



UDC 669.1.012-52:681.3

## プロセスシステム制御の最近の動向

古 田 勝 久\*

### Recent Approaches in Process Systems Control

Katsuhisa FURUTA

#### 1. はじめに

プロセス制御というと空気式あるいは電気式の PID (Proportional Integral Derivative) 調節計がすぐ連想される。プラント近くの計器室には調節計、記録計がパネルにつけられ、流量制御、温度制御、圧力制御等が行われている。これらは1つの変数を制御すべき制御量とし、この情報が目標値と比べられ差があれば1つの操作量を動かし、制御量を目標値と一致させるループフィードバック制御系である。これに対し、最近多くの変数を計測し制御する多変数制御が試みられ成果を上げ始めて来た<sup>1)2)</sup>。これまで多変数制御理論は

- ① 実績が少ない
- ② 多変数制御理論を実際に応用できる研究者が少なく、現場技術者も理論を理解している者が少なかった。
- ③ 設計に使用できる程精度の高いモデルが得られていない。
- ④ モデルが得られても設計、解析のアルゴリズムが複雑であり設計が容易でない。
- ⑤ 多変数制御理論に基づいて設計された制御系は PID のように構造が簡単でなく実現し難い。
- ⑥ これまでの Know-how が少ない。

等の理由から敬遠されて来た。しかし、最近高度な制御を要求するプラントプロセスが増加しこれまでの制御では満足できなくなってきた。更に半導体の発達により TSS (Time Shearing System) 端末ミニコンピュータを用いて電子計算機が容易に使えるようになり、それにつれて各種の CAD (Computer Aided Design) が開発され、モデリング、制御系設計、解析等の複雑な計算が容易に行えるようになって来た。また複雑な構造の調節計の実現もマイクロコンピュータの使用により問題がなくなってきた。このように多変数制御理論を実際に応用するためのソフトウェア・ハードウェアの両面における問題がなくなってきた。

多変数制御理論に基づいた制御系設計の手法としては

- 1) 周波数特性のような入出力特性に基づいた設計法
- 2) 状態空間に基づいた設計法

の2つに大別できる。前者は英国で ROSENBRACK<sup>3)</sup> らを中心に研究されて来た古典制御理論を多変数制御系へ拡張する方法であり、後者はいわゆる現代制御論と言われるものである<sup>4)</sup>。この状態方程式に基づいた制御系の設計法をこの解説で行うが、一般の場合について行うことはスペース的にもゆかないので1入力の場合についてのみ考えることにする。

#### 2. 制御系設計の目的と手順

制御する目的は

- 1) プラントの安定化、安定性の改善
  - 2) 外乱の影響の除去、制御量の目標値への追従 (出力制御)
  - 3) 多変数制御におけるある入力がある出力だけに影響を及ぼすような非干渉系を構成するシステム構造の変化
- 等である。通常 1), 2) が問題となるのでここも 1), 2) の場合を中心に考えることにする。

制御系設計の手順は通常

- 0) 制御系設計の目的とシナリオ作り
- 1) プラント解析とパラメータ同定
- 2) 状態表現への変換とモデルの評価
- 3) プラントの特性解析と制御系の仕様の決定
- 4) 制御系設計
- 5) 制御系の評価とプロセス解析
- 6) 制御系の試作と運転
- 7) オペレータへの教育

等により実用化されていくと考えられる。以上の手順はすべて制御系設計と結びついているが、ここでは 4) だけについて述べる。

状態方程式に基づいた制御系設計を行うためには、ま

昭和 56 年 4 月 8 日受付 (Received Apr. 8, 1981) (依頼解説)

\* 東京工業大学 (Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Ookayama Meguro-ku 152)

ずプラントが次のような状態方程式で記述されなければならない。

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu + Ed \dots\dots\dots(1a)$$

$$y = Cx \dots\dots\dots(1b)$$

$$y_m = C_m x$$

ここで入力  $u$  は  $m$  ベクトル, 状態  $x$  は  $n$  ベクトル, 出力  $y$  は制御量であり  $p$  ベクトル, 外乱  $d$  は  $r$  ベクトルであり,  $A, B, C, C_m, E$  は  $n \times n, n \times m, p \times n$  行列である.  $y_m$  は測定信号であり制御量以外の測れる信号をすべて含むものである. (1) のように表現されたプラントの入出力間の伝達関数は(1)の初期状態を零状態とすることにより

$$H(s) = ((sI - A)^{-1})B \dots\dots\dots(2)$$

$$= \frac{H_1 s^{n-1} + H_2 s^{n-2} + \dots + H_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \dots\dots\dots(2)'$$

