UDC 669.162.263.43 : 532 研究速報

2 次元充塡層内流れへの Ergun 式の拡張*

荒 木 和 男**・森 山 昭**

Extension of Ergun Equation to Two Dimensional Flow in Packed Beds

Kazuo ARAKI and *Akira* MORIYAMA

Synopsis:

Two kinds of the extension of Ergun equation hitherto used to two dimensional flow system; grad $P=-(f_1+f_2|\mathbf{u}|)\mathbf{u}$ (type I) and $\partial P/\partial x=-(f_1+f_2|u_x|)u_x, \partial P/\partial y=-(f_1+f_2|u_y|)u_y$ (type II), were critically examined on their transformability of the coordinate system, their consistency in the direction along a streamline with one dimensional Ergun equation and orthogonality between isobars and streamlines.

Conclusively, the expanded type I of Ergun equation must be applied to two demensional flow system of the packed beds.

軸方向流通抵抗の不均一性が半径方向で変化する不均一充塡構造充塡層では，半径方向ガス流速成分，すなわち，クロス流が存在する[1)~4)]．このため，さまざまな不均一充塡構造には，それぞれ特有の不均一ガス流れが伴うことになり，充塡層型反応器内のガス濃度分布，温度分布，さらには器内反応過程が大きな影響をうけるものと考えられる．高炉内ガス流れ問題についても，最近，ようやく，こうした不均一ガス流れの問題が重要視されるようになつた[5)~7)9)10)13)~15)]．

従来，この種の問題の理論的研究の大部分[5)~15)]は，2次元場に拡張した ERGUN の式[16)]と連続の式とを基礎式系として採用している．これは，固有流通抵抗の実測値を使用するかぎり，ERGUN の式が一次元場に対する信頼度の高い半理論式である点から，妥当な研究方向であるといえよう．しかし，ERGUN の式が包含する物理的内容を損うことなくこの式をいかに2次元場に拡張するかの問題については，一見同等にみえながら，じつは，本質的にことなる，次の2つの形式が，従来，幾人かの研究者によつて，使用されてきた[5)~13)]．すなわち，

拡張形式 I [5)~10)]

$$\mathrm{grad}\, P=-(f_1+f_2|\mathbf{u}|)\mathbf{u} \quad \cdots\cdots (1)$$

拡張形式 II [11)~13)]

$$\left.\begin{aligned}\partial P/\partial x&=-(f_1+f_2|u_x|)u_x\\ \partial P/\partial y&=-(f_1+f_2|u_y|)u_y\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2)$$

一応は，拡張形式 I に基づく基礎式を提示しながら，実際には，拡張形式 II に基づいて理論展開を行なうといつた混乱[13)]も認められる．

拡張形式 I および II の妥当性

一般に，物理法則の表現形式は，座標系の並進および回転に対して独立でなければならない．STANEK[8)]らによれば，すでに，RADESTOCK[17)]が，その学位論文でこの問題について結論を示したようであるが，詳細は不明である．以下に著者自身の考察の結果を述べる．

いま，x-y 座標系を，x および y 方向に，それぞれ a および b だけ並進させ，さらに，角 θ だけ回転させた座標系を，ξ-η 座標系とすると，

$$\begin{aligned}x&=\xi\cos\theta-\eta\sin\theta+a,\\ y&=\xi\sin\theta+\eta\cos\theta+b\end{aligned} \quad \cdots\cdots (3)$$

したがつて，(4)および(5)式の関係が成り立つ．

$$\begin{aligned}u_\xi&=u_x\cos\theta+u_y\sin\theta,\\ u_\eta&=-u_x\sin\theta+u_y\cos\theta\end{aligned} \quad \cdots\cdots (4)$$

$$\left.\begin{aligned}\partial P/\partial\xi&=(\partial P/\partial x)\cos\theta+(\partial P/\partial y)\sin\theta\\ \partial P/\partial\eta&=-(\partial P/\partial x)\sin\theta+(\partial P/\partial y)\cos\theta\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (5)$$

