

# 脈動流れにおける円柱および球からの物質移動に関する理論解析\*

近 江 宗 一\*\*・碓 井 建 夫\*\*

## Theoretical Investigation of Mass Transfer from a Cylinder and a Sphere in Pulsating Flow

Munekazu OHMI and Tateo USUI

### Synopsis:

Analytical solutions of the velocity around bodies oscillating harmonically with small amplitude in a stagnant fluid are derived from the boundary-layer theory. Steady secondary flows around a circular cylinder and a sphere are calculated and shown schematically.

Generalized expressions for the local and overall mass transfer from these bodies in steady, oscillating, and pulsating flows are derived on the basis of the equation of mass balance by using the solutions mentioned above and those reported previously for steady flow. The integrals included in these expressions being evaluated numerically, the local mass-transfer distributions around bodies and the overall expressions are shown for each flow. These results are compared with the analytical and experimental ones reported previously, and shown to be rather satisfactory. The approximate expressions for pulsating flow are

$$Sh = [(0.615)^{1.74} + (0.728 z^{1/3})^{1.74}]^{1/1.74} Sc^{1/3} Re_p^{1/2} \quad (\text{circular cylinder})$$

$$\text{and } Sh = 2 + [(0.654)^{1.85} + (0.648 z^{1/3})^{1.85}]^{1/1.85} Sc^{1/3} Re_p^{1/2} \quad (\text{sphere}),$$

where  $Sh = 2r_0 k_f / D$ ,  $z = (a\omega / U_\infty)^{3/2} (a/r_0)^{1/2}$ ,  $Sc = \nu / D$ , and  $Re_p = 2r_0 U_\infty / \nu$  ( $a$ , amplitude;  $D$ , diffusivity;  $k_f$ , mass-transfer coefficient;  $r_0$ , radius;  $U_\infty$ , free stream velocity;  $\nu$ , kinematic viscosity;  $\omega$ , angular frequency) These expressions become ones for steady flow as  $z \rightarrow 0$ , and ones for oscillating flow as  $z \rightarrow \infty$ .

## 1. 緒 言

前報<sup>1)</sup>で酸化鉄ペレット単一球の還元反応に脈動流れを適用した場合の効果を一界面の未反応核モデル<sup>2)</sup>を用いて理論的に推定した。その際に、脈動流れは化学反応速度定数  $k_c$ 、粒内拡散係数  $D_e$  に影響を与えず、ガス境界膜内物質移動係数  $k_f$  のみを増大させると仮定して、 $k_c$ 、 $D_e$  には定常流の場合の値を、 $k_f$  には北浦ら<sup>3)</sup>の式を適用した。しかしこのような計算では、必ずしも十分とは言えないところがある。そこで本報では、まず酸化鉄ペレットなどの単一試料の定常および脈動流れにおけるガス境界膜内物質移動係数を再検討する目的で、円柱および球からの物質移動を理論的に解析した。

このような研究は従来より、理論と実験の両面から、定常流れ、変動流れおよび脈動流れなどの場合についていろいろと行なわれており、前報<sup>1)</sup>では北浦ら<sup>3)</sup>の式を用いたが、元来この式は定常流中で球が振動する実験か

ら得られた半理論的な実験式であることや、行なわれた実験の範囲を越えて著者らの計算に用いたことなどもあつて、再検討するの必要を感じていた。本論文では、まず一般性のある基礎的な流れの場の解析として、静止流体中で微小・調和振動する物体のまわりの速度を境界層理論に基づいて導き、つぎにこの結果と定常流の場の従来の解析結果とを用いて、定常、変動および脈動流れにおける円柱と球からの局所ならびに総括物質移動係数を求めた。従来の実験結果との比較を一部試みたが、さらに詳しい実験的検討については、球の場合に限定して次報で行なうことにする。

## 2. 静止流体中で微小・調和振動する物体のまわりの流れ

ここではまず物体が静止流体中で微小・調和振動する場合に生じる流れを境界層理論に基づいて導いた。従来、対称な柱体の場合を SCHLICHTING<sup>4)</sup>が、回転対称物

\* 昭和 51 年 4 月本会講演大会にて発表 昭和 51 年 12 月 6 日受付 (Received Dec. 6, 1976)

\*\* 大阪大学工学部 工博 (Faculty of Engineering, Osaka University, Yamada-kami Suita Osaka 565)

体の場合を Roy<sup>5)</sup> が導いているが、後者の場合数式に誤りが多く、検討も不十分であるので、これらの点に関しても訂正補足を行なった。

なお非圧縮性流体についての解析を行なったので、静止物体のまわりで流体が振動する場合にも適用できることになる。したがって主流が存在する場合には、その流速は音速に比べて十分小さい場合に限定されることになる。

2.1 基礎式

Fig. 1 に示した物体のまわりの粘性非圧縮性非定常流れの基礎式は、 $u, v$  をそれぞれ  $x, y$  方向の速度成分とすると、物体近傍の境界層内部においては<sup>6)</sup>

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots\dots (1)$$

$$\partial(ur)/\partial x + \partial(vr)/\partial y = 0 \dots\dots (2)$$

また境界層外部においては

$$-(1/\rho) \partial p / \partial x = \partial U / \partial t + U \partial U / \partial x \dots\dots (3)$$

となり、境界層外縁で圧力が等しいことから (1) 式は (3) 式を代入して

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots\dots (4)$$

と表わせる。境界条件は

$$y=0 : u=v=0, \quad y=\infty : u=U \dots\dots (5)$$

であり、 $\omega$  を角周波数として境界層外部のポテンシャル流れをつぎのようにおく。

$$U(x, t) = U_0(x) e^{i\omega t} \dots\dots (6)$$

いま流れ関数  $\psi$  として次式

$$u = (1/r) \partial \psi / \partial y, \quad v = -(1/r) \partial \psi / \partial x \dots\dots (7)$$

を採用する。ただし Fig. 1(a) に示した面对称な奥行無限長の物体の場合には  $r=1$  としておけばよい。

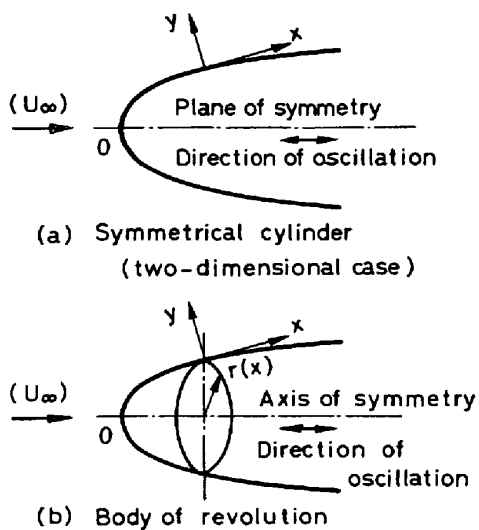


Fig. 1. System of co-ordinates.

