

論文

UDC 536.01 : 669.1

非定常熱移動問題に対する数値計算法の分類と改良内節点法*

大 中 逸 雄**

Classification of Numerical Methods for Transient Heat Transfer Problem and Improved Inner Nodal Point Method

Itsuo OHNAKA

Synopsis:

A proposal has been made for the classification of numerical methods to two groups; one is based on a differential equation and the other is not. The latter "Direct Method", which means that a finite-difference equation is derived directly from the phenomenon, may be divided into Outer and Inner Nodal Point Methods (ONP Method and INP Method). The typical ONP Method is the matrix method developed by the authors, where the nodal point is designated on the element boundary. In the INP Method the nodal point is designated within the element and the nodal domain is the element itself. On the basis of this classification and some discussion on the conventional methods, an improved INP Method has been developed and the outline with finite-difference equations for energy balance, mass balance and momentum equations for potential flow is presented. In addition, numerical examples for solidification problems are demonstrated and discussed. Although the combination of right triangle elements forming a rectangle can not be used in the proposed method, it has the same advantage as the ONP Method over the conventional finite element method and is superior to the ONP Method in simplicity and computing time.

1. 緒 言

製鉄, 製鋼, 造塊, 圧延, 熱処理など種々の工程で非定常熱移動問題を解くことは重要なことである。

この種の問題を解析的に解くことはごく限られた境界条件, 形状の場合にしか可能でないため従来差分法による数値計算法が多用されている。しかしながら, テーパやアールがある場合や複雑な境界形状の問題に対しては従来の差分法では不便であるため, 最近では有限要素法^{39)~49)}, 重みつき残差法^{56)~58)}, 変数変換法^{25)~26)}, マトリックス法^{8)~11)}などが提案されている。しかし, これらの種々の方法の内, いずれの方法がより便利であるかは明らかにされていない。

また, 従来の数値計算法のほとんどは微分方程式を直接の出発点とした解析法である。微分方程式は連続体モデルといえる。しかし普通の計算機は離散的な値しか取扱えないため連続体モデルによる微分方程式からいかに離散的な式(通常差分式)を得るかに苦心する訳である。とすれば, 微分方程式を経由せず, 現象から直接計算機に都合のよい離散化された数式を導くほうがよいの

ではないか。また我々が現象を観察して得る情報は決して連続的なものではなく離散的なものである。このような考えに基づき, D. GREENSPAN¹⁾ は系を微粒子の集合とみなし, 微粒子の運動を考えることによりバネの振動, 衝突, 衝撃波, 混合問題などに対して離散モデルを展開した。しかしこのような微粒子によるモデル化は熱などの移動現象に対してはあまり便利とは思われない。

一方熱伝導問題に対しては微分方程式を経由しない離散モデルという思想を明確にはしていないが, MAGNÉAL²⁾, DUSINBERRE³⁾, 岩城⁴⁾, HODGKINS ら⁵⁾, CAMPBELL ら⁶⁾, 片山⁷⁾がテイラー展開を使用せず分割要素に対する熱収支の式から直接差分式を導く方法について述べている。筆者ら^{8)~11)}もより一般的で実用的なマトリックス法を開発した。さらに最近金山¹²⁾は定常拡散問題に対し微分方程式を経由しない離散モデルを提案している。

筆者はこのような微分方程式を経由しない離散モデルの発展に期待しているものの一人である。本論文ではまず代表的な各種実用的数値計算法を分類, 比較し問題点, 特徴を明らかにする。そして離散モデルあるいは微分方程式を経由せぬ直接法の一つとして, より一般化さ

* 昭和 53 年 12 月 11 日受付 (Received Dec. 11, 1978)

** 大阪大学工学部 工博 (Faculty of Engineering, Osaka University, Yamadakami Suita 565)

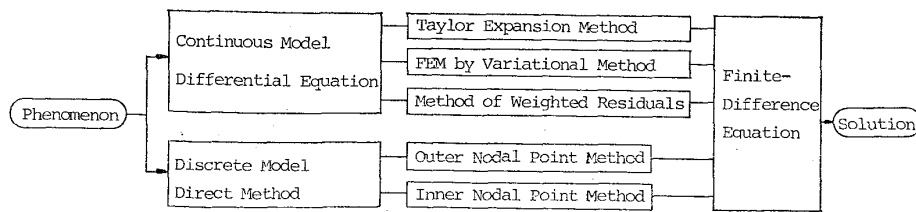


Fig. 1. Classification of numerical methods.

れた改良内節点法を提案し、凝固問題への適用例、他の方法との比較検討結果について述べる。なおこの内節点法はより一般的熱および物質移動現象にも拡張し適用することが可能である。

2. 各種実用的数値計算法の分類と問題点

従来よく使用されている、あるいは実用的と考えられる数値計算法を Fig. 1 のように分類することを提案したい。

緒言で述べたようにこれらの方法は微分方程式を経由する方法と経由しない直接法に大別される。前者の方法としてはテイラー展開を利用した差分法、変分法を利用した有限要素法、重みつき残差法その他の方法¹³⁾¹⁴⁾などがある。後者の直接法を外節点法と内節点法に分類する。外節点法とはマトリックス法^{9)~11)}などのことで、分割要素の境界上に節点を定義し、その周囲に節点領域を考える方法である。内節点法とは節点（ある領域を代表する点）を分割要素内に定義し、要素自体を節点領域とする方法である。

従来、いわゆる差分法（あるいは有限差分法、階差法）と呼ばれている方法は本来テイラー展開を利用した差分法であると思われるが^{15)~21)}、最近では上述の直接法も単に差分法（あるいは階差法）と呼ばれている⁷⁾²²⁾²³⁾。また内部領域に対してはテイラー展開による差分法を、境界領域に対しては直接法を適用することも多い。あるいはこのような差分法を単に数値解法と呼んでいる場合もある²⁴⁾。しかし、Fig. 1 に示すように有限要素法や重みつき残差法でも結局は一種の差分式を解くのであるから、単に差分式を解く方法を差分法（あるいは階差法）と呼ぶのは望ましくないと考える（なお変数変換法^{25)~26)}もテイラー展開による差分法に属するものと考えられる）。