で与えられる. ここで

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = \det(Is - A) \dots\dots\dots(3)$$

であり,  $\det(Is - A) = 0$  の根  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  は極と呼ばれ, すべての極の実部が負であると(漸近)安定である. (この解説では以後漸近安定を安定という.) 一方, プラントが伝達関数で与えられているとき, 状態方程式は一意に定まらない. そこで同じ伝達関数を与えるクラスの状態方程式で記述されたシステムのうちの最小次元のもの1つのシステムを最小実現といい, 最小実現の状態方程式を用いて制御系設計が行われる. 最小実現にはいろいろのアルゴリズムがこれまでに提案されているので参照されたい.

(1)で記述される状態  $x$  の時刻  $t$  の値  $x(t)$  は  $d=0$  のとき

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \dots\dots\dots(4)$$

で記述される. ただし  $e^{At}$  は  $A$  の遷移行列で

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2}t^2 + \dots$$

で定義される. 出力  $y(t)$  は(1), (3)から

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \dots\dots\dots(5)$$

で与えられる. プラントを(1)のように表現する場合の状態のとり方は定まったものではなく, 任意の正則な行列  $T$  によつて与えられる

$$x = T\bar{x}$$

の  $\bar{x}$  を状態とし, (1)のプラントを

$$\frac{d}{dt}\bar{x} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u + \bar{E}d \dots\dots\dots(6a)$$

$$y = \bar{C}\bar{x} \dots\dots\dots(6b)$$

と表現することもできる. このときはもちろん(1)と(4)とが同じ伝達関数をもつことは明らかである. (4)を(1)の等価なシステムという.

プラントの状態方程式が与えられるとき, 次いで問題となるのは, どのような目的を満たす制御系を作るかを考えることである. 制御系は前にも述べたように①安定化と②出力制御を目的として設計されるが, 安定化がいずれの場合も基本となる手法である. 安定化とは, すべての状態を初期状態とするとき, 時間の経過と共に零状態になることである. 安定化の手法としては

- 1) 極設定法
- 2) 最適制御

の2つが代表的なものである. 制御則としては, 通常

$$u = Fx \dots\dots\dots(7)$$

の型をしている状態の線形関数である状態フィードバックの形をしている. ここで状態  $x$  を直接測ることができないから, 測定できる入力  $u$  と測定信号  $y_m$  を入力とする観測器の出力を用いる. 外乱の存在の下で定常状態において制御量を目標値に一致させる出力制御の場合は, 外乱  $d$ , 目標値  $y_r$  がどのようなものであるか, そのモデルが作られなければならない. この解説では,  $d, y_r$  も定数ベクトル

$$\frac{d}{dt}d = 0 \dots\dots\dots(8a)$$

$$\frac{d}{dt}y_r = 0 \dots\dots\dots(8b)$$

の場合だけを考える. 目標値と制御量の偏差

$$e = y - y_r \dots\dots\dots(9)$$

を考える. (1)の両辺の微分と(9)の微分から

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \dot{u} \dots\dots\dots(10a)$$

$$e = [0 \quad I] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(10b)$$

を得る. この拡張システムを安定化できれば  $e \rightarrow 0$  となるから制御量が目標値に定常状態で一致する. このときの制御則はフィードバック制御

$$\dot{u} = [F_1, F_2] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(11)$$

である. このとき

$$u = F_1 x + F_2 \int_0^t e dt \dots\dots\dots(11)'$$

より図1の積分型の制御系が構成される<sup>5)</sup>. ここで状態は観測器で推定されている. 以上の手順で制御系が構成されるが, 具体的なアルゴリズムは以下例題を用いて考えよう.