2.2 速度の近似解の誘導

(4) 式はそのままでは解けないが、微小振動する流れでは

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t) &= u_1(x, y, t) + u_2(x, y, t) \\ v(x, y, t) &= v_1(x, y, t) + v_2(x, y, t) \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)$$

ただし

$$\partial u_1 / \partial t - \nu \partial^2 u_1 / \partial y^2 = \partial U / \partial t \dots\dots (9)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = U \frac{\partial U}{\partial x} - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \dots\dots (10)$$

と近似すると解析的に解ける。ここで境界条件はつぎのようになる。

$$y=0 : u_1=v_1=u_2=v_2=0, \quad y=\infty : u_1=U \dots\dots (11)$$

いま無次元座標を  $\eta = y\sqrt{\omega/\nu}$  ととり、(9) 式右辺の形から流れ関数の第 1 近似  $\psi_1$  をつぎのように仮定する。

$$\psi_1(x, y, t) = \sqrt{\nu/\omega} U_0(x) r \zeta_1(\eta) e^{i\omega t} \dots\dots (12)$$

なお (7) 式の関係より次式が得られる。

$$u_1 = U_0(x) \zeta_1'(\eta) e^{i\omega t} \dots\dots (13)$$

$$v_1 = -\sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \left\{ \frac{dU_0}{dx} + \frac{U_0}{r} \frac{dr}{dx} \right\} \zeta_1(\eta) e^{i\omega t} \dots\dots (14)$$

ここでプライムは  $\eta$  に関する微分を表わす (6), (13) 式を (9) 式に代入すると

$$i\zeta_1' - \zeta_1'' = i \dots\dots (15)$$

となり、境界条件は

$$\eta=0 : \zeta_1 = \zeta_1' = 0, \quad \eta=\infty : \zeta_1 = 1 \dots\dots (16)$$

であるからつぎのような解を得る。

$$\zeta_1 = -\frac{1-i}{\sqrt{2}} + \eta + \frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{-(1+i)\eta/\sqrt{2}} \dots\dots (17)$$

つぎに (10) 式右辺の形から流れ関数の第 2 近似  $\psi_2$  をつぎのように仮定する。

$$\begin{aligned} \psi_2(x, y, t) &= \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} U_0 \frac{dU_0}{dx} \frac{r}{\omega} \{ \zeta_{2a}(\eta) e^{2i\omega t} + \zeta_{2b}(\eta) \} \\ &+ \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \frac{U_0^2}{\omega} \frac{dr}{dx} \{ \zeta_{2c}(\eta) e^{2i\omega t} + \zeta_{2d}(\eta) \} \dots\dots (18) \end{aligned}$$

したがって  $u_2, v_2$  はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{U_0}{\omega} \frac{dU_0}{dx} (\zeta_{2a}' e^{2i\omega t} + \zeta_{2b}') \\ &+ \frac{U_0^2}{\omega r} \frac{dr}{dx} (\zeta_{2c}' e^{2i\omega t} + \zeta_{2d}') \dots\dots (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 &= -\frac{1}{r} \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \left\{ \left( \frac{dU_0}{dx} \right)^2 \frac{r}{\omega} + U_0 \frac{d^2 U_0}{dx^2} \frac{r}{\omega} \right. \\ &+ \left. \frac{U_0}{\omega} \frac{dU_0}{dx} \frac{dr}{dx} \right\} (\zeta_{2a} e^{2i\omega t} + \zeta_{2b}) \\ &- \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \left( \frac{2U_0}{\omega} \frac{dU_0}{dx} \frac{dr}{dx} + \frac{U_0^2}{\omega} \frac{d^2 r}{dx^2} \right) (\zeta_{2c} e^{2i\omega t} + \zeta_{2d}) \dots\dots (20) \end{aligned}$$

いま  $U, u_1, v_1, u_2$  について実部をとり、これらを(10)式に代入すると次式を得る。

$$2i\zeta_{2a} - \zeta_{2a}'' = (1 - \zeta_1^2 + \zeta_1 \zeta_1')/2 \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\zeta_{2b}'' = -1/2 + \zeta_1 \zeta_1'/2 - (\zeta_1 \zeta_1' + \bar{\zeta}_1 \zeta_1'')/4 \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$2i\zeta_{2c} - \zeta_{2c}'' = \zeta_1 \zeta_1'/2 \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\zeta_{2d}'' = -(\zeta_1 \bar{\zeta}_1' + \bar{\zeta}_1 \zeta_1'')/4 \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで $\bar{\phantom{x}}$ は共役複素数であり、境界条件はつぎのようにとる<sup>4)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0 : \zeta_{2n} = \zeta_{2n}' = 0 \quad (n = a, b, c, d) \\ \eta = \infty : \zeta_{2a} = \zeta_{2c} = 0, \zeta_{2b}' = \text{有限}, \zeta_{2d}' = \text{有限} \end{aligned} \right\} \dots\dots (25)$$

そこでつぎのような解を得る。

$$\zeta_{2a} = \frac{1+i}{4} e^{-(1+i)\eta} + \frac{i}{2} \eta e^{-(1+i)\eta/\sqrt{2}} - \frac{1+i}{4} \dots\dots (26)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{2b} = & -\frac{1}{4\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}\eta} - \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-\eta/\sqrt{2}} \cos \frac{\eta}{\sqrt{2}} \\ & - \sqrt{2} e^{-\eta/\sqrt{2}} \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{2} e^{-\eta/\sqrt{2}} \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} \\ & - \frac{3}{4} \eta + \frac{13}{4\sqrt{2}} \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{2c} = & -\frac{1+i}{8\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}(1+i)\eta} + \frac{7}{8} (1+i) e^{-(1+i)\eta} \\ & - \frac{1+i}{\sqrt{2}} e^{-(1+i)\eta/\sqrt{2}} + \frac{i}{2} \eta e^{-(1+i)\eta/\sqrt{2}} \\ & - \frac{(7\sqrt{2}-9)(1+i)}{8\sqrt{2}} \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{2d} = & -\sqrt{2} e^{-\eta/\sqrt{2}} \cos \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\eta/\sqrt{2}} \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} \\ & - \frac{\eta}{2} e^{-\eta/\sqrt{2}} \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{2} + \sqrt{2} \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

したがって、これらの第2近似の解からつぎのような定常二次流れ (secondary flow) が生じることがわかる。

$$\begin{aligned} (u_{1a})_{y=\infty} &= (u_{2,ta})_{y=\infty} \\ &= \frac{U_0}{\omega} \frac{dU_0}{dx} (\zeta_{2b}')_{\eta=\infty} + \frac{U_0^2}{\omega r} \frac{dr}{dx} (\zeta_{2d}')_{\eta=\infty} \\ &= -\frac{3}{4} \frac{U_0}{\omega} \frac{dU_0}{dx} - \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{\omega r} \frac{dr}{dx} \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

ここで添字  $ta$  は時間平均値を表わす。またつぎの関係も得られる。

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u_{1a}}{\partial y} \right)_{y=0} &= \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \frac{U_0}{\omega} \frac{dU_0}{dx} (\zeta_{2b}'')_{\eta=0} \\ &+ \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \frac{U_0^2}{\omega r} (\zeta_{2d}'')_{\eta=0} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \frac{U_0}{\omega} \frac{dU_0}{dx} \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

ところで(8)式において第3近似の速度成分  $u_3, v_3$  まで考えると、(4)式から逐次近似式として次式

$$\begin{aligned} \partial u_3 / \partial t - \nu \partial^2 u_3 / \partial y^2 &= -u_1 \partial u_2 / \partial x - u_2 \partial u_1 / \partial x \\ -v_1 \partial u_2 / \partial y - v_2 \partial u_1 / \partial y \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

が得られ、上式右辺の形から流れ関数の第3近似  $\psi_3$  は  $e^{i\omega t}$  と  $e^{3i\omega t}$  の項から成ることになる。したがって、物質移動過程に直接関係する定常二次流れには、第3近似の項は影響を及ぼさないことがわかる。なお二次元物体の場合については、SHAH<sup>7)</sup> がこの解を求めており、第3近似まで考慮すると物体のまわりの変動速度の値はわずかに異なってくるが本質的な差はないことを示している。