さて，(1)式から，

$$\begin{aligned}\partial P/\partial x&=-(f_1+f_2|\mathbf{u}|)u_x,\\ \partial P/\partial y&=-(f_1+f_2|\mathbf{u}|)u_y\end{aligned} \quad \cdots\cdots (6)$$

したがつて，(4)～(6)式より，

$$\begin{aligned}\partial P/\partial\xi&=-(f_1+f_2|\mathbf{u}|)u_\xi,\\ \partial P/\partial\eta&=-(f_1+f_2|\mathbf{u}|)u_\eta\end{aligned} \quad \cdots\cdots (7)$$

すなわち，

$$(\mathrm{grad}\, P)_{\xi\text{-}\eta系}=-(f_1+f_2|\mathbf{u}|)\mathbf{u} \quad \cdots\cdots (8)$$

この結果，拡張形式 I の(1)式は，座標系の並進および回転に対して不変であることが示された．

一方，拡張形式 II の(2)式については，

$$\partial P/\partial\xi=-(f_1+f_2|u_x|)u_x\cos\theta-(f_1+f_2|u_y|)u_y\sin\theta\fallingdotseq-(f_1+f_2|u_\xi|)u_\xi \quad \cdots\cdots (9)$$

$$\partial P/\partial\eta=(f_1+f_2|u_x|)u_x\sin\theta$$

* 昭和 51 年 9 月 28 日受付 (Received Sept. 28, 1976)
** 名古屋工業大学材料開発研究施設 工博 (Material Research Laboratory, Nagoya Institute of Technology, Gokisho-cho Shōwa-ku Nagoya 466)

$$-(f_1+f_2|u_y|)u_y\cos\theta \fallingdotseq -(f_1+f_2|u_\eta|)u_\eta$$

となり，座標系の並進および回転によつて，表現形式が変り，健全な物理法則のそなえるべき形式的普遍性に欠けていることがわかる．したがつて，(2)式を充塡層内のガス流れに関する運動方程式として使用することは，妥当と言えない．

以上の推論は，別の観点からも導くことができる．すなわち，ERGUN の式は，2次元場であつても，流線に沿つた方向で，そのまま成立すると考えられる．したがつて，流線の接線方向を l 方向とすると，

$$\partial P/\partial l=-f_1|\mathbf{u}|-f_2|\mathbf{u}|^2 \quad\cdots\cdots(11)$$

(1)式からは，

$$\partial P/\partial l=(\mathrm{grad}\ P)\cdot\mathbf{u}/|\mathbf{u}|$$
$$=-(f_1+f_2|\mathbf{u}|)\mathbf{u}\cdot/|\mathbf{u}|=-f_1|\mathbf{u}|-f_2|\mathbf{u}|^2 \quad\cdots\cdots(12)$$

のように，(11)式が導かれるが，(2)式からは，

$$\partial P/\partial l=(\mathrm{grad}\ P)\cdot\mathbf{u}/|\mathbf{u}|$$
$$=-f_1|\mathbf{u}|-f_2(|u_x|u_x^2+|u_y|u_y^2)/|\mathbf{u}|$$
$$\fallingdotseq -f_1|\mathbf{u}|-f_2|\mathbf{u}|^2 \quad\cdots\cdots(13)$$

となり，拡張形式 II は，ERGUN の式の2次元場の拡張形式となつていないことがわかる．

ガス流れの等圧線と流線の直交性

(1)式の妥当性については，元来，ERGUN 式が実際の現象に適合するかという別の問題があるけれども，それらは実験と理論の対比の問題であり，以下では，拡張形式 I 妥当性を前提として，充塡層内ガス流れの等圧線と流線の直交性について考察する．

(7)式の導出過程から，(1)式に基づけば「ある方向の圧力勾配がないならば，その方向のガス流速成分は存在しない」ことがわかる．一方，等圧線の接線方向には圧力勾配はない．したがつて，その方向のガス流速成分は存在しない．すなわち，等圧線と流線はつねに直交するはずである．以上の推論を，気体の状態方程式を媒介として証明した羽田野ら[10]の研究が知られているが，以下に，より一般的な証明を行なう．