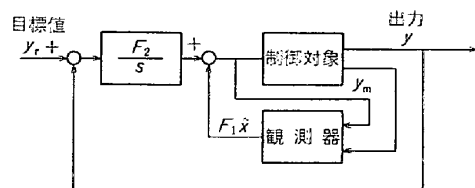


図1 積分型制御系の構造

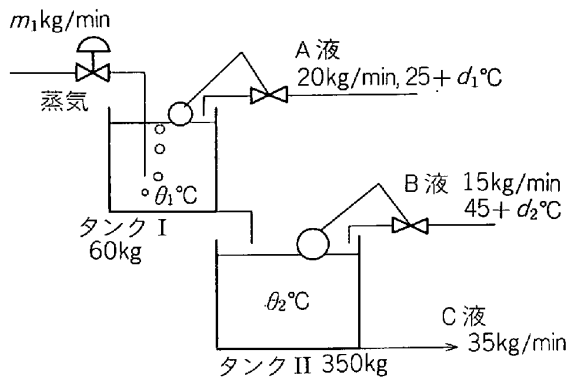


図 2 例題として取り扱うプラント

3. 制御系の構成例

3.1 モデリング

ここでは図 2 のプロセスにおいて温度制御系を状態空間に基づいて設計することを考えてみよう。このプロセスは

1) A液は一定の流量 20 kg/min でタンク 1 に供給されており、その温度は 25°C 前後である。B液はほとんど一定の流量 15 kg/min でタンク 2 に供給されており、その温度は 25°C 前後である。

2) タンク 1 の容量は 60 kg, タンク 2 の容量は 350 kg である。

3) 制御の目的は A 液の 25°C からのずれ  $d_1$ , B 液の 45°C からのずれ  $d_2$  の外乱が一定であるとき C 液の温度を 65°C にすることである。ただし蒸気の潜熱を 550 kcal/kg, すべての液の比熱を 1 kcal/kg とする。

タンク 1 の温度を  $\theta_1$ °C, 蒸気量を  $m_1$ kg, A 液の温度を  $(25+d_1)$ °C とすると

$$60 \frac{d}{dt} \theta_1 = 550m_1 + 20 \times (25+d_1) - 20 \times \theta_1 \dots (12)$$

同様にしてタンク 2 の温度を  $\theta_2$ °C, B 液の温度を  $(45+d_2)$ °C とすると

$$350 \frac{d}{dt} \theta_2 = 20 \times \theta_1 + 15 \times (45+d_2) - 35 \times \theta_2 \dots (13)$$

を得る。すなわち  $d_1=d_2=0$  のとき  $\theta_2=65$ °C のとき (13) より

$$\theta_1 = (35 \times 65 - 15 \times 45) / 20 = 80 (\text{°C})$$

(12) より  $m_1 = (20 \times 80 - 20 \times 25) / 550 = 2 (\text{kg/min})$  となる。(12), (13) について

$$\begin{cases} \theta_1 = 80 + x_1, & \theta_2 = 65 + x_2 \\ m_1 = 2 + u_1 \end{cases}$$

と定常値からのずれを  $x_1, x_2, u_1$  とすると

$$\begin{cases} 60 \frac{d}{dt} x_1 = 550u_1 + 20d_1 - 20x_1 \\ 350 \frac{d}{dt} x_2 = 20x_1 + 15d_2 - 35x_2 \end{cases}$$

となる。すなわちプラントの状態方程式モデル

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{35} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{55}{6} \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{70} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \dots (14a)$$

$$y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \dots (14b)$$

を得る。ここで  $y$  は制御量であり  $m=1$  である (1) の形

$$\frac{d}{dt} x = Ax + Bu + Ed$$

$$y = Cx$$

で与えられる。外乱  $d$  が定数値であり目標値  $y_r$  も定数であるから

$$e = y - y_r$$

に対し両辺の微分をとると  $E\dot{d}=0, \dot{y}_r=0$  のため

$$\frac{d}{dt} \dot{x} = A\dot{x} + B\dot{u}$$

$$\dot{e} = C\dot{x}$$

より (10) の形を得る。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \dot{u} \dots (15)$$

$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} \rightarrow 0$  にする制御則  $\dot{u}$  を決めることにより外乱の影響が現れない制御系が構成できる。ここでは、この種の構成法を示すことにする。

3.2 極設定による安定化

ここで考える例題では 1 入力系

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \dots (16)$$

において  $u \in R$  すなわち入力が 1 個の場合に限つてまず議論をしよう。このとき入出力関係を与える伝達関数は  $d=0$  のとき

$$\begin{cases} sx(s) = Ax(s) + Bu(s) \\ y(s) = Cx(s) \end{cases}$$

より

$$y(s) = C(sI - A)^{-1}Bu(s)$$

で与えられる。すなわち伝達関数は次のように与えられる。

$$H(s) = C(Is - A)^{-1}B$$

そしてこのシステムの極とは

$$\det(sI - A) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

の根、すなわち  $A$  の固有値である。ここで  $(sI - A)^{-1}$  の計算法として FADDEEV のそれが有名である。

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\Gamma_1 s^{n-1} + \Gamma_2 s^{n-2} + \dots + \Gamma_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