2.3 円柱および球のまわりの二次流れ

2.3.1 円柱の場合

この場合のポテンシャル流れの振幅は、振動の振幅を  $a$  とすると

$$U_0(x) = 2a\omega \sin(x/r_0) \dots\dots\dots (33)$$

と表わされる<sup>6)</sup>ので、流れ関数の時間平均値はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \psi_{1a} = \psi_{2,ta} &= \sqrt{\nu/\omega} (U_0/\omega) (dU_0/dx) \zeta_{2b} \\ &= 4\sqrt{\nu\omega} \frac{a^2}{r_0} \sin \frac{x}{r_0} \cos \frac{x}{r_0} \zeta_{2b} \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

Fig. 1(a) の場合の例として円柱のまわりの二次流れを Fig. 2 に示したが、逆方向の二種類の定常流れが見られる。また(34)式、Fig. 2 より  $\theta = x/r_0$  が  $90^\circ$  および  $45^\circ$  に関して対称であることがわかる。なお円柱の場合の本解析結果 [(26), (27)式] は SCHLICHTING<sup>4)</sup> の解析結果とまったく同一であるが、Fig. 2 の流線図では無次元化して一般的に示してある。このような二次流れの測定例としては、SCHLICHTING<sup>4)</sup>、HOLTSMARK<sup>8)</sup>、BERTELSEN<sup>9)</sup> の報告があり、Fig. 2 のような流れの生ずることが知られている。

HOLTSMARK<sup>8)</sup> はより厳密な解析として Navier-

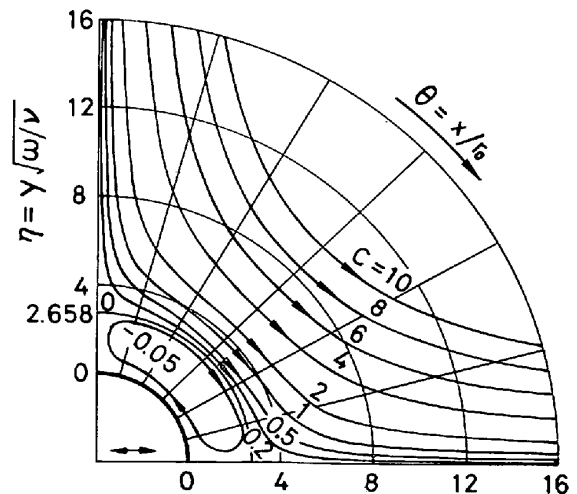


Fig. 2. Pattern of streamlines of the steady secondary motion around an oscillating circular cylinder.  $C = r_0 \psi_{1a} / (a^2 \sqrt{\nu\omega}) = 2\zeta_{2b}(\eta) \sin 2\theta$

Stokes の運動方程式から出発して、逐次近似法を用いて近似解を求め、この結果が SCHLICHTING<sup>4)</sup> の解析結果よりも実測値とよく一致することを示している。ほかに、円柱などの二次元物体のまわりの変動流れについて多くの詳細な研究<sup>7)9)~11)</sup>が行なわれているが、物質移動過程の解析に適した簡潔な解析解として、ここで示した近似解を用いることにする。

2.3.2 球の場合

この場合

$$U_0(x) = \frac{3}{2} a\omega \sin \frac{x}{r_0}, \quad r(x) = r_0 \sin \frac{x}{r_0} \quad \dots (35)$$

と表わされる<sup>6)</sup>ので、流れ関数の時間平均値はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \phi_{ta} &= \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} U_0 \frac{dU_0}{dx} \frac{r}{\omega} \zeta_{2b} + \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \frac{U_0^2}{\omega} \frac{dr}{dx} \zeta_{2d} \\ &= \frac{9}{4} a^2 \sqrt{\nu \omega} \sin^2 \frac{x}{r_0} \cos \frac{x}{r_0} (\zeta_{2b} + \zeta_{2d}) \dots (36) \end{aligned}$$

Fig. 1 (b) の場合の例として球のまわりの二次流れを Fig. 3 に示す。(36)式, Fig. 3 より  $\theta=90^\circ$  に関しては対称であるが、円柱の場合とは異なり  $\theta=45^\circ$  に関しては対称ではない。遠藤ら<sup>12)</sup>は、球の場合にもこのような二次流れが生じることを観察している。

なお球などの回転対称物体のまわりの変動流れについてのかかなり厳密な理論解析は YEH ら<sup>13)</sup>, RILEY<sup>14)</sup> らが行なっているが、先に述べた理由から、ここで示した近似解を物質移動過程の解析に用いることにする。

3. 円柱および球からの物質移動

円柱<sup>6)</sup>, 球<sup>6)15)</sup> などの物体のまわりの定常流れの速度

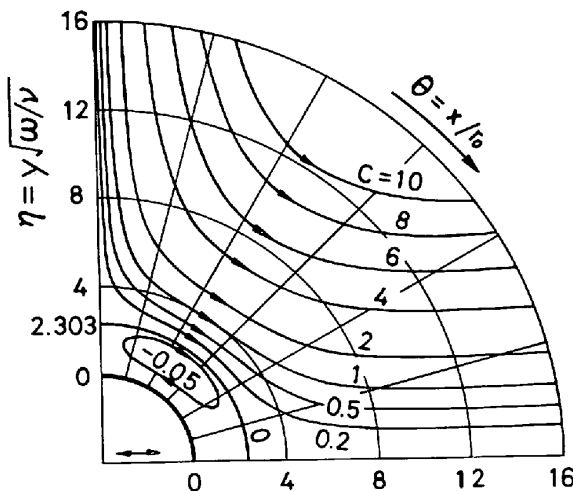


Fig. 3. Pattern of streamlines of the steady secondary motion around an oscillating sphere.

$$C = \phi_{ta} / (a^2 \sqrt{\nu \omega}) = (9/4) [\zeta_{2b}(\eta) + \zeta_{2d}(\eta)] \sin^2 \theta \cos \theta$$

の解は Blasius 級数を拡張した形で導かれており、また微小・調和振動する流れの場合については2章で述べたとおりである。そこで、これらの結果と、JAMESON<sup>16)</sup> らが微小・調和振動する円柱からの物質移動を求めた解析方法とを用いて、定常、変動および脈動流れにおける円柱と球からの局所ならびに総括物質移動係数を、すべて一貫した解析法のもとに導いた。以下においては、まず3.1節で、球が静止流体中で微小・調和振動する場合について詳しく述べ、他の場合については3.2節において、この解析内容と異なる部分を簡単に述べることにする。

3.1 微小・調和振動する球からの物質移動

2章で示したとおり円柱や球などの物体が微小・調和振動する場合、そのまわりに定常な二次流れが生じるが、このような流れによる物質移動はシュミット数が  $Sc \equiv \nu/D \gg 1$  時、近似的に次式に従う<sup>16)</sup>。

$$u_{ta} \partial C / \partial x = D \partial^2 C / \partial y^2 \dots (37)$$

また境界条件はつぎのようになる。

$$x=0 \text{ または } y=\infty : C=0, \quad y=0 : C=C_0 \quad \dots (38)$$

(37)式に  $x=r_0\theta$  の関係を用い、流線に沿う物質収支をとると次式を得る。

$$u_{ta} (\partial C / \partial \theta)_{\phi} = r_0 D (\partial^2 C / \partial y^2)_{\theta} \dots (39)$$

いま濃度境界層が速度境界層よりもうすい場合 ( $Sc \gg 1$ ) を考えているので、濃度境界層内の速度分布を直線近似して

$$u_{ta} = \beta y, \quad \beta = (\partial u_{ta} / \partial y)_{y=0} \dots (40)$$