同様に系を要素に分割して数値計算する方法をすべて有限要素法と呼ぶものも望ましくないと思う。

さて問題を非定常熱伝導、凝固問題などに限定して従来の方法の特徴および問題点について以下に述べる。

2.1 テイラー展開による差分法^{15)~21)27)~38)}

この方法には微分方程式を直接テイラー展開により差

分化する方法と変数変換を行つた後テイラー展開により差分法する方法^{25)~26)}がある。これらの方法は比較的単純な形状で系の構成要素の種類が少ない場合にはプログラムが容易で計算時間も早く最も実用的である。しかしながらこれらの方法は今のところテーパ付鋳塊やコルゲート状内面の金型など実際の複雑な形状の問題には適していない。したがつてこの種の手法を利用した凝固計算は単純な形状の問題を対象としている^{15)18)~20)26)~38)}。

2.2 変分法による有限要素法^{39)~49)51)~55)}

この方法は複雑な境界形状の問題の解析に適しているが、当然のことながら変分原理が存在しない場合には適用できない（凝固問題では変分原理がよくわかっていない場合が少なくない）。また通常の有限要素法（文献 55）などの特殊な場合を除き）は後述の重みつき残差法の特定の場合に相当している⁵⁸⁾。さらにマトリックス法のほうが有限要素法より便利である¹⁰⁾¹¹⁾。したがつて特殊な有限要素法が開発されない限り今のところ重みつき残差法やマトリックス法のほうがより便利である。

2.3 重みつき残差法^{50)56)~58)}

重みつき残差法の中でも特にガラーキン法が熱移動問題によく使用されている。この場合微分方程式さえわかれば変分原理の存在の有無に関係なく計算が可能であるから変分原理を利用した有限要素法より便利である。しかしながら、マトリックス法と比較すると、差分式導出方法の複雑さ、数値積分をせずに種々の要素を使用することの困難さ、物理的意味の不明確さなどの点では劣っている。

2.4 直接法

2.4.1 外節点法

MAGNEAL²⁾ や DUSINBERRE³⁾ らのネットワーク法、岩城⁴⁾、HODGKINS ら⁵⁾ の方法、これらを発展させたマトリックス法^{8)~11)}などは本論文の定義によれば外節点法ということになる。従来の有限要素法でもマトリックス法を利用しているのであるから、マトリックス法というより外節点法と呼ぶほうがよいように思う。この外節点法（マトリックス法）と内節点法の比較は後で詳しく述べる。

2.4.2 内節点法

内節点法に属する従来の方法として次のようなものがある。

(1) CAMPBELL らの方法⁶⁾⁵⁹⁾

CAMPBELL らの方法⁶⁾ (HENZEL ら⁵⁹⁾ はこの方法を凝固問題に適用しているようである) は系を微小セルに分割し、セルをとり囲む隣接セル間での熱収支の式を作り (熱放射, 発熱も考慮している), この式を計算機で解く方法である。彼らは入力データとして, セル番号, 隣接セル番号, セルの構成面から節点までの距離, セルの体積, セルを構成する各面の面積などを与えている。この場合, 節点はセル内には位置しているが, 節点の明確な定義はなされていない。特に HENZEL らの計算例では鈍角を有するセルを使用しているが, これは後述のように望ましいことではない。さらに彼等の方法では入力データが多すぎ実用的ではない。

(2) 新山²²⁾, 植田ら⁶⁰⁾ の方法

新山, 植田らの方法も結果的には内節点法であるが, 直交分割の場合しか取扱つておらず, 種々の要素を使用するという汎用性についての概念が明確でない。また熱物性値の温度依存性が十分考慮されていないように思われる。

(3) 片山ら⁷⁾ の方法

片山らの方法は, 長方形要素, 円と放射線からなる要素, 鋭角または直角三角形要素により系の内部を分割し, 境界上では境界面の形状に応じた要素 (Fig. 2 参照) で分割し, 隣接要素間の熱伝導による熱収支を考える方法である。すなわち, 彼らは節点 (温度点と呼んでいる) を要素辺の垂直二等分線の交点に選び, 各節点間の熱コンダクタンスを考え熱収支の式を作っている。また入力データとして, 節点番号, 要素体積, 隣接節点と節点間の距離, 節点間断面積 (要素辺の長さ×要素の厚さ) などを必要としている。なお熱伝導率の温度依存性は変換温度 $u = \int_0^{\theta} \lambda d\theta$ を使用して考慮している。

この方法は節点の位置を明確に定義しており (理由については述べていないが), 物理的に問題のない方法である。しかしながら, この方法はむしろ熱コンダクタンス法的なものであり, 微分方程式を使用しない直接法としての明確な概念はなく, 対流項あるいは流れ場などへの拡張の可能性についても十分示唆しているとは思われない。さらに熱伝導問題に限定しても, 境界上で特殊な要素を使用していること, 入力データが多すぎるという点で従来の有限要素法やここで提案する方法と比較して実用性は劣るものと思われる。

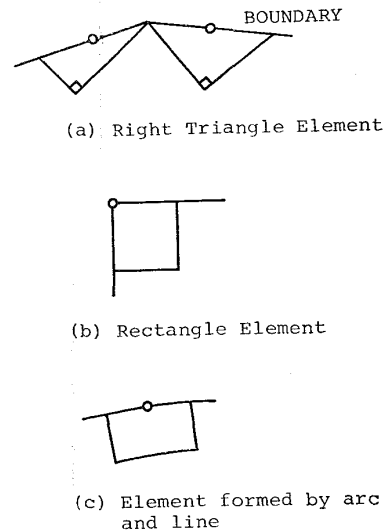


Fig. 2. Boundary elements and nodal points by KATAYAMA et al⁷⁾.