とするとき  $\{T_i, a_i\}$  は次のように計算される。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 &= I, & a_1 &= -trA \\ \Gamma_2 &= A\Gamma_1 + a_1 I, & a_2 &= -\frac{1}{2}tr\Gamma_2 \\ \vdots & & \vdots & \\ \Gamma_n &= A\Gamma_{n-1} + a_{n-1} I, & a_n &= -\frac{1}{n}tr\Gamma A_n \end{aligned} \right\}$$

$$0 = AT_n + a_n I = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_n I$$

(Cayley-Hamilton の定理)

(16) のシステムに対し制御則  $u$  として

$$u = Fx$$

なるフィードバック  $Fx$  を加えると次のようなシステムとなる。

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BF)x \\ y = Cx \end{cases} \dots\dots\dots (17)$$

このシステムの特性方程式を

$$\det(sI - A - BF) \triangleq s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + a_n \dots\dots (18)$$

と定義する。しかるに

$$\begin{aligned} \det(sI - A - BF) &= \det \begin{bmatrix} sI - A & B \\ F & I \end{bmatrix} \\ &= \det(sI - A) (1 - F(sI - A)^{-1}B) \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

より、特性方程式の係数と  $F$  の関係は

$$s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n = (s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) - F(\Gamma_1 s^{n-1} + \dots + \Gamma_n)B$$

すなわち

$$FV = [a_1 - \alpha_1, \dots, a_n - \alpha_n] \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_1 \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}^{-1} \dots\dots\dots (20)$$

ただし  $V$  は

$$V = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$$

で定義され可制御行列と呼ばれる。このことからわかるとおり、 $\{\alpha_i\}$  を任意に与える  $F$  が存在するためには、 $V$  が正則すなわち  $\text{rank} V = n$  が満足されていなければならない。この条件を満たすとき可制御といい、入力の数が増えても同じである。例えば(14)を(15)のように表現し、 $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix}$  を  $x, \dot{u}$  を  $u$  と表すと

$$\frac{d}{dt} x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{25} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{55}{6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \dots\dots\dots (21)$$

となる。このシステムにおいて

$$V = \begin{bmatrix} 9.17, & -3.0553, & 1.0185 \\ 0, & 0.5238, & -0.2270 \\ 0, & 0, & 0.5238 \end{bmatrix}$$

より、与えられたシステムは可制御である。一般に(15)の形の拡張システムが可制御であるためには

- ①  $(A, B)$  が可制御

$$\textcircled{2} \text{ rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p \leq n + m$$

の条件が満たされていなければならない。(21)の特性方程式は

$$s^3 + \frac{13}{30}s^2 + \frac{1}{30}s = 0$$

であるから、これを

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

にする  $u$  を求めてみる。(20)より Gopinath は

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} \frac{13}{30} - 3, & \frac{1}{30} - 3, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{13}{30} & \frac{1}{30} \\ 0 & 1 & \frac{13}{30} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} V^{-1} \\ &= [-2.5666, -2.9666, -1] \begin{bmatrix} 0.1091 & -0.191 & 0 \\ 0 & 1.909 & 0 \\ 0 & 0 & 1.909 \end{bmatrix} \\ &= [-0.28, -5.17, -1.909] \end{aligned}$$

で与えた。事実  $u = Fx$  を(21)に代入すると

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2.9 & -47.4245 & -17.502 \\ 0.057 & -0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

であり、この特性方程式は Faddeev のアルゴリズムより

$$\begin{aligned} a_1 &= 3, \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0.10 & -47.4245 & -17.502 \\ 0.057 & 2.9 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ a_2 &= 3, \Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -17.5024 & -1.7512 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0.0571428 & 2.9 & 3 \end{bmatrix} \\ a_3 &= 1 \end{aligned}$$

より望ましい特性根を持つていることがわかる。この制御系の構成をもう少し詳しく見ると、(21)式は

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}, & 0, & 0 \\ \frac{2}{35}, & -\frac{1}{10}, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{55}{6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{u}$$