とおくと、 $\beta$  は(31)式と(35)式から

$$\beta = 9a^2 \omega^{3/2} \sin 2\theta / (2^{9/2} r_0 \nu^{1/2}) \dots (41)$$

となり、流れ関数は(7)式と(40)式から

$$\phi = \int_0^y u_{ta} r dy = \frac{1}{2} \beta r_0 y^2 \sin \theta \dots (42)$$

となる。

いますべての物質移動の行なわれる仮想の境界層厚さを  $\Delta$  とすると

$$\phi_{\Delta} = (1/2) \beta r_0 \Delta^2 \sin \theta, \quad \phi = \phi_{\Delta} Y^2, \quad Y = y/\Delta \quad \dots (43)$$

となるので  $\phi = \text{const.}$  ならば  $Y$  も一定となつて(39)式はつぎのように書ける。

$$Y (\partial C / \partial \theta)_{\phi} = [r_0 D / (\beta \Delta^3)] (\partial^2 C / \partial Y^2)_{\theta} \dots (44)$$

ここで

$$d\phi(\theta) / d\theta = r_0 \{ \beta(\theta) [\Delta(\theta)]^3 \} \dots (45)$$

とおくと(44)式はつぎのように変形できる<sup>16)</sup>。

$$Y (\partial C / \partial \phi)_{\phi} = D (\partial^2 C / \partial Y^2)_{\phi} \quad \dots (46)$$

さらに変数  $s = Y/\phi^{1/3}$  を導入すると上式はつぎの常微分方程式に

$$d^2 C / ds^2 + [s^2 / (3D)] dC / ds = 0 \quad \dots (47)$$

境界条件(38)は

$$s=0 : C=C_0, \quad s=\infty : C=0 \dots\dots\dots(48)$$

となつて簡単に解が得られる。その結果次式を得る。

$$\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1}{\phi^{1/3} \Delta} \left(\frac{dC}{ds}\right)_{s=0} = -\frac{C_0}{\Gamma(1/3) \Delta} \left(\frac{3}{\phi D}\right)^{1/3} \dots\dots\dots(49)$$

局所物質移動係数は(43), (45), (49)式を用いてつぎのようになる。

$$k_{f\theta} = -(D/C_0) (\partial C/\partial y)_{y=0} \\ = \frac{3^{1/3}}{\Gamma(1/3)} \frac{D^{2/3}}{r_0^{1/3}} \beta^{1/2} \sin^{1/2} \theta \left[ \int_0^\theta \beta^{1/2} \sin^{3/2} \theta d\theta \right]^{-1/3} \dots\dots\dots(50)$$

したがつて局所シャーウッド数はつぎのように表わせる。

$$Sh_\theta \equiv \frac{3G(\theta) Sc^{1/3}}{\sqrt{2} \Gamma(1/3)} \left(\frac{r_0 a \omega}{\nu}\right)^{1/2} \left(\frac{a}{r_0}\right)^{1/6} \dots\dots(51)$$

ただし

$$G(\theta) = (\sin 2\theta \sin \theta)^{1/2} \left[ \int_0^\theta \sin^{1/2} 2\theta \sin^{3/2} \theta d\theta \right]^{-1/3} \dots\dots\dots(52)$$

総括物質移動係数は  $k_{f\theta}$  との間に

$$k_f = \int_0^{\pi/2} 2\pi r_0^2 k_{f\theta} \sin \theta d\theta / \int_0^{\pi/2} 2\pi r_0^2 \sin \theta d\theta \dots\dots(53)$$

の関係があるので総括シャーウッド数はつぎのようになる。

$$Sh = \frac{3I Sc^{1/3}}{\sqrt{2} \Gamma(1/3)} \left(\frac{r_0 a \omega}{\nu}\right)^{1/2} \left(\frac{a}{r_0}\right)^{1/6} \dots\dots\dots(54)$$

ここで

$$I = \int_0^{\pi/2} G(\theta) \sin \theta d\theta \dots\dots\dots(55)$$

### 3.2 解析結果のまとめ

主流の定常速度を  $U_\infty$  とすると, (40)式の  $\beta$  は添記した各場に対してつぎのように表わせる。

定常流れ

$$\beta = \begin{cases} f_c(\theta) \sqrt{2U_\infty^3 / (r_0 \nu)} & (\text{円柱})^{6)} \\ f_s(\theta) \sqrt{3U_\infty^3 / (r_0 \nu)} & (\text{球})^{16)} \end{cases} \dots\dots(56)$$

変動流れ

$$\beta = a^2 \omega^{3/2} \sin 2\theta / (r_0 \sqrt{2\nu}) \quad (\text{円柱}) \dots\dots\dots(57)$$

脈動流れ

$$\beta = \begin{cases} f_c(\theta) \sqrt{2U_\infty^3 / (r_0 \nu)} \\ \quad + a^2 \omega^{3/2} \sin 2\theta / (r_0 \sqrt{2\nu}) & (\text{円柱}) \\ f_s(\theta) \sqrt{3U_\infty^3 / (r_0 \nu)} \\ \quad + 9a^2 \omega^{3/2} \sin 2\theta / (2^{9/2} r_0 \nu^{1/2}) & (\text{球}) \end{cases} \dots\dots(58)$$

ただし脈動流れの場合, 定常流れと変動流れの重ね合わせによつて(58)式のように表わせるものと考えた。上の式の中で  $f_c(\theta)$ ,  $f_s(\theta)$  は, 前岐点からはく離点までの

範囲の物体のまわりの定常流れに対して境界層理論より導かれた関数で, (64)式に示してある。さて上記の各場合に対して, 3.1 節に示した解析方法が同じように適用できるが, (55)式の積分範囲は, 変動流れ以外の場合には注意を要する。すなわち定常流れの場合, はく離点  $\theta_s$  から  $\theta = \pi$  までは死水域で流れがないものとして取り扱い, 脈動流れの場合には, (58)式において  $\beta = 0$  となる点  $\theta = \theta'_s$  (脈動流れの場合の時間平均のはく離点) が存在するため, 積分範囲を

$$0 \leq \theta \leq \theta'_s, \quad \theta'_s \leq \theta \leq \theta_s, \quad \theta_s \leq \theta \leq \pi$$

に分けて実施しなければならない。

けつきよく, 円柱と球の定常, 変動および脈動流れの場合について整理すると, つぎのようになる

定常・脈動流れ

$$\left. \begin{aligned} Sh_\theta \\ Sh \end{aligned} \right\} = C_1 \left\{ \begin{aligned} G(\theta) \\ I(\theta_1) / J(\theta_2) \end{aligned} \right\} Sc^{1/3} Re_p^{1/2}, \\ C_1 = \begin{cases} 3^{1/3} 2^{2/3} / \Gamma(1/3) & (\text{円柱}) \\ \sqrt{6} / \Gamma(1/3) & (\text{球}) \end{cases} \dots\dots\dots(59)$$

変動流れ

$$\left. \begin{aligned} Sh_\theta \\ Sh \end{aligned} \right\} = C_2 \left\{ \begin{aligned} G(\theta) \\ I(\theta_1) / J(\theta_2) \end{aligned} \right\} Sc^{1/3} \left(\frac{r_0 a \omega}{\nu}\right)^{1/2} \left(\frac{a}{r_0}\right)^{1/6}, \\ C_2 = \begin{cases} 3^{1/3} 2^{5/6} / \Gamma(1/3) & (\text{円柱}) \\ 3 / [\sqrt{2} \Gamma(1/3)] & (\text{球}) \end{cases} \dots\dots\dots(60)$$

$$J(\theta_2) = \begin{cases} \int_0^{\theta_2} \sin \theta d\theta & (\text{円柱}) \\ \int_0^{\theta_2} \sin \theta d\theta & (\text{球}) \end{cases} \dots\dots\dots(61)$$