(4) 金山の方法¹²⁾

金山は要素の重心に節点を定義し, 要素内の濃度を一定とし三角形要素, 矩形要素に対し定常拡散および質量保存の差分式を求めている。節点を重心にとることは後述のように望ましくない。また具体的な計算方法は不明である。

2.5 その他の方法

その他の方法として従属変数を変換する庄司の方法¹³⁾ ¹⁴⁾がある。この方法は微分方程式を使用するもので, 形状の簡単な純物質の凝固問題において時間および空間の分割数を減らすことができるが複雑な形状の問題に対する汎用性に問題がある。また通常必要とする計算精度はそれほど高くないので (凝固問題に対し), 特別な場合を除きテイラー展開による差分法などのほうが実用的であろう。

3. 改良内節点法

3.1 原理

直接法では前述のように微分方程式を使用せず直接差分式を導く。すなわち, 解くべき系を Fig. 3 に示すように鋭角 (直角も含む) 三角形, 矩形 (三次元の場合には四面体, 三角柱, 立方体など) などの要素に分割し, 各要素に対し, 微分方程式を導く場合と同様に物理現象を数式化する。この場合前述の節点および節点領域の概念が重要である。すなわち, 要素内に節点, 節点領域を定義し, 節点領域内の変数值 (温度, 流速, 圧力など) を節点における値で代表させる (流速, 圧力は場合によつては節点領域境界における値で離散化する)。

内節点法では前述のように要素自体を節点領域とし,

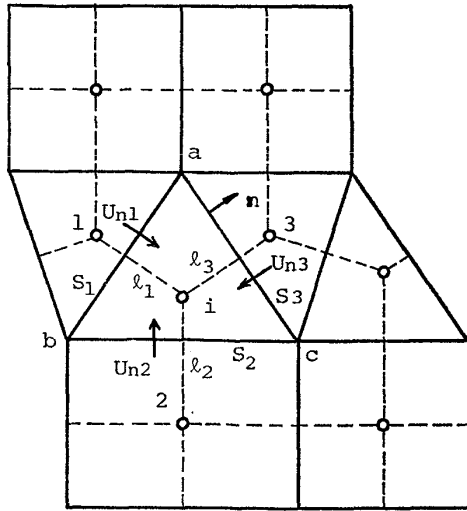


Fig. 3. Dividing by triangular and rectangular elements.

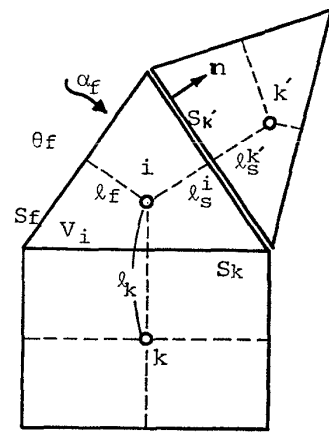


Fig. 4. Boundary element i.

節点を要素の外心に定義する。一例として、二次元ポテンシャル流れ場における非定常熱移動問題を考えてみる。

まず熱エネルギー保存則は節点間の温度が直線的に変化するものとして(1)式で示される。

$$\rho C_p V_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \sum_k \frac{\bar{\lambda}_k}{l_k} \cdot S_k \cdot (\theta_k - \theta_i) + \sum_{k'} \frac{S_{k'}}{\frac{1}{\alpha_s} + \frac{l_s^i}{\lambda_i} + \frac{l_s^k}{\lambda_{k'}}} \cdot (\theta_{k'} - \theta_i) + \sum_k \overline{\rho C_p \theta g_i} \cdot S_k U_{nk} + \dot{Q} \dots \dots (1)$$

ここで左辺は要素への熱の蓄積項、右辺第一項はフーリエの式に従う熱伝導項で平均温度 $\bar{\theta}_k = (\theta_i + \theta_k)/2$ に対する熱伝導率 $\bar{\lambda}_k = \lambda(\bar{\theta}_k)$ を考えることにより熱伝導率の温度依存性を考慮している¹⁰⁾。右辺第二項は外部流体や固体と接している境界辺に対し微小時間内での熱平衡状態を仮定し熱抵抗を考慮したものである。(外部流体と接している辺に対しては $\alpha_s = \alpha_f$, $\theta_{k'} = \theta_f$, $l_s^k = 0$, $l_s^i = l_f$ とする。また $\lambda_i = \lambda(\theta_i)$, $\lambda_{k'} = \lambda(\theta_{k'})$ である。) 第三項は流れによる熱移動項(対流項)であり $U_{nk} > 0$ (流入)の場合 $\overline{\rho C_p \theta g_i} = \rho C_p \theta g_i|_k$, $U_{nk} < 0$ (流出)の場合 $\overline{\rho C_p \theta g_i} = \rho C_p \theta g_i|_i$ とする。ここで U_{nk} は k 番目の辺における辺に直交する流速成分で通常のパテンシャル流れ場では(2)式, Darcyの法則が適用されるような場(デンドライト中の流れ, 多孔質物体中の流れなど)では(3)式で示される。

$$U_{nk} = (\varphi_k - \varphi_i) / l_k \dots \dots \dots (2)$$

$$U_{nk} = \frac{K}{\mu g_i} \left[\frac{P_k - P_i}{l_k} - \rho_l g \frac{y_k - y_i}{l_k} \right] \dots \dots \dots (3)$$

第四項は発熱項であり反応熱, 凝固潜熱の放出などをこ

の項で考慮することができる。

次に連続の式を考える。ここでは微小時間 Δt 間に固相率が Δg_s 増加し, 凝固収縮流が生じる場合を考えると(4)式が成立する。

$$(\rho_s - \rho_l) V_i \Delta g_{si} = \sum_k \overline{\rho_l g_i} \Delta t S_k U_{nk} \dots \dots \dots (4)$$

もちろん Δg_{si} が 0 の場合は(4)式は通常のパテンシャル流れ場に対する連続の式となる。また U_{nk} には(2), (3)式などが使用でき, $U_{nk} > 0$ の時 $\overline{\rho_l g_i} = \rho_l g_i|_k$, $U_{nk} < 0$ の時 $\overline{\rho_l g_i} = \rho_l g_i|_i$ とする。

最後に運動方程式を求めてみる。Darcyの法則が成立する場に対しては(3)式が運動方程式となっており, 通常のパテンシャル流れ場に対しては節点領域に出入する運動量, 作用する圧力, 体積力のつり合いを考えると(5), (6)式が成立する。

$$\rho V_i \partial u_i / \partial t + \rho \sum_k (U_{nk} p_k + U_{tk} q_k) = - \sum P_k S_k p_k + \rho V_i X_i \dots \dots \dots (5)$$

$$\rho V_i \partial v_i / \partial t + \rho \sum_k (U_{nk} q_k - U_{tk} p_k) S_k U_{nk} = - \sum P_k S_k q_k + \rho V_i Y_i \dots \dots \dots (6)$$

ここで U_{tk} は k 番目の辺における辺に平行な方向の速度成分で反時計まわりを正とする。

以上のように熱エネルギー, 物質および運動量に対する保存則の差分式を導くことができた(時間項に対しては前進差分あるいはクランク・ニコルソン差分などを適用する)。紙面の都合で省略するが, x-y 直交座標系で座標軸に平行な矩形要素の場合にはこれらの式から容易に微分方程式あるいはテイラー展開による差分式と同一の式を得ることができる。