に対し

$$\dot{u} = [-0.28, -5.17, -1.909] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix}$$

すなわち

$$u = [-0.28, -5.17]x - 1.909 \int^t e(\tau) d\tau \dots\dots (22)$$

で与えるため  $C_m = I$  すなわちすべての状態が測れるとき図3のような制御系の構成になっている。これからもわかるとおり、制御する入力と測定信号は一致する必要がなく、測定信号が多ければ多い程よいことがわかる。フィードバックをかけないときの  $d_1 = 3, d_2 = 5$  に対する出力の応答と図3の制御系の応答を図4に示す。

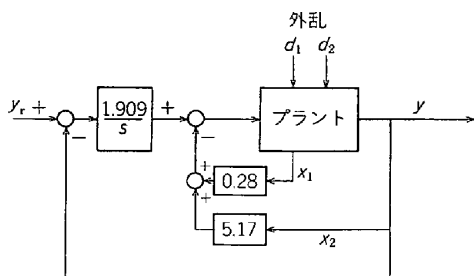


図3 設計された積分型制御系

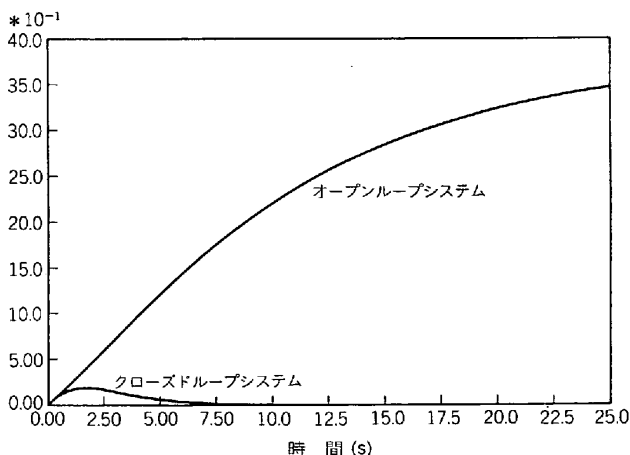


図4 外乱  $d_1=3, d_2=5$  に対するオープンループとクローズドループシステムの応答

3.3 最適制御による安定化

$\dot{x}=Ax+Bu$  で与えられるプラントが1入力の場合に次の2次形式の評価関数を最小にする最適制御を求める方法をこの節で示す。

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + r u^2) dt \quad (r \text{ は正定, } Q \text{ は半正定}) \quad (23)$$

この評価関数を最小にする制御則は入力のエネルギーを使うことなく、できるだけ状態を小さくするもので次の状態フィードバックで与えられる。

$$u = Fx$$

ただし

$$F = -r^{-1} B^T P \quad (24)$$

で与えられることが知られている。Pは次のRiccati方程式の正定対称な行列である。

$$A^T P + P A + Q - P B r^{-1} B^T P = 0 \quad (25)$$

この制御則をプラントに用いるとき安定、すなわち

$$\det(sI - A - BF) = 0$$

のすべての根の実部は負になっている。

上の(24)、(25)より次のKalman方程式がFとQ、rの関係で与えられる。

$$(1 - B^T (-Is - A^T)^{-1} F T) (1 - F(Is - A)^{-1} B) = 1 + \frac{1}{r} B^T (-Is - A^T)^{-1} Q (Is - A)^{-1} B \quad (26)$$

このKalman方程式を用いて最適制御を求めるアルゴリズムを簡単な例について示し、次いで始めの例題につ

いて考えたい。

[例1]

$$\frac{d}{dt} x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

に対し

$$J = \int_0^{\infty} (\|x\|^2 + \|u\|^2) dt$$

を最小にするuを求めよ。

この問題のKalman方程式に対する右辺を考えると

$$1 + \frac{[1, -s] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}}{(s^2 - 2s + 1)(s^2 + 2s + 1)} = \frac{s^4 - 3s^2 + 2}{(s^2 + 2s + 1)(s^2 + 2s + 1)}$$

$$\therefore s^2 = 2 \text{ or } 1 \quad \therefore s = \pm\sqrt{2}, \pm 1$$

しかるに制御則を  $u = Fx$  とするとき

$$\det(Is - A - BF) = \det(Is - A) (1 - F(Is - A)^{-1} B)$$

でありこの根実部は負であるから

$$(s^2 + 2s + 1) (1 - F(Is - A)^{-1} B) = (s + \sqrt{2})(s + 1)$$

である。F = [f1, f2] とすると

$$s^2 + (2 - f_2)s + 1 - f_1 = s^2 + (1 + \sqrt{2})s + \sqrt{2}$$

$$F = [1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}]$$

で最適制御が与えられる。

前の例題(14)に対し

$$J = \int_0^{\infty} (x^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{bmatrix} x + \|u\|^2) dt$$

