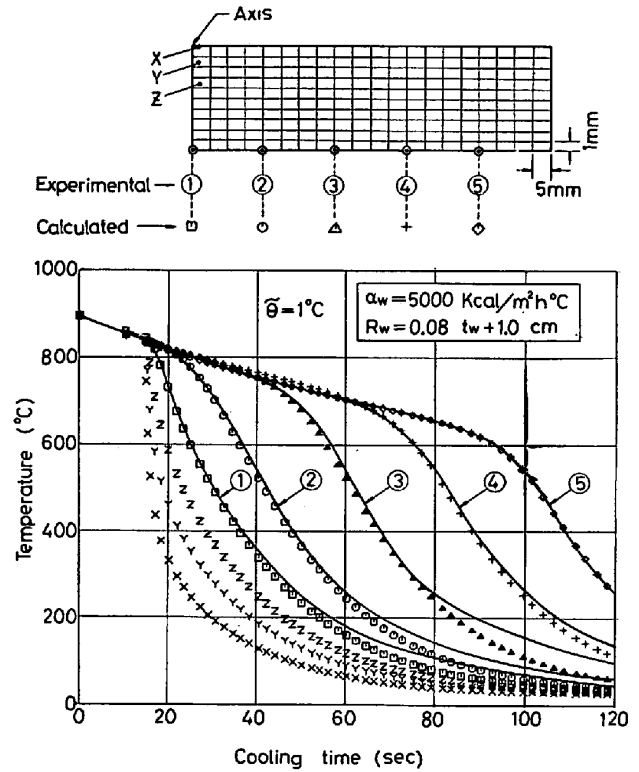


Fig. 6. Cooling curves calculated at several points illustrated on the top of this figure, with the transfer coefficient, $\alpha_w=5000 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$, the radius of 'Effective cooling area', $R_w=0.08 t_w+1.0$, and the maximum change of temperature every computing cycle, $\bar{\theta}=1^\circ\text{C}$ as well as the experimental results reproduced from Fig. 4.

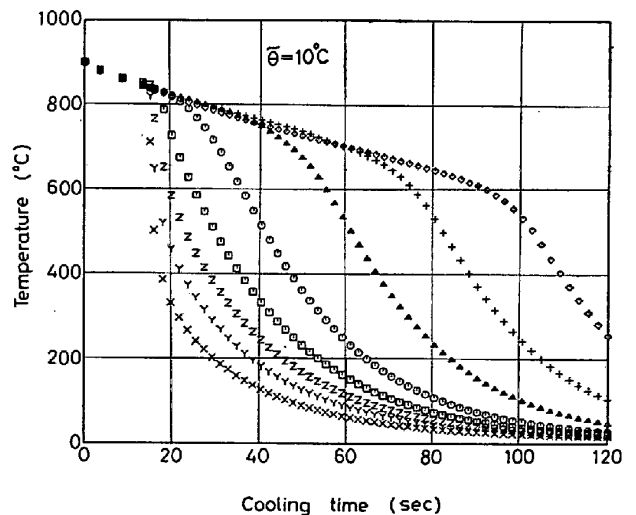


Fig. 7. The same as Fig. 6 excepting $\bar{\theta}=10^\circ\text{C}$.

点の間が広がつてわかりにくいためである。この場合の計算サイクルは約 1100 サイクルとなつており、したがつて、 $\bar{\theta}=1^\circ\text{C}$ の場合に比べて、 $\bar{\theta}=10^\circ\text{C}$ とすると計算機の使用時間は大体 6 分の 1 程度となり、しかも Fig. 6

Table 2. Calculated temperature, θ at each cooling time and number of computing cycles, N required to get it under various computational conditions.

Condition	Proposed method in this paper						Explicit type method					
	Case 1		Case 2		Case 3		Case 4		Case 5		Case 6	
	$\theta=10^{\circ}\text{C}$		$\theta=5^{\circ}\text{C}$		$\theta=1^{\circ}\text{C}$		$\Delta t=1.0\text{ s}$		$\Delta t=0.1\text{ s}$		$\Delta t=0.005\text{ s}$	
Cooling Time (s)	Temp.	Cycle	Temp.	Cycle	Temp.	Cycle	Temp.	Cycle	Temp.	Cycle	Temp.	Cycle
	$\theta (^{\circ}\text{C})$	N	$\theta (^{\circ}\text{C})$	N	$\theta (^{\circ}\text{C})$	N	$\theta (^{\circ}\text{C})$	N	$\theta (^{\circ}\text{C})$	N	$\theta (^{\circ}\text{C})$	N
0.0	900	0	900	0	900	0	900	0	900	0	900	0
0.1	880	2	880	4	880	20			879	1	880	20
0.2	861	3	861	7	861	39			859	2	861	40
0.3	842	5	842	11	843	57			841	3	843	60
0.5	808	9	809	18	809	91			807	5	809	100
1.0	736	16	736	32	737	164	695	1	734	10	737	200
2.0	631	27	632	53	633	267	588	2	630	20	633	400
3.0	565	34	567	66	568	332	533	3	565	30	568	600
5.0	490	42	491	82	492	408	472	5	490	50	492	1 000
10.0	411	50	412	99	413	490	408	10	412	100	413	2 000
20.0	341	59	342	118	343	584	340	20	343	200	343	4 000
30.0	302	65	303	130	304	645	302	30	304	300	304	6 000
60.0	241	77	242	152	243	755	242	60	243	600	243	12 000
120.0	188	92	187	175	187	872	187	120	187	1 200	187	24 000
300.0	128	142	133	223	131	1 040	130	300	131	3 000		
600.0	96	226	94	308	93	1 223	93	600	93	6 000		
1200.0	59	398	58	480	58	1 471	58	1 200	58	12 000		