実際の計算では(1)~(6)式を必要に応じて連成あるいは非連成化して適当な境界条件, 初期条件下で数値計算するが, 特に(5), (6)式の実用的な数値計算法については今後の課題である。

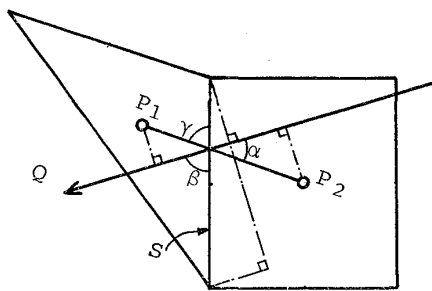


Fig. 5. Direction of heat flow should be considered in the method where the nodal point is designated at the center of gravity of each element.

3.2 節点を外心に定義する理由

今節点を要素内の重心 P_1, P_2 にとつたとする (Fig. 5). さらに辺 S (長さ S とする) における熱流方向を Q とし, Q は辺 S と角度 β , 節点間の線分 $\overline{P_1P_2}$ ($=l$) と角 α をなし, 辺 S と $\overline{P_1P_2}$ のなす角を γ とする. 辺 S を通過する熱量 \dot{q} は P_1P_2 間の温度分布を直線近似すると

$$\dot{q} = \lambda \frac{\theta_{P_2} - \theta_{P_1}}{l \cos \alpha} \cdot S \cdot \sin \beta = \frac{\lambda S}{l} (\theta_{P_2} - \theta_{P_1}) \cdot \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\cos \alpha} \dots \dots \dots (7)$$

となる. 一般に α は未知であるが $\gamma = 90^\circ$ の場合には (7) 式は

$$\dot{q} = \frac{\lambda S}{l} (\theta_{P_2} - \theta_{P_1}) \dots \dots \dots (8)$$

となる. すなわち, (1) 式は任意の熱流方向に対しても成立する. $\gamma \neq 90^\circ$ では熱流の方向がわからなければ (7) 式を使用することができない. したがって, $\gamma = 90^\circ$ となるように節点を定義する必要がある. このためには要素辺の垂直二等分線, すなわち外心に節点をとればよい.

3.3 隣接要素の求め方

この方法では各要素の隣接要素を知る必要がある. 規則的な分割を行つた場合には容易に計算により隣接要素を求めることができるが不規則分割の場合には工夫する必要がある (前述のように CAMPBELL⁶⁾, 片山⁷⁾ らは入力データとして与えている).

本方法では要素を構成する頂点番号, 頂点の座標から隣接要素番号, 隣接節点間の距離, 要素面積, 要素辺の長さなどを算出する. 要素面積, 要素辺の長さなどは従来の有限要素法, マトリックス法の場合と同じである.

隣接要素を算出する手順は次の通りである (Fig. 6 参照).

- (1) i 要素の頂点 1 を共有する要素番号 P_1, q_1, r_1, \dots を求める.
- (2) P_1, q_1, r_1, \dots の要素の内頂点 2 を有する要素番

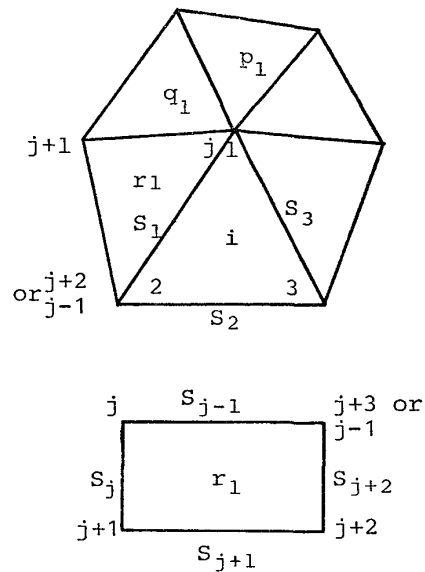


Fig. 6. Vertex number j and side number S_j .

号 r_1 は i 要素の第 1 の辺に隣接している.

(3) 頂点 1 が r_1 要素の j 番目の頂点であれば頂点 2 は r_1 要素の $j \pm 1$ 番目の頂点である. したがって, r_1 要素で頂点 2 が $j+1$ 番目の頂点ならば r_1 要素の j 番目の辺が i 要素の 1 番目の辺に隣接している (辺の番号は Fig. 6 に示すように反時計まわりにつける). また頂点 2 が $j-1$ 番目 (もし $j=1$ の時には Fig. 6 に示すように三角形要素では 3 番目の辺, 矩形要素では 4 番目の辺で隣接している) に相当する時は r_1 要素の $j-1$ 番目の辺が隣接する辺である.

(4) (1)~(3) を頂点 2, 3 (矩形要素の場合には 2, 3, 4) に対してくり返す.

以上のような手順で各要素の各辺がどの要素のどの辺と接しているのかがわかる. そして節点間の距離など数値計算に直接必要な定数が算出できる.

3.4 試作プログラム

流動を考えない場合の非定常熱伝導 (凝固も含む) 問題用プログラムおよび凝固収縮流を考慮した凝固解析用プログラムを製作した.

前者のプログラムはマトリックス法⁸⁾⁹⁾ (外節点法) の場合のプログラムとほぼ同一であるが, 前述の隣接要素に関する計算が入ること, マトリックス計算が不要であることなどで異なっている. また文献 (8), (9) では境界要素における熱伝達率を要素頂点 (節点) に対して指定したが本プログラムでは要素各辺に対し指定できるようにした (このほうがより一般的である). なお潜熱の放出方法はマトリックス法の場合⁸⁾⁹⁾ と同じである.