ここで局所分布を与える関数  $G(\theta)$  は

$$G(\theta) = \begin{cases} F(\theta)^{1/2} \left[ \int_0^\theta F(\theta)^{1/2} d\theta \right]^{-1/3} & (\text{円柱}) \\ [F(\theta) \sin \theta]^{1/2} \left[ \int_0^\theta F(\theta)^{1/2} \sin^{3/2} \theta d\theta \right]^{-1/3} & (\text{球}) \end{cases} \dots\dots\dots(62)$$

また総括値  $Sh$  を与える積分  $I(\theta_1)$  は

$$I(\theta_1) = \begin{cases} \int_0^{\theta_1} G(\theta) d\theta & (\text{円柱}) \\ \int_0^{\theta_1} G(\theta) \sin \theta d\theta & (\text{球}) \end{cases} \dots\dots\dots(63)$$

である。ただし

定常流れ

$$F(\theta) = \begin{cases} f_c(\theta) = 2.4652\theta - 0.9659\theta^3 + 0.1032\theta^5 \\ \quad - 0.00647\theta^7 + 0.0000154\theta^9 \\ \quad - 0.0000407\theta^{11} + \dots & (\text{円柱})^{6)} \\ f_s(\theta) = 1.3916\theta - 0.5402\theta^3 \\ \quad + 0.0585\theta^5 - 0.00363\theta^7 + \dots & (\text{球})^{16)} \end{cases} \dots\dots(64)$$

$$\theta_2 = \pi, \quad \theta_1 = \theta_s = 108.8^\circ (\text{円柱}), 109.6^\circ (\text{球})$$

変動流れ

$$F(\theta) = \sin 2\theta, \theta_1 = \theta_2 = \pi/2 (\text{円柱}, \text{球}) \dots\dots(65)$$

脈動流れ

$$F(\theta) = \begin{cases} f_c(\theta) + (z/2) \sin 2\theta & (\text{円柱}) \\ f_s(\theta) + (3\sqrt{6}/32) z \sin 2\theta & (\text{球}) \end{cases} \dots\dots(66)$$

$$z = (a\omega/U_\infty)^{3/2} (a/r_0)^{1/2}$$

この無次元変数  $z$  の第1項  $(a\omega/U_\infty)$  は変動流れの代表速度  $a\omega$  と定常流れのそれ  $U_\infty$  の比, 第2項  $(a/r_0)$  は無次元振幅である. 北浦ら<sup>3)</sup> は半理論的な考察から振動示数 (変動圧力と粘性力の比を北浦らはこのように呼んだ) に比例する項として  $(a\omega/U_\infty)^2$  を, 無次元の境界層厚みに比例する項として  $\sqrt{U_\infty/(r_0\omega)}$  を導き, 両者の積を半理論的な実験式の中へと導入しているが, この積は上記  $z$  と一致する.

なお球の場合には, 流体が静止している時  $Sh=2$  であり, 流れとは独立であるのでシャーウッド数にこの値が加わる<sup>17)</sup>.

3.3 計算結果と考察

前節の解析結果に基づいて, 定常, 変動および脈動流れにおける円柱と球からの局所ならびに総括物質移動係数を求めた. (62)式および(63)式の積分は  $0.5^\circ$  きざみでシン普森の公式によつて数値計算したが, たとえばあとの(70)式に示してある変動流れにおける円柱の場合の係数 1.03 は, 本計算ではくわしくは 1.033 となり, JAMESON<sup>(16)(18)</sup> がベータ関数を用いて解析的に求めた値 1.032 とよく一致したことから, 精度は十分であると思われる.

3.3.1 局所物質移動分布

定常, 変動および脈動流れの場合の球面上の局所的な物質移動分布の計算例をFig. 4に示す. 上半球 ( $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ) では脈動流れにおける  $Sh_\theta$  は他の場合よりも大きい, 三者とも前岐点 ( $\theta = 0^\circ$ ) で最大値をとり,  $\theta$

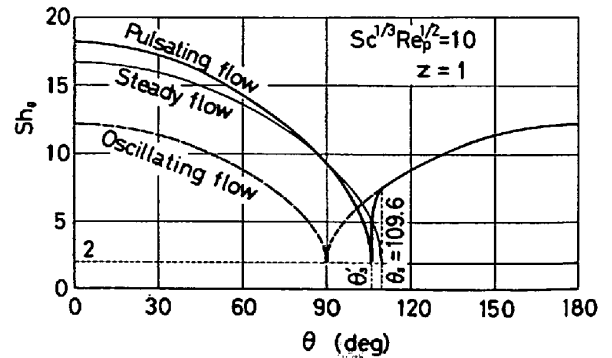


Fig. 4. Local variation of mass transfer around a sphere under steady, oscillating and pulsating flow.

が大きくなるにつれてなだらかに減少している. 定常, 変動および脈動流れにおける  $Sh_\theta$  はそれぞれ  $\theta = \theta_s, 90^\circ$  および  $\theta'_s (90^\circ < \theta'_s < \theta_s = 109.6^\circ$  の範囲にあり,  $z$  に依存する) において最小値  $Sh_\theta = 2$  をとる.  $\theta_s$  より  $\theta$  が大きくなると, 変動流れと脈動流れにおける  $Sh_\theta$  は, 全く同じ値をとりながらしだいに大きくなつて  $\theta = 180^\circ$  で極大となるが, 定常流れの場合には一定値  $Sh_\theta = 2$  をとる. なお円柱の場合にも, はく離点の位置が  $\theta_s = 108.8^\circ$ , 最小値が  $Sh_\theta = 0$  となることを除けば, 球の場合と同様な傾向をもつ分布が得られる.

このような局所物質移動分布の測定例としては, 定常流れにおいては, 円柱の場合 LEWIS ら<sup>19)(6)</sup>, 球の場合 FRÖSSLING<sup>20)</sup>, LINTON ら<sup>21)</sup>, GIBERT ら<sup>22)</sup>, 脈動流れにおいては円柱の場合小保方ら<sup>23)</sup>, LÉBOUCHE ら<sup>24)</sup> の報告があり, Fig. 4 の分布と定性的には一致している. ただ

Table 1. Summary of heat and mass transfer from a circular cylinder in steady flow.

Author	Year	Remarks	Formulae	Applicable range
ULSAMER <sup>27)</sup>	1932	Heat-transfer experiments	$Nu = 0.91 Pr^{0.31} Re_p^{0.385}$	$0.1 \leq Re_p \leq 50$
			$Nu = 0.60 Pr^{0.31} Re_p^{0.5}$	$50 \leq Re_p \leq 10^4$
KRAMERS <sup>28)</sup>	1946	Heat-transfer experiments reported previously <sup>27)</sup>	$Nu = 0.42 Pr^{0.20} + 0.57 Pr^{0.33} Re_p^{0.50}$	$0.1 \leq Re_p \leq 10^4, 0.7 < Pr < 530$
DOUGLAS & CHURCHILL <sup>29)</sup>	1956	Heat-transfer experiments reported previously	$Nu = 0.46 Re_p^{1/2} + 0.00128 Re_p$	$Re_p \geq 500, Pr = 0.72$
FRIEDLANDER <sup>30)</sup>	1957	Analysis based on boundary-layer theory	$Sh = 0.557 Sc^{1/3} Re_p^{1/3}$	$Re_p \approx 0.1, Sc \gg 1$
KISER & HOELSCHER <sup>31)</sup>	1957	Mass-transfer experiments	$Sh = 0.211 Sc^{1/3} Re_p^{0.57}$	$5\,000 < Re_p < 70\,000$
GRAFTON <sup>25)</sup>	1963	Analysis based on boundary-layer theory	$Sh = 0.90 Sc^{1/3} Re_p^{1/2}$	$Re_p < 6 \times 10^6, Sc \gg 1$
RICHARDSON <sup>32)</sup>	1963	Heat-transfer experiments reported previously	$Nu = 0.46 Re_p^{1/2} + 0.0705 Re_p^{2/3}$	$10^2 \leq Re_p \leq 10^5, Pr = 0.72$

$Nu, Pr$ : Nusselt and Prandtl-number for heat transfer corresponding to  $Sh$  and  $Sc$  for mass transfer, respectively.