を最小にする入力を求めると  $q_3 = 1$  のとき

$$u = [-0.134, -2.22, -1]x$$

で与えられる。この場合の閉ループ系の極は (-0.832, -0.4148 ± j0.6764) である。一般に  $d_1 = d_2 = 0$  の場合、 $q_3 = 1, 10, 100$  の場合の目標値変化に対する応答を図5に示す。

$$|1 - F(j\omega - A)^{-1} B|^2 \geq 1 \quad (26)'$$

より一巡伝達特性  $-F(j\omega - A)^{-1} B$  が  $-1 + j0$  を中心として半径1の円の中に入らないことから位相余裕は60°以上であり、ゲイン余裕は無限大となつている。 $q_3 = 1,$

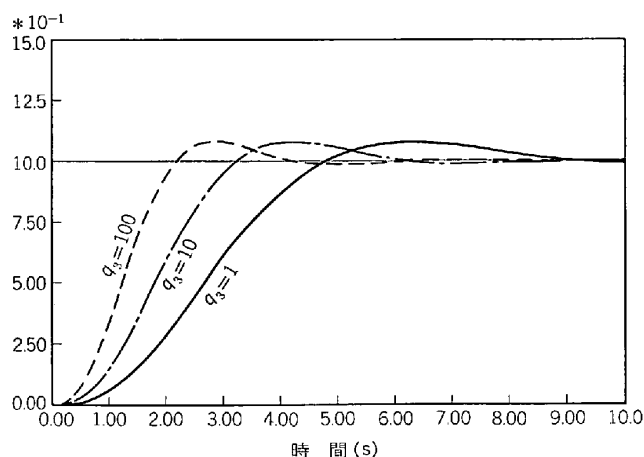


図5 ステップ目標値への応答 ( $q_3=1, 10, 100$ )

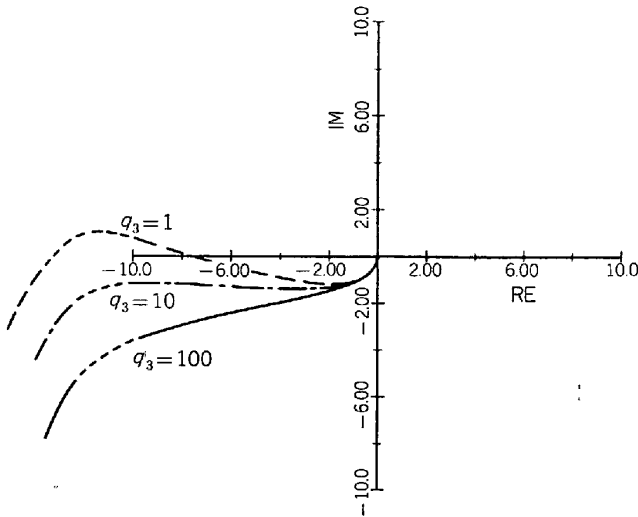


図 6 Nyquist 線図 ( $q_3=1, 10, 100$ )

10, 100 の場合のこの様子を図 6 に示す。

3.4 汎関数観測器

以上、制御則が

$$u = Fx$$

のようにすべての状態に直接使用できるとの前提で設計が行われたが、一般にすべての状態を直接測定することはできない。ここでは観測可能の入出力データから状態を推定する観測器について述べる。

観測器は LUENBERGER によつて提案されたものである。これは

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

なるプラントに対し、このプラントの測定できる入力  $u$  と出力  $y$  を入力とするシステムを考える。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}z = \hat{A}z + \hat{B}y + \hat{J}u \\ w = \hat{C}z + \hat{D}y \quad z \in R^q, w \in R \end{cases} \dots\dots (27)$$

このシステムの状態  $z$  が  $Ux$  に  $t \rightarrow \infty$  のとき近づくとき、 $F$  のシステムを上システムの観測器といい、次の条件をみだす。