よく知られるように，流れ関数 φ は

$$u_x=\partial\varphi/\partial y,\quad u_y=-\partial\varphi/\partial x \quad\cdots\cdots(14)$$

と定義され，連続の式

$$\mathrm{div}(\mathbf{u})=0 \quad\cdots\cdots(15)$$

を自動的に満足している．さて，等圧線（P＝一定）と流線（φ＝一定）の直交条件は，

$$(\partial P/\partial x)(\partial\varphi/\partial x)+(\partial P/\partial y)(\partial\varphi/\partial y)=0 \quad\cdots\cdots(16)$$

であり，(6)および(14)式より，

$$(\partial P/\partial x)(\partial\varphi/\partial x)+(\partial P/\partial y)(\partial\varphi/\partial y)$$
$$=\{-(f_1+f_2|\mathbf{u}|)u_x\}(-u_y)$$
$$+\{-(f_1+f_2|\mathbf{u}|)u_y\}(u_x)=0 \quad\cdots\cdots(17)$$

すなわち，等圧線と流線はつねに直交することが示された．

この結果，V. STANEK ら[11]および桑原ら[13]の解析結果で，等圧線と流線が直交しない一因は，(2)式を含めた基礎式系の設定法に由来するものということができる．実際(2)式に基づくかぎり，

$$(\partial P/\partial x)(\partial\varphi/\partial x)+(\partial P/\partial y)(\partial\varphi/\partial y)$$
$$=f_2u_xu_y(|u_x|-|u_y|) \quad\cdots\cdots(18)$$

となつて，$u_x=0$, $u_y=0$, $|u_x|=|u_y|$ のいずれかが成立する特殊な場所を除いて，一般に，両者は直交することはない．

なお，その後，V. STANEK ら[8]は拡張形式 I による数値解析を展開しているが，彼ら[8)11)13)]の解析方法には，層入口部でのガス流入条件の設定に関連した別の問題点も内包されている．これらについては，別報[3)4)]で指摘したので，ここでは割愛する．

文献

1) 森山，西尾：鉄と鋼，60 (1974)，p. 1271
2) 荒木，森山，西尾：鉄と鋼，60 (1974)，p. 2085
3) 荒木：鉄と鋼，62 (1976)，p. 1485
4) 荒木，森山：鉄と鋼（投稿中）
5) J. RADESTOCK and R. JESHAR: Stahl u. Eisen, 90 (1970), p. 1249
6) J. RADESTOCK and R. JESHAR: Chemie, Ing. Tech., 43 (1971), p. 355
7) J. RADESTOCK and R. JESHAR: Chemie. Ing. Tech., 43 (1971), p. 1304
8) V. STANEK and J. SZEKELY: AIChE Journal, 20 (1974), p. 974
9) J. SZEKELY and J. J. POVEROMO: AIChE Journal, 21 (1975), p. 769
10) 羽田野，栗田：鉄と鋼，62 (1976)，p. 953
11) V. STANEK and J. SZEKELY: Canad. J. Chem. Eng., 50 (1972), p. 9
12) V. STANEK and J. SZEKELY: Canad. J. Chem. Eng., 51 (1973), p. 22
13) 桑原，鞭：鉄と鋼，62 (1976)，p. 463
14) 下村，九島，西川：学振 54 委，化工小委 71 (1975 年 7 月)
15) T. FUKUTAKE, K. OKABE: Trans, ISIJ, 16 (1976), p. 189
16) S. ERGUN: Chem. Eng. Progr., 48(1952), p. 89
17) J. RADESTOCK: Theoretishe Untersuchung der Stationären inkompressiblen und kompressiblen Strömung in ruhenden, geschuchteten und isotropen Schüttungen. Dr.-Ing.-Diss. Techn. Univ. Clausthal (1969).