Table 2. Summary of heat and mass transfer from a circular cylinder in oscillating flow.

Author	Year	Remarks	Formulae	Applicable range
DEAVER, et al. 33)	1962	Heat-transfer experiments (vibrating cylinder)	$Nu = 0.35Pr^{0.3} + 0.38Pr^{0.3} \left( \frac{r_0 a \omega}{\nu} \right)^{0.52}$	$0.27 \leq f \leq 4.4 \text{ Hz}$ , $0.25 \leq a \leq 7.0 \text{ cm}$ $Pr = 7.2$
JAMESON <sup>16)</sup>	1964	Analysis based on boundary-layer theory	$Sh = 1.03Sc^{1/3} \left( \frac{r_0 a \omega}{\nu} \right)^{1/2} \left( \frac{a}{r_0} \right)^{1/6}$	$a/r_0 \ll 1, Sc \gg 1$
RICHARDSON <sup>34)</sup>	1967	Analysis based on boundary-layer theory	$Nu = 1.76Pr^{1/2} (a^2 \omega / \nu)^{1/2} / \{1 + 0.83(a/r_0) Pr^{1/2}\}$	$Pr \ll 1$
			$Nu = 1.62Pr^{1/3} \left( \frac{r_0 a \omega}{\nu} \right)^{1/2} \left( \frac{a}{r_0} \right)^{1/6}$	$Pr \gg 1$
			$Nu = 0.969Pr^{1/3} \left( \frac{r_0 a \omega}{\nu} \right)^{1/2} \left( \frac{a}{r_0} \right)^{1/6}$	$Pr \approx 1$
SUGANO & RATKOWSKY <sup>18)</sup>	1968	Mass-transfer experiments (vibrating cylinder)	$Sh = 1.03Sc^{1/3} \left( \frac{r_0 a \omega}{\nu} \right)^{1/2} \left( \frac{a}{r_0} \right)^{1/6}$ or $Sh = 0.276Sc^{1/3} \left( \frac{r_0 a \omega}{\nu} \right)^{0.633} \left( \frac{a}{r_0} \right)^{0.243}$	$1.6 \leq f \leq 116 \text{ Hz}$ $0.2 \leq a/r_0 \leq 5.7$ $1.9 \leq Sc \leq 3.23 \times 10^7$
DAVIDSON <sup>35)</sup>	973	Method of matched asymptotic expansions and approximate method based on an integrated form of momentum and energy equations	$Nu = 1.76Pr^{1/2} (a^2 \omega / \nu)^{1/2} - 2/\pi$	$a^2 \omega / \nu \ll 1, Pra^2 \omega / \nu \gg 1$
			$Nu = (1.76Pr^{1/2} - 0.26) \left( \frac{a^2 \omega}{\nu} \right)^{1/2}$	$a^2 \omega / \nu \gg 1, Pr \gg 1$
			$Nu = (2.71Pr - 5.51Pr^2) \left( \frac{a^2 \omega}{\nu} \right)^{1/2}$	$a^2 \omega / \nu \gg 1, Pr \ll 1$
			$Nu = \{1.30Pr^{1/3} (r_0/a)^{1/3} - 0.30r_0/a\} (a^2 \omega / \nu)^{1/2}$	$a^2 \omega / \nu \approx 1, Pr(a/r_0)^2 \gg 1$

Table 3. Summary of heat and mass transfer from a sphere in oscillating flow.

$$Sh = B_1 + B_2 Sc^{1/3} (r_0 a \omega / \nu)^{1/2}$$

Author	Year	Remarks	$B_1$	$B_2$	Applicable range
NOORDSIJ & ROTTE <sup>36)</sup>	1967	Mass-transfer experiments (vibrating sphere in a fluid at rest)	2	0.135	$2.5 \leq f \leq 35 \text{ Hz}$ , $500 < Sc < 2000$ $0.075 \leq a \leq 0.1575 \text{ cm}$
MORI, et al. <sup>37)</sup>	1969	Analysis and heat- and mass-transfer experiments (under pulsating flow)	2	0.595	$23 \leq f \leq 70 \text{ Hz}$ , $ u_{os}  < 6 \text{ m/sec}$ $u > 3 \text{ m/sec}$ , $0.6 < Sc(Pr) < 1.6$
KITaura, et al. <sup>3)</sup>	1969	Analysis based on boundary-layer theory and mass-transfer experiments (vibrating sphere in steady flow)	0	$0.53(a/r_0)^{1/6}$	$1 \leq f \leq 11 \text{ Hz}$ , $1 \leq a \leq 4 \text{ cm}$ $40 < Re_p < 300$ , $Sc = 2.85$
HARA, et al. <sup>38)</sup>	1971	Mass-transfer experiments (under ultrasonic wave)	0	$10.1(a/r_0)^{1/6}$	$2 \times 10^5 \leq f \leq 2 \times 10^6 \text{ Hz}$

$|u_{os}|$ : Magnitude of oscillating velocity

これらの測定結果では、定常流れの場合、レイノルズ数  $Re_p$  が大きくなると死水域内の流れがある程度大きくなって、物質移動量も  $Sh_\theta = 0$  または 2 よりは大きくなっていく。このような傾向は、球の場合については GRAFTON<sup>25)</sup>, IHMEら<sup>26)</sup> の理論解析から得られた分布図にも認められる。また  $Re_p$  が大きくなると、はく離点ある

いは物質移動最小点の位置が前岐点側へ移動するが、このような傾向についても本解析の結果では表わせず、したがって本解析の適用範囲は原則としては比較的低いレイノルズ数域に限定されることになる。

### 3.3.2 総括物質移動

#### (1) 定常流れの場合

(59), (61)~(64)式より定常流れの場合の総括物質移動を表わす式はつぎのようになった。

$$Sh = \begin{cases} 0.615Sc^{1/3}Re_p^{1/2} & \text{(円柱).....(67)} \\ 2 + 0.654Sc^{1/3}Re_p^{1/2} & \text{(球).....(68)} \end{cases}$$

円柱の場合の従来のおもな解析結果, および実験結果を Table 1 に示したが, (67)式と同じような形に整理した報告が多数見受けられる。その中で GRAFTON<sup>25)</sup> の解析結果とは係数が異なり, ULSAMER<sup>27)</sup> の高レイノルズ数における実験結果とは係数と Sc 数の指数とがわずかに異なる程度であるので, 本解析結果は, 種々の仮定に立った近似的な取り扱いにもかかわらず, かなり満足のいくものであると考えられる。

球の場合, 前報<sup>2)</sup> で従来の式

$$Sh = 2 + ASc^{1/3}Re_p^{1/2} \dots\dots\dots(69)$$

における A の値を, 実験の際の  $Re_p$  の範囲について整理して, 全体的には  $Re_p$  値とともに増大する傾向が認められるが, 中程度の  $Re_p$  値 ( $0.1 \leq Re_p \leq 2000$ ) では  $A=0.55$  程度が妥当であることを示した。いま理論的に導いた(68)式は(69)式と全く同じ関数形となり, 係数値もある程度近い。ただし離点以降の死水域内では流れがないとしていることや速度成分  $v$  を無視していることから, 物質移動量を低めに評価していると思われるにもかかわらず, 係数値は従来の実験結果よりも大きくなっている。したがって係数値については再度実験的に検討しておく必要があると考えられるが, この点については次報で報告することにする。