- ①  $UA - \hat{A}U = \hat{B}C$  ..... (28 a)
- ②  $\hat{J} = UB$  ..... (28 b)
- ③ すべての  $\hat{A}$  の固有値は負の実部をもつ... (28 c)

このとき  $z \rightarrow Ux, t \rightarrow \infty$  である。更に

$$w \rightarrow Fx$$

なるためには

$$\textcircled{4} \hat{C}U + \hat{D}C = F \dots\dots (28 d)$$

の条件が満たされていなければならない。なぜなら

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(z - Ux) &= \hat{A}z + (\hat{B}C - UA)x + (\hat{J} - UB)u \\ &= \hat{A}(z - Ux) + (\hat{B}C - UA + \hat{A}U)x \\ &\quad + (\hat{J} - UB)u \end{aligned}$$

より①, ②, ③が求められ

$$\hat{C}z + \hat{D}y \rightarrow [\hat{C}U, \hat{D}C]x$$

であることから④の条件が与えられる。

一般に観測器の設計においては、 $F$  が与えられるときこれを実現する  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{J})$  を次数を含め決めることが問題である。この観測器の設計には  $(C, A)$  の可観測性が問題となる。

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{v-1} \end{bmatrix} = n \quad A \in R^{n \times m}, C \in R^{p \times n}$$

なるとき  $(C, A)$  は可観測と言われ上の式を満たす。最小の整数  $v$  を可観測指数と呼ぶ。 $Fx$  がスカラーのとき観測器は一般に汎関数観測器と呼ばれ、この設計法の 1 つが井上によつて示されているのでこれを紹介する<sup>6)</sup>。

[定理]  $\hat{A}$  の特性方程式が

$$\hat{\phi}(s) = s^q + \beta_{q-1}s^{q-1} + \dots + \beta_0$$

与えられるとき、 $Fx$  の汎関数観測器として  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{J})$  が存在するための必要十分条件は

$$F\hat{\phi}(A) \in \text{row span} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^q \end{bmatrix}$$

である。

この定理より  $(C, A)$  が可観測で  $q = v - 1$  なら必ず  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{J})$  が汎関数観測器になつていことがわかる。

[設計法] この場合の設計法を次に与える。

[STEP 1]

$$[v_0^T, v_1^T, \dots, v_q^T] \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^q \end{bmatrix} = F\hat{\phi}(A)$$

を満たす  $\{v_i\}_{i=1}^q$  を求める。

[STEP II]

$$\begin{aligned} \hat{b}_1^T &= v_0^T - \beta_0 v_q^T \\ \hat{b}_2^T &= v_1^T - \beta_1 v_q^T \\ &\vdots \\ \hat{b}_q^T &= v_{q-1}^T - \beta_{q-1} v_q^T \end{aligned}$$

を満たす  $\{\hat{b}_i^T\}$  を計算する。

[STEP III]

$$\begin{aligned} u_q^T &= F - v_q^T C \\ u_q^T &= u_q^T A + \beta_{q-1} u_q^T - \hat{b}_q^T C \\ u_{q-2}^T &= u_{q-1}^T A + \beta_{q-2} u_q^T - \hat{b}_{q-1}^T C \\ &\vdots \\ u_1^T &= u_2^T A + \beta_1 u_q^T - \hat{b}_2^T C \end{aligned}$$

を満たす  $\{u_i\}$  を計算する。  
すると

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -\beta_0 \\ 1 & & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ & & 0 & \vdots \\ & & & 1 & -\beta_{q-1} \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1^T \\ \vdots \\ \hat{b}_q^T \end{bmatrix}$$

$$\hat{J} = UB \quad U = \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_q^T \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = [0, \dots, 0, 1] \quad \hat{D} = v_q^T$$

で汎関数観測器が計算される。

[例 2]

$$\frac{d}{dt}x = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = [3 \ 1]x$$