後者の流れを考慮したプログラムでは (1), (4) 式を

連立させず非連成化した場合を考えた。すなわち、(1)式により初期条件あるいは時刻 $t-\Delta t$ における値から時刻 t における温度 θ_i を求め (前進差分), θ_i が液相線温度以下になつた場合には固相率を Δg_s 増大させ θ_i を液相線温度に回復させる。次にこの Δg_s を(4)式に代入し、バンド法により速度ポテンシャルあるいは圧力を算出し、(2), (3)式により流速に換算した。このようにして得られた流速, 温度を使用し時刻 $t+\Delta t$ における温度を(1)式により求め以下上述の手順をくり返した。なお Darcy の法則を適用する場合には完全液相で十分大きい透過率 K を使用した。

3.5 計算例および検討

以下内節点法を凝固計算に適用した数例を示し、本方法の特徴について検討する。

3.5.1 解の収束性と精度

本方法による解の収束性と精度については厳密には数学的な議論¹²⁾が必要であるが、原理的には分割が十分小さければ真の値に近づくであろう。またその原理から考えれば内部領域に関しては従来のテイラー展開による差分法や外節点法と同一の分割に対しては同一の精度となるであろう。

Fig. 7 は砂型による平板鋳鋼鋳物の凝固時間に関する収束値からの偏差 (分割を小さくして行つた場合の凝固時間の外挿収束値に対する誤差) と空間分割の関係を示したものである。これから次のことがわかる。(a) 分割

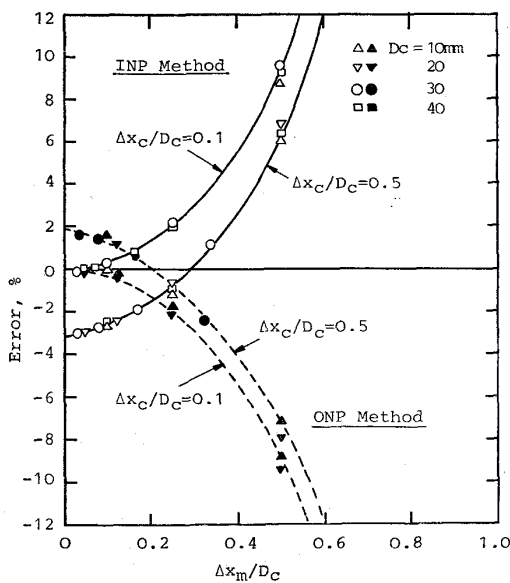


Fig. 7. Error (deviation from converged value) of calculated solidification time of steel plate cast in a sand mold chiefly depends on element size, Δx_m , in the sand mold. Δx_c denotes element size in casting and D_c thickness of plate casting.

が小さくなればある値に収束する。(b)内節点法と外節点法では誤差の方向が逆であるが絶対値としてはほぼ同等である。(c)砂型鋳鋼鋳物の場合凝固計算精度は主に鋳型の分割により決まり、鋳物の厚さを D_c とすると無次元空間分割 $\Delta x / D_c$ で整理できる。

内節点法で鋳型の分割が粗くなると凝固が遅れるのは鋳物に接している要素への熱抵抗が大きくなるためであり、外節点法で凝固が早くなるのは鋳物に接している鋳型要素により多くの熱吸収が可能となる (温度が上昇しにくいから) ためであろう。ただし、金型の場合には砂型の場合ほどには分割の影響は大きくないようである。さらに前進差分法では時間分割の影響は収束条件 (テイラー展開による差分法の場合と同様にして定まる) を満足していればあまり問題とならない。

3.5.2 計算時間

本計算方法の大きい利点の一つは計算時間を短くすることができることである。Fig. 8 は大阪大学大型計算機センター NEAC ACOS-800 を使用し、前進差分近似により種々の凝固計算を行つた場合の時間分割あたりの計算時間 (CPU) を示している。すなわち同一要素数では内節点法による計算時間は外節点法 (差分法による有限要素法, ガラーキン法による有限要素法などでもほぼ同じである) の約 1/3, テイラー展開による差分法の約 2 倍となつている。(外節点法ではテイラー展開による差分法の約 6 倍となつている。またこれらの計算では物性値の温度依存性を考慮している。)

内節点法のほうが外節点法より計算時間が短いのは、Fig. 9(a) に示すように外節点法では節点 P の節点領域は a~d の要素に属しており 8 方向の熱流を考えねばならぬのに対し、内節点法では Fig. 9(b) のように 4 方向のみを考えればよいからである (三角形要素のみを

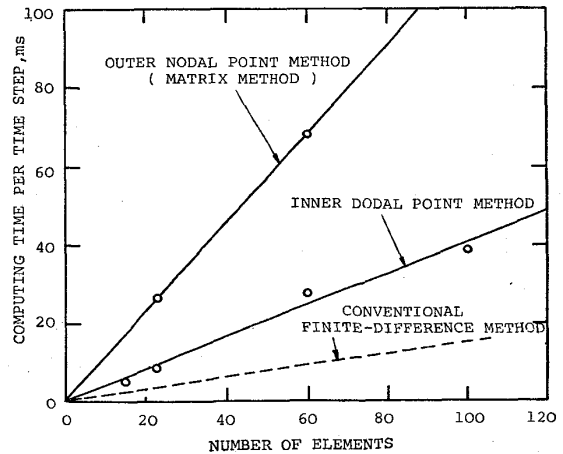


Fig. 8. Computing time by various methods (NEAC ACOS-800)

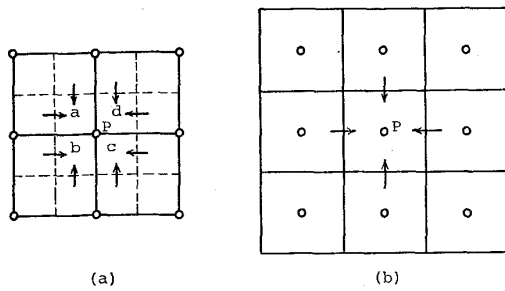


Fig. 9. Heat flow to be considered in the Outer Nodal Point Method (a) and the Inner Nodal Point Method (b)

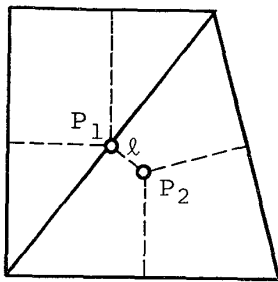


Fig. 10. Combination of elements forming rectangle-like domain should be avoided, because the short length between the nodal points needs a small time step.