と Fig. 7 を比較しても全く精度的に変動していない。また、 $\bar{\theta}=20^{\circ}\text{C}$ の場合についても同一の計算を試行してみたが、冷却曲線の形状に若干の不安定要素が混入し始め、同時に計算サイクル数はそれほど減少せず、約 1000 サイクル程度となつて、あまり効果がないことがわかつた。もつとも、この計算の応用例では試料の寸法も比較的小さいので、初期の熱媒体のもつ熱容量も小さく、冷却時間もさほど長くないので、この計算法によつて、温度推移のシュミレーションが十分な精度で行えることの実証にはなるが、計算時間の長短を論ずるにはあまり好例とはいえないと考える。

したがつて、温度 900°C に一様に加熱された厚さ 10 cm の無限鋼板の片面を全域にわたつて水冷する場合の一次元熱伝導問題の計算モデルについて考察してみたい。なお、計算モデルの格子間隔 Δz を 1.0 cm に設定した。熱媒体の熱常数は、先例と同様に、Table 1 に示す値を用い、その比重量 ρ は 7800 kgf/m^3 、水との熱伝達率を $10000\text{ kcal/m}^2\text{h}^{\circ}\text{C}$ としている。

Table 2 はこの計算モデルについて、冷却時間 20 min の温度推移をシュミレートした結果を示している。ここに示されている θ は水と接している分割要素の温度であり、 N は計算サイクル数を表している。本表において、Case 1 から Case 3 は本論文の計算法によるものであり、Case 4 から Case 6 は Explicit 形差分法によるものであり、 $\bar{\theta}$ および Δt の値はそれぞれ表に示すと

りである。なお、Case 1, 2, 3 については同表の左らんの時刻と一致する値が一般には得られないので、その時刻をはさむ 2 つの時刻での値から直線近似により求めたものである。

この計算モデルにおいては (20) 式で示される安定条件から、分割時間 Δt は 1.4 s 以下でなければならない。したがつて、Case 6 の場合はその値の 280 分の 1 の値を分割時間 Δt においていることになり、計算機による有限桁演算に起因する誤差がないものとすれば、一般に Δt は小さければ小さい程精度がよいと考えられるので、Case 6 の結果はかなり真値に近いものと考えても差し支えない。ただし、この場合の計算は、表からも明らかのように、計算サイクル数 N の増大が著しいため、シュミレーションタイムは 2.0 min で終わらせている。

このような理由から、Case 6 と比較しながら、それぞれのケースの精度および計算時間に対する検討を加えていきたい。

Case 1 と Case 2 では冷却初期での精度は Case 5 や Case 6 に匹敵しており、時間経過とともに若干精度が落ちるが、この計算例ではたかだかその誤差は 3°C 以下となつている。しかも計算サイクル数は他のケースに比べて非常に少ない。Case 3 は Case 6 の結果とこの表では完全に一致しており、十分な精度で計算できていることがわかる。しかも、シュミレーションタイムが 1.0 min 以上になると、Case 5 や Case 6 より計算サイ

クル数が一段と少なくなっている。また、(20)式の安定条件に近い Δt を用いて計算されている Case 4 においては、冷却後 2.0s 以内では約 10% 以上の誤差が生じている。しかし、時間が経つにつれて、Case 6 の値に近づいているが、冷却後 10 min から 20 min までに 600 回の計算サイクルを要しているのに比べ、Case 3 では 250 回程度におさまっている。この傾向は、冷却後の長い時間をシュミレートすればするほど顕著に表れてくるものと考えられる。

したがって、一般に Δt を一定に保つのは、計算機の使用に対して経済的ではなく、 Δt を変化させる方法が用いられる。その方法にはその問題に応じた種々の方法が考えられるが、本論文で述べている $\tilde{\theta}$ から誘導される Δt の決定法は計算精度がシュミレーションタイム全体についてほぼ同程度に保たれるという利点があり、急激な変化のある長時間のシュミレーションには非常に有効であると考えられる。

5. 結 言

本論文では急激な熱移動を伴う温度推移の現象を精度よくシュミレートできる数値解法について論じたもので

ある。すなわち、一回の計算サイクル後の熱媒体中に生ずる温度変化量の上限值 $\tilde{\theta}$ から分割時間を決めて計算を順次進める方法である。したがって、この方法によれば熱移動の急激な場合でも、温度推移の状態がきめ細かく捉えることができ、また、長時間の熱移動現象をシュミレートしたい場合でも温度変化の緩急に関係なく同等の精度で満足すべき解が得られる。本論文の後半では、非常に簡単な例ではあるが、Explicit 形差分法の数値結果と本方法のそれを比較検討し、計算時間の短縮化の問題と計算結果の精度に対して若干の評価を加え、本計算法の利点に触れた。

なお、本論文で述べた計算法では複雑な境界形状をもつ熱媒体のシュミレーションも比較的容易に取り扱える。これについての考察および具体例については機会を改めて述べる。

文 献

- 1) 大中逸雄：鉄と鋼，65 (1979) 12, p. 1737
- 2) 寺沢寛一：数学概論 (応用編)，(1976)，p. 327
[岩波書店]
- 3) 日下部俊，三原 豊：鉄と鋼，65 (1979) 9,
p. 1375
- 4) 日本鉄鋼協会編：特別報告書 No. 11, (昭 46 年)