なるシステムにおいて閉ループ系の poles を  $(-2, -2)$  にする状態フィードバック則を求め、これを汎関数観測器を用いて実現する問題を考える。

Gopinath のアルゴリズムを用いてフィードバック則を求めてみる。A の特性方程式

$$\det(Is - A) = s^2 + 2s + 1$$

$$\det(Is - A - BF) = s^2 + 4s + 4$$

より

$$F = [-2, -3] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = [-3, -2]$$

のフィードバック則で与えられる制御則は、極を  $(-2, -2)$  にする。

このシステムの  $(C, A)$  の可観測指数は 2 であるから 1 次の汎関数観測器で実現される。ここで

$$\hat{\phi}(s) = s + \beta_0 = s + 2$$

$$F\hat{\phi}(A) = [-3, -2] \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= [-4, -3]$$

$$[-4, -3] \in \text{row span} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \text{row span} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

より

$$[v_0, v_1] \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [-4, -3]$$

$$\therefore [v_0, v_1] = \left[ -\frac{7}{4}, -\frac{5}{4} \right]$$

$$\hat{b}_1 = v_0 - \beta_0 v_q = -\frac{7}{4} + 2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$u_1 = F - v_q C = [-3, -2] - \left( -\frac{5}{4} \right) [3, 1]$$

$$= [-3, -2] + \left[ \frac{15}{4}, \frac{5}{4} \right] = \left[ \frac{3}{4}, -\frac{3}{4} \right]$$

$$\therefore \hat{A} = -2, \hat{B} = \frac{3}{4}, \hat{J} = -\frac{3}{4}, \hat{C} = 1,$$

$$\hat{D} = -\frac{5}{4}$$

で与えられる。

始めの例題について汎関数観測器を  $-2$  を極としてもち、(22) で制御則が与えられる場合の汎関数観測器すなわち

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{35} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 55 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \ 1]x \end{cases}$$

なるとき

$$w = [-0.28, -5.17]x$$

の推定値を出力として与える汎関数観測器は

$$\hat{A} = -2 \quad \hat{B} = 15.5167 \quad \hat{J} = -2.567$$

$$\hat{C} = 1 \quad \hat{D} = -1.334$$

で与えられる。

$$w = [-0.134, -2.22]x$$

で与えられる場合の汎関数観測器は

$$\hat{A} = -2 \quad \hat{B} = 7.425 \quad \hat{J} = -1.228$$

$$\hat{C} = 1 \quad \hat{D} = -6.129$$

で与えられる。

#### 4. 結 論

ここでは 1 入力系の場合について制御系の設計法を解説した。多入力系になった場合は 1 つずつの入力について 1 入力系として制御系を設計してもよいが、もつと一般的な取り扱いをしたいときは更に進んだ解説書を参照されたい<sup>7)</sup>。モデリングにおいては容易に作られるものを考えたが、実際には入出力データから同定が行われなければならない場合が多い。この同定アルゴリズムも複雑であるが、「はじめに」でも述べたようにプラントの同定から制御系設計まで使用できる計算機のプログラム等も数多く開発されてき、設計される制御系も容易にマイコン等で実現できる世の中となつて来ている。そして今年各社で多変数制御が実施される予定のようであり、多変数制御理論の実用化元年とも言える状況になつている。

これまでも多変数制御理論を用いて設計された制御系の例は多いが、残念ながら多くの場合多変数制御理論に基づいて設計された制御系において調整すべきパラメータの数が多いため、いつたん調整を必要とするような状態になるとまた始めから設計をし直さなければならないことである。この欠点を直すチューニングコントローラの研究も進められている<sup>8)</sup>。

多変数制御を用いることによりこれまで遊んでいる多くの操作変数や測定信号が使われ、より高精度の制御が行われ省エネルギー等に貢献することを祈っている。

#### 文 献

- 1) 中川東一郎: 計測と制御, 16 (1978), p. 241

- 
- 2) 中村秀雄, 内田主幹, 北見恒雄, 近藤芳行: 計測と制御, 18 (1979), p. 355
  - 3) *H. H. ROSENBROCK*: *Computer Aided Design*, (1974), [Academic Press]
  - 4) 例えば古田勝久, 佐野 昭: 基礎システム理論 (1978), [コロナ社]
  - 5) *E. J. Davison* and *H. W. Smith*: *Automatica*, 7 (1971), p. 489
  - 6) 井上 昭: 計測自動制御学会論文集, 10 (1974), p. 487
  - 7) 伊藤正美, 木村英紀, 細江繁幸: 線形制御系設計論 (1979) [計測自動制御学会]
  - 8) *E. J. DAVISON*, *P. TAYLOR*, and *J. WRIGHT*: *IEEE ICCS Symp.* (1978), p. 1091
-