使用した場合には外節点法では8方向以上の熱流を考えるのに対し、内節点法では3方向のみでよい。一方、テイラー展開による差分法では規則分割となっているため、要素ごとに要素形状、物性値などを調べる必要のある（あるいは調べるようにプログラムされた）内節点法より計算時間は短くなっている。

このように内節点法は計算時間の点で外節点法より有利であるが場合によっては計算時間が長くなる。これは例えば Fig. 10 に示すように矩形に近い領域を形成するような三角形要素による分割を行った場合である。この場合節点間距離が短くなり前進差分式の収束条件を満足させるには時間分割を小さくする必要があり結局最終的には計算時間が長くなるからである。特に矩形を2つの三角形要素で分割することはできない（節点間距離が0となり発散する。この場合矩形要素を使用する）。この点は内節点法の最大の欠点である。節点位置を重心にとればこの点問題がないが、3.2 で述べたように誤差が生じるので望ましくない。また以上の議論は流れを考えぬ場合に対してであるが、一般的にも式の項数からいつて、外節点法より計算時間は短くできるであろう。

3.5.3 入力データについて

規則的な分割を行った場合には要素番号や頂点座標などを各要素について与えず計算により求めることができ

るが不規則分割の場合には外節点法や従来の有限要素法と同様に各要素に対し要素番号、頂点座標、物性値番号などを与えねばならない。これは要素数が多くなると大変な労力である（ただし、従来の内節点法よりは楽である）。しかしながら、最近構造解析用有限要素法などで開発されている自動分割ソフトウェア⁶²⁾⁶³⁾や対話式入力データ製作システム⁶⁴⁾など（そのままでは本方法などには適用できないように思われる）と同様の方法により入力データ製作は大幅に簡易化されるであろう。

3.5.4 数値計算例

非定常熱伝導用プログラムでかなりの凝固計算を行ったが (Fig. 7, 8 など) ここでは Fig. 11, 12 を一例と示す。

Fig. 11 は角柱状の鋳鋼鋳物（砂型）の計算例で点線のように無理に直交分割近似²²⁾⁶⁵⁾した場合には鋳型への

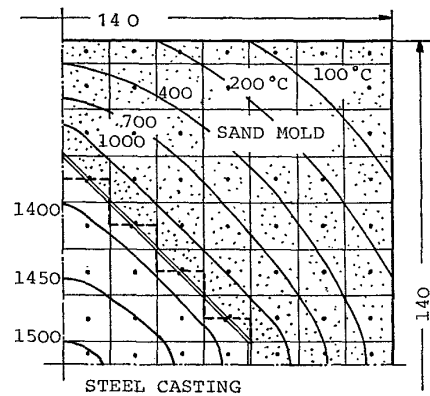


Fig. 11. Temperature contours in sand mold and prism steel casting at 300s after pouring. Solidification time by solid line dividing was 345s and 357s by broken line dividing.

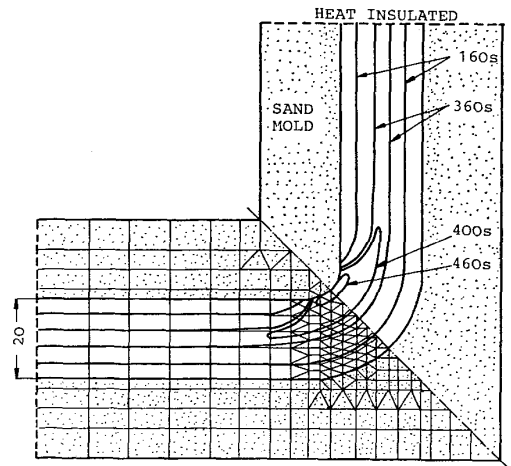


Fig. 12. Progress of solidification front in plate cast iron joined as L section cast in a sand mold.

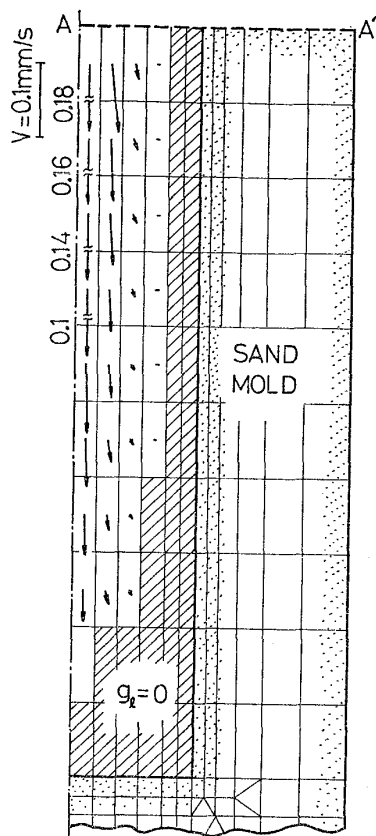


Fig. 13. Flow in solid-liquid region due to solidification contraction. (Columnar steel casting of $160\phi \times 500\text{mm}$. Darcy's law is assumed. 1020s after pouring.)

接触面積の増加の影響よりも節点位置の変化による界面抵抗の増加によりむしろ凝固時間が長くなっている。一方金型の場合には、点線のような分割では凝固時間は短くなる。分割方法と計算精度については今後の検討が必要である。

Fig. 12 は鑄鉄の板状砂型鑄物のアール部の凝固計算例である。テイラー展開による差分法などではこのような計算は困難である。なお Fig. 12 程度のアールを付けても最終凝固位置は肉厚中心とならず内角部となることは興味深いことである。

凝固収縮流を考慮したプログラムではポテンシャル流れとした場合、Darcy の法則を適用した場合、鑄型形状を変えた場合など種々検討しているが、ここでは Fig. 13 に結果の一例を示すとどめ、次報において V 偏析などとの関連について詳しく報告する。なお Fig. 13 では AA' 面で鑄型は断熱、鑄物側は鑄塊全体の凝固収縮量に相当する押湯からの流入があるものとしている。また鑄物は鑄鋼 ($160\phi \times 500\text{mm}$) で凝固収縮流により中心部の凝固時間は 10% 以上遅れるという結果なども得られている。

4. 結 言

種々の数値計算方法を微分方程式を経由する方法と、しない方法“直接法”に大別し、従来漠然と使用されている差分法をテイラー展開による差分法と直接法にわけること、および直接法を外節点法と内節点法にわけたことを提案した。このような分類によれば著者らが以前発表したマトリックス法は外節点法と呼ぶことになる。