(2) 変動流れの場合

(60)~(63), (65)式より変動流れの場合の総括物質移動を表わす式はつぎのようになった。

$$Sh = \begin{cases} 1.03Sc^{1/3}(r_0 a \omega / \nu)^{1/2} (a/r_0)^{1/6} & \text{(円柱).....(70)} \\ 2 + 0.917Sc^{1/3}(r_0 a \omega / \nu)^{1/2} (a/r_0)^{1/6} & \text{(球).....(71)} \end{cases}$$

さて, 以下では, 自然対流の影響が問題とならない条件下 (変動の周波数あるいは振幅が比較的大きい場合) における従来のおもな結果との比較を行なうことにする。まず円柱の場合については Table 2 にまとめたとおりである。前にも述べたとおり JAMESON<sup>16)</sup> の解析結果とは, 途中の積分方法が異なるだけで, 最終結果は全く同一である。SUGANO ら<sup>18)</sup> の実験結果は, JAMESON の式でもよく関係づけられるが, 表中の式のようにも表わせると述べている。RICHARDSON<sup>34)</sup> の  $Pr \geq 1$  における解析結果は, (70)式と関数形が同じであり, 係数値は従来の実験結果と合致するように決定されている。DAVIDSON<sup>35)</sup> のかなり厳密な解析など, 他の研究もいくつか見られるが, 上述の点から一応本解析結果はかなり満足のいくものであると考えられる。

つぎに球の場合については前報<sup>1)</sup> でも一部述べたが,

$$Sh = B_1 + B_2 Sc^{1/3} (r_0 a \omega / \nu)^{1/2} \dots\dots\dots(72)$$

とおくと, Table 3 のように整理できる。  $a\omega \rightarrow 0$  の極限では, 理想的には前にも述べたように  $Sh = B_1 = 2$  となるものと考えられる<sup>17)36)37)</sup> が, 現実には自然対流などの影響も生じうるので  $B_1 = 0$  としてしまっている報告<sup>3)38)</sup> もある。また  $B_2$  については単に定数とするもの<sup>36)37)</sup> と, 無次元振幅の項  $(a/r_0)^{1/6}$  には定数が掛つたもの<sup>3)36)</sup> とがある。前二者<sup>3)</sup> (NOORDSIJ ら<sup>36)</sup>, MORI ら<sup>37)</sup>) と後二者 (北浦ら<sup>3)</sup>, 原ら<sup>38)</sup>) とは上記二点すなわち  $B_1, B_2$  の値の取り扱い方が片手落ちであるが, (71)式は  $B_1, B_2$  ともに厳密な形になつており,  $B_2$  の中の係数値 0.917 は, 種々の仮定に立った近似的な理論から得られた割には, 満足のいく程度の値である。ただ過去の報告数も少ないため, さらに実験的な検討をする必要があると考えられる。

(3) 脈動流れの場合

(66)式に示すとおり脈動流れの場合のシャーウッド数は  $z$  の関数で Fig. 5 に示すようになる。すなわち, 円柱の場合球の場合ともに  $z \rightarrow 0$  では定常流れの場合の関係, (67)および(68)式,  $z \rightarrow \infty$  では変動流れの場合の関係, (70)および(71)式にそれぞれ漸近する。そこで近似式として

$$Sh = \begin{cases} [(0.615)^\kappa + (1.03z^{1/3}/\sqrt{2})^\kappa]^{1/\kappa} Sc^{1/3} Re_p^{1/2} & \text{(円柱).....(73)} \\ 2 + [(0.654)^\kappa + (0.917z^{1/3}/\sqrt{2})^\kappa]^{1/\kappa} Sc^{1/3} Re_p^{1/2} & \text{(球).....(74)} \end{cases}$$

とおき,  $\kappa$  の最適値を検討した。すなわち(73), (74)式

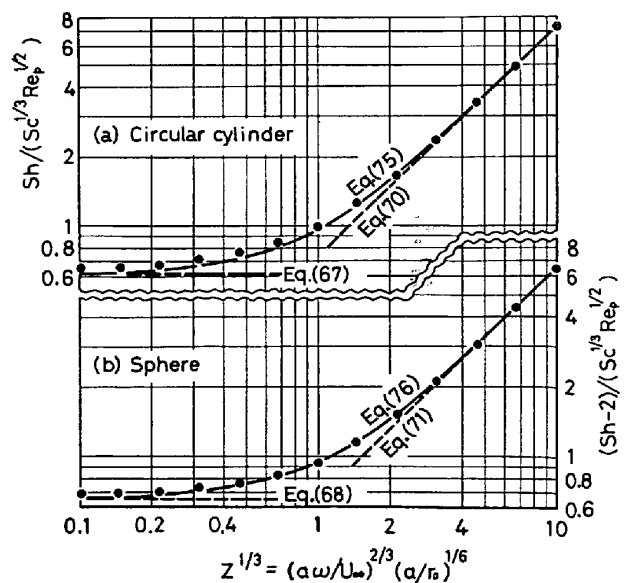


Fig. 5. Overall mass transfer under pulsating flow.



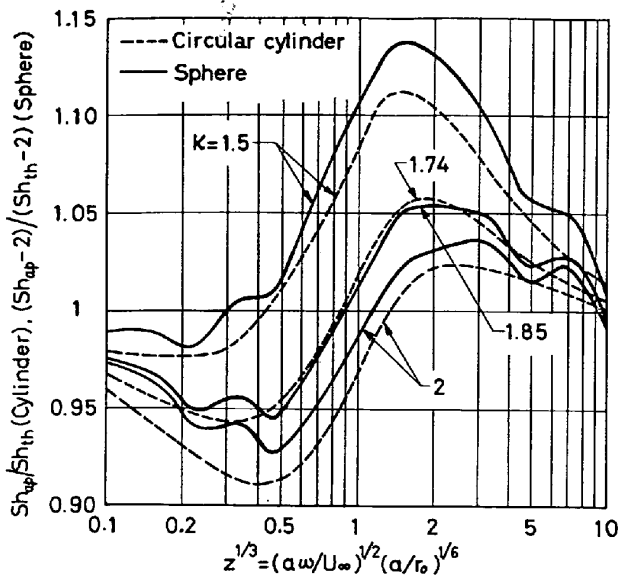


Fig. 6. Comparison of approximate expression for mass transfer under pulsating flow  $Sh_{ap}$  with theoretical value  $Sh_{th}$ .