この直接法という概念に基づき、内節点法に相当する従来の種々の方法を改良、発展させた改良内節点法を提案し、凝固問題への適用例について述べた。

この改良内節点法が従来の方法と異なる点は次の通りである。(1)微分方程式を経由しない直接法という概念に基づいたものである。(2)要素の外心を節点とし、境界要素に対し特別の要素を使用しない。(3)隣接要素に関する情報を最小限の入力データから算出する工夫をしている。(4)流れ場なども容易に取扱える可能性のあることを示している。

またこの内節点法と外節点法(マトリックス法)を比較すると内節点法は(1)計算時間を約 $1/2 \sim 1/3$ にすることが可能である。(2)計算がより簡単、したがってプログラムも容易である。(3)同一節点領域に2種類以上の物質が混在することを避けることが可能である。などの利点がある。一方内節点法には矩形を形成するような三角形要素の組合せは使用できない(この場合には矩形要素を使用する)欠点があるので分割に注意する必要がある。

これらの直接法は微分方程式を経由する方法に比べ(1)変数変換や関数変換が容易ではない。(2)ガラーキン法などのような機械的処理が困難である。などの欠点があるが次のような利点があるため少なくとも非定常熱移動問題ではかなりの場合より便利であると思う。(1)変分法による有限要素法やガラーキン法などと同様に複雑形状の境界を取扱える。(2)物理的意味が明確である。(3)数学的困難さがない。(4)物理モデルの変更が容易である(反応項や発熱項を容易に加えることができる)。(5)種々の要素を数値積分せず使用できる。(6)物性値の温度、濃度依存性などを合理的に考慮することができる¹⁰⁾。(7)微分方程式が不明の場合でもモデルを作り解析することができる(ということは一般に微分方程式を新たに作ることに相当することが多い)。

終りに本研究を進めるにあたり、ご指導とご援助をたまわつた大阪大学工学部福迫達一教授、有益な教示、討論をしていただきました東京大学生産技術研究所川井忠彦教授、西尾茂文助教授、同工学部田中宏明助教授、笠

木仲英助教授, 実際の数値計算でご協力いただいた大阪大学工学部大学院八島幸雄の各位に深く感謝します。

なお本研究の一部は文部省科学研究費(試験研究(2)昭和 53, 54 年度)により行われたものである。

記 号

g_l : 固液共存域での液相率あるいは多孔質物質の空隙率
 g_s : 固液共存域での固相率
 g : 重力加速度 (m/s^2)
 $i, j, k \dots$: 要素あるいは節点番号
 l : 節点間距離あるいは節点一節点領域境界間距離 (m)
 p_k, q_k : k 節点領域表面における外向き法線の方向余弦
 t : 時間 (s)
 u_i, v_i : i 節点における x, y 方向速度成分 (m/s)
 x, y : 座標
 y_i : i 節点の基準水平線からの高さ (m)
 C_p : 比熱 ($J/kg \cdot K$)
 D_c : 鑄物の厚さ (m)
 K : 透過率 (m^2)
 P : 圧力 (Pa)
 \dot{Q} : 単位時間当りの発熱量 (W)
 S : 要素辺の長さまたは表面積 (m, m^2)
 U_n : 要素辺における内向き法線方向の速度成分 (m/s)
 U_t : 要素辺における反時計まわり方向の接線方向の速度成分 (m/s)
 V_i : i 節点領域の体積または面積 (m^3, m^2)
 X_i, Y_i : i 節点領域に作用する物体力 (N)
 α, β, γ : 角度 (rad)
 α_f : 固体-流体間の熱伝達率 ($W/(K \cdot m^2)$)
 α_s : 接触熱伝達係数 ($W/(K \cdot m^2)$)
 θ : 温度 (K)
 θ_f : 外部流体温度 (K)
 λ : 熱伝導率 ($W/(K \cdot m)$)
 μ : 粘度 ($Pa \cdot s$)
 ρ : 密度 (kg/m^3)
 φ : 速度ポテンシャル (m^2/s)
 Δt : 時間ステップ (s)
 $\Delta x_c, \Delta x_m$: 鑄物(c), 鑄型(m)中での節点領域の幅 (m)

文 献

- 1) D. GREENSPAN: Discrete Models, (1973), [Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Massachusetts]
- 2) R. H. MACNEAL: Quart. Appl. Math., 11 (1953), p. 295
- 3) G. M. DUSINBERRE: Heat Transfer Calculations by Finite Differences, International Textbook Co., (1961), p. 85
- 4) 岩城 嵩: 日本鋼構造協会第7回大会研究集会, (1973.6), p. 649

- 5) W. R. HODGKINS and J. F. WADDINGTON: Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion, ed. by J. R. OCKENDON and W. R. HODGKINS, (1975), p. 26 [Clarendon Press, Oxford]
- 6) D. J. CAMPBELL and D. B. VOLLENWEIDER: Proc. of the Eastern Joint Computer Conf., (1959), p. 143
- 7) 片山功蔵, 齋藤彬夫, 服部 賢: 伝熱工学の進展 (1976), p. 151 [養賢堂]
- 8) 大中逸雄, 福迫達一: 鑄物, 48(1976), p. 139
- 9) I. OHNAKA and T. FUKUSAKO: Trans. ISIJ 17(1977), p. 410
- 10) J. OHNAKA and T. FUKUSAKO: Sixth Int. Heat Transfer Conf., 3 (1978.8), Tronto p. 251
- 11) I. OHNAKA: U. S.-Japan Seminar on Interdisciplinary Finite Element Analysis, (1978.8), Cornell Univ.
- 12) 金山 寛: Discrete Models for Salinity Distribution in a Bay-Conservation Laws and Maximum Principle-, 第28回応用力学連合講演会, (1978.11)
- 13) 庄司正弘: 冷凍, 50-573 (昭 50-7), p. 513
- 14) 庄司正弘: 日本機械学会論文集, 44(1978)381, p. 1624
- 15) R. J. SARJANT and M. R. SLACK: JISI, 177 (1954), p. 428
- 16) J. CRANK: The Mathematics of Diffusion, (1955), p. 186 [Oxford]
- 17) H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER: Conduction of Heat in Solids, (1959), p. 466 [Oxford]
- 18) D. J.-P. ADENIS, K. H. KOATS, and D. V. RAGONE: J. Inst. Metals, 91(1962-63), p. 395
- 19) E. Y. KUNG, J. R. DAHM, and G. B. DELANCY: ISA Trans. 6(1967)2, p. 162
- 20) E. A. MIZIKAR: Trans. Met. Soc. AIME, 239 (1967), p. 1747
- 21) 連続鋼片加熱炉における伝熱実験と計算方法, 日本鉄鋼協会特別報告 (昭45) 11, p. 68
- 22) 新山英輔: 鑄型内の金属の凝固速度に関する研究学位論文(東京大学), (1973)
- 23) 片山功蔵, 服部 賢: 日本機械学会論文集, 40 (1974) 333, p. 1404
- 24) 甲藤好郎: 伝熱概論, (1967), p. 394[養賢堂]
- 25) H. G. LANDAU: Q. Appl. Math., 8(1950), p. 81
- 26) 齋藤武雄: 機械学会第875回講演会講演論文集 (1976.11) 760-19, p. 42
- 27) 成田貴一, 森 隆資: 鉄と鋼, 56(1970), p.1323
- 28) R. E. MARRONE, J. O. WILKES, and R. D. PEHLKE: AFS Cast Metals Res. J., 6(1970), p. 184
- 29) R. E. MARRONE, J. O. WILKES, and R. D. PEHLKE: AFS Cast Metals Res. J., 6(1970), p. 188

- 30) G. SCIAMA: *Fonderie* (1971) 300, p. 131
- 31) R. E. MARRONE, J. O. WILKES, and R. D. PEHLKE: *AFS Cast Metals Res. J.*, 8(1972), p. 94
- 32) R. D. PEHLKE, M. J. KIRT, R. E. MARRONE and D. J. COOK: *AFS Cast Metals Res. J.*, 9 (1973), p. 49
- 33) V. de L. DAVIES, S. STOKKE, and O. WESTBY: *The British Foundryman*, 66(1973), p. 305
- 34) J. M. SAMUELS, F. W. SCHMIDT, and A. B. DRAPER: *Die Casting Engr.* 18 (1974), p. 14
- 35) 松野淳一, 中戸 参, 大井 浩: *鉄と鋼*, 60 (1974), p. 1023
- 36) A. JEYARAJAN and R. D. PEKLE: *Trans. AFS*, 84 (1976), p. 647
- 37) R. D. PEHLKE, J. T. BERRY, W. ERICKSON, and C. H. JACOBS: *The Simulation of Shaped Casting Solidification*, *The Sheffield Int. Conf. on Solidification and Casting*, Preprint, 2(1977)
- 38) P. N. HANSEN: *On Numerical Simulations of the Solidification Process*, *ibid.*
- 39) E. L. WILSON and R. E. NICKELL: *Nuclear Engineering and Design*, 4(1966), p. 276
- 40) G. E. MEYERS: *Analytical [Methods in] Conduction Heat Transfer*, (1971), p. 388 [McGraw-Hill]
- 41) 藤野 勉: *熱伝導と熱応力 (コンピュータによる構造工学講座II-4)*, (1972) [培風館]
- 42) W. MIZUMACHI: *Non-Linear Thermal Stress Analysis for Nuclear Power Plant by Finite Element Method*, *Third Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright-Patterson, Ohio (1971, Oct.)
- 43) O. C. ZIENKIEWICZ: *The Finite Element Method in Engineering Science*, (1971) [McGraw-Hill]
- 44) O. C. ZIENKIEWICZ and C. J. PAREKH: *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 2(1970), p. 61
- 45) J. I. SOLIMAN and E. A. FAKHROO: *J. Mech. Eng. Science*, 14(1972), p. 19
- 46) E. L. WILSON, K. J. BATHE, and F. E. PETERSON: *Reprint of the 2nd Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology*, Berlin 5(1973, Sept.), L1/4
- 47) R. V. S. YALAMANCHILI and S.-C. CHU: *J. Heat Transfer*, *Trans. ASME-C*, 95(1973) p. 235
- 48) R. E. BECKETT and S.-C. CHU: *ibid.*, 95(1973) p. 126
- 49) 佐々木猛, 今井貫爾, 成田知明: *日本鋼構造協会第7回大会研究集会*(1973.6), p. 37
- 50) 庄子幹雄, 佐々木猛, 今井貫爾, 成田知明: *ibid.*, p.655
- 51) I. OHNAKA and T. FUKUSAKO: *Tech. Rept. Osaka University*, 24(1974), p. 461
- 52) G. COMINI, S. Del GIUDICE, R. W. LEWIS, and O. C. ZIENKIEWICZ: *Int. J. Nu. Meth. Eng.*, 8(1974), p. 613
- 53) M. D. MIKKAILOV, G. COMINI, S. Del GIUDICE, and G. P. RUNCHI: *Int. J. Heat Mass Transfer*, 20(1977), p. 195
- 54) 牧村 実, 古都 敏, 枝村瑞郎: *水曜会誌*, 18 (1978), p. 631
- 55) N. KIKUCHI: *A Class of the Stefan Problem using Variational Inequalities*, *US.-Japan Seminar on Interdisciplinary Finite Element Analysis*, Cornell Univ. (1978.8)
- 56) M. B. HSU and R. E. NICKELL: *Int. Symposium on Finite Element Methods in Flow Problems, Coupled Convective and Conductive Heat Transfer by Finite Element Methods*, Univ. of Wales, Swansea (1974)
- 57) G. YAGAWA, M. MASUDA, and Y. ANDO: *Finite Element Analysis of Magneto-hydrodynamics and its Application to Lithium Blanket Design of Fusion Reactor*, *US.-Japan Seminar on Interdisciplinary Finite Element Analysis*, Cornell Univ. (1978.8)
- 58) B. A. FINLAYSON: *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, (1972), p. 229 [Academic Press]
- 59) J. G. HENZEL, Jr. and J. KEVERIAN: *Trans. AFS*. 74(1966), p. 661
- 60) 植田昭二, 小野修二: *鋳物*, 47(1975), p. 658
- 61) B. A. FINLAYSON: *文献* 58), p. 9
- 62) C. O. FREDERICK, Y. C. WONG, and F. W. EDGE: *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 2(1970), p. 133
- 63) J. C. CAVENDISH: *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 8(1974), p. 679
- 64) R. HABER, M. SHEPHARD, J. ABEL, R. GALLAGHER, and D. GREENBERG: *ACM SIGGRAPH proceedings*, (1978 Aug.), 7
- 65) 坂野武男, 黒沢正義, 野村隆二, 大塚幸男: *鋳物*, 51(1979), p. 131