において  $\kappa$  に種々の値を与えて算出した近似値  $Sh_{ap}$  と (59)式から数値積分により求めた理論値  $Sh_{th}$  との比較を行なうため、円柱の場合  $Sh_{ap}/Sh_{th}$ 、球の場合  $(Sh_{ap}-2)/(Sh_{th}-2)$  を縦軸にとり、 $z^{1/3}$  に対して描くと Fig. 6 のようになる。 $\kappa$  の有効数字三桁までの範囲で調べたところ、図に示したように  $z$  の値によつて近似の程度は異なるが、円柱の場合  $\kappa = 1.74$  球の場合  $\kappa = 1.85$  とすると、 $\pm 5.6\%$  程度の誤差範囲内で理論値を近似できる。したがつて脈動流れの場合には近似式として次式が得られる (Fig. 5 参照)。

$$Sh = \begin{cases} [0.429 + (0.728 z^{1/3})^{1.74}]^{1/1.74} Sc^{1/3} Re_p^{1/2} & \text{(円柱).....(75)} \\ 2 + [0.456 + (0.648 z^{1/3})^{1.85}]^{1/1.85} Sc^{1/3} Re_p^{1/2} & \text{(球).....(76)} \end{cases}$$

従来、主流に乱れがある場合についてはかなり報告<sup>39)</sup> されてきており、熱・物質移動を促進することが確かめられているが、脈動流れを扱った研究は非常に少ない。小保方ら<sup>23)</sup> は円柱のまわりの脈動流れと熱伝達とを数値計算によつてかなり厳密に解析しているが、関係式を導くまでには至っていない。MORI ら<sup>37)</sup> は大振幅の脈動流中の球からの熱・物質移動を理論と実験の両面から解析しており、変動支配域においては Table 3 にすでに示したとおり簡潔な関係式を得ているが、脈動流れにおいては実験的に評価しなければならないパラメータを含む非常に入り組んだ式しか示していない。北浦ら<sup>3)</sup> の式

$$Sh = [(2 + 0.55 Sc^{1/3} Re_p^{1/2})^3 + (0.375 z^{1/3} Sc^{1/3} Re_p^{1/2})^3]^{1/3} \dots\dots\dots (77)$$

については前報<sup>1)</sup> で詳しく述べ、脈動還元反応の解析

に用いたが、定常流中で球が振動する実験から係数値 (0.375) が決定されたことなどから、脈動流れの場合にそのまま適用できるかどうかはまだ十分明らかではない。実験条件ならびに振動支配域  $z \rightarrow \infty$  におけるシャード数は Table 3 に示したとおりである。(76)式と(77)式の形の上での大きな違いは流れがない場合の値“2”の取り扱い方であるが、この点を除けば式の形は全く同じで、定数値 (0.654 と 0.55)、係数値 (0.648 と 0.375) および指数値 (1.85 と 3) が異なるだけである。したがつて定常流れおよび変動流れの場合の結果とも考え合わせると、(76)式はある程度は満足いく結果であるが、さらには実験的な検討をしておく必要があると考えられる。

#### 4. 結 論

(1) 静止流体中で微小・調和振動する物体のまわりの速度の解を境界層理論に基づいて導き、円柱と球の場合の定常な二次流れを図示した (Fig. 2, 3)。

(2) 物質収支の式に、上の結果と定常流れの場合の従来の解析結果とを用いて、定常、変動および脈動流れにおける円柱と球からの局所ならびに総括物質移動を表わす一般式 [(59)~(66)式] を導いた。

(3) 上記一般式の中に含まれる積分を数値計算して、局所物質移動分布図 (Fig. 4)、総括物質移動式 [(67), (68), (70), (71), (75), (76)式] を三つおりの流れについて示し、従来の理論あるいは実験結果と比較検討したところ、近似的な解析結果ではあるがかなり満足いくものであることがわかった。

おわりに本研究に協力した増山嘉一君 (現在、久保田鉄工(株)勤務) に感謝の意を表す。

#### 記 号

- $a$  : 振幅 (cm)
- $C$  : ガス濃度 (g/cm<sup>3</sup>)
- $C_0$  : 物体表面のガス濃度 (g/cm<sup>3</sup>)
- $D$  : 拡散係数 (cm<sup>2</sup>/sec)
- $k_f$  : 総括物質移動係数 (cm/sec)
- $k_{f0}$  : 局所物質移動係数 (cm/sec)
- $p$  : 圧力 [g/(cm·sec<sup>2</sup>)]
- $Re_p$  : レイノルズ数  $\equiv 2r_0 U_\infty / \nu$  (-)
- $r$  : 回転体の半径 [Fig. 1 (b)] (cm)
- $r_0$  : 円柱または球の半径 (cm)
- $Sc$  : シュミット数  $\equiv \nu / D$  (-)
- $Sh$  : 総括シャード数  $\equiv 2r_0 k_f / D$  (-)
- $Sh_0$  : 局所シャード数  $\equiv 2r_0 k_{f0} / D$  (-)
- $t$  : 時間 (sec)
- $U$  : 境界層外部のポテンシャル流れ (cm/sec)
- $U_0$  : ポテンシャル流れの振幅 [(6)式] (cm/sec)
- $U_\infty$  : 主流の定常速度 (cm/sec)

$u, v$ :  $x, y$  方向の速度成分 (cm/sec)

$x$ : 物体に沿う座標 (cm)

$y$ : 物体表面に垂直な座標 (cm)

$z \equiv (a\omega/U_\infty)^{3/2}(a/r_0)^{1/2}$  (-)

$\zeta_1$ : (12)式で定義される  $\eta$  のみの関数 (-)

$\zeta_{2n}$ : (18)式で定義される  $\eta$  のみの関数 (-)

$\eta \equiv y\sqrt{\omega/\nu}$  (-)

$\theta$ : 円柱または球極座標の角度 (rad, deg)

$\theta_s$ : はく離点 (rad, deg)

$\nu$ : ガスの動粘性係数 (cm<sup>2</sup>/sec)

$\rho$ : ガスの密度 (g/cm<sup>3</sup>)

$\psi$ : 流れ関数 (cm<sup>3</sup>/sec)

$\omega$ : 角周波数 (rad/sec)

### 文 献

- 1) 近江宗一, 碓井建夫: 鉄と鋼, 59 (1973), p. 1902
- 2) 近江宗一, 碓井建夫: 鉄と鋼, 59(1973), p. 1888; M. OHMI and T. USUI: Trans. ISIJ, 16(1976), p. 77
- 3) 北浦嘉之, 田中久弥, 上田義一, 小島紀夫: 化学工学, 33(1969), p. 175
- 4) H. SCHLICHTING: Phys. Z., 33(1932), S 327
- 5) D. ROY: Z. Angew. Math. Phys., 12(1961), p. 363
- 6) H. SCHLICHTING: Boundary-Layer Theory, (1968), p. 158, 226, 298, 391 [McGraw-Hill]
- 7) V. L. SHAH: Trans. ASME, Ser. C, 92(1970), p. 661
- 8) J. HOLTSMARK, I. JOHNSEN, T. SIKKELAND, and S. SKAVLEM: J. Acoustical Soc. America, 26 (1954), p. 26
- 9) A. BERTELSEN, A. SVARDAL, and S. TJØTTA: J. Fluid Mech., 59(1973), p. 493
- 10) 堀 栄一: 日本機械学会論文集, 27(1961), p. 1731
- 11) N. RILEY: J. Fluid Mech., 68(1975), p. 806
- 12) 遠藤一夫, 平野晴望: 北海道大学工学部研究報告, 60(1971), p. 111
- 13) H.-C. YEH and W.-J. YANG: Phys. Fluids, 8 (1965), p. 806
- 14) N. RILEY: Quart. J. Mech. Applied Math., 19 (1966), p. 461
- 15) F. W. SCHOLKEMEIER: Arch. Math., 1(1948/1949), p. 270
- 16) G. J. JAMESON: Chem. Eng. Sci., 19(1964), p. 793
- 17) R. B. BIRD, W. E. STEWART, and E. N. LIGHT-FOOT: Transport Phenomena, (1960), p. 303 [John Wiley & Sons]
- 18) Y. SUGANO and D. A. RATKOWSKY: Chem. Eng. Sci., 23(1968), p. 707
- 19) J. S. LEWIS: Int. J. Heat Mass Transfer, 14 (1971), p. 325
- 20) N. FRÖSSLING: Gerl. Beitr. Geophys., 52(1938), p. 170
- 21) M. LINTON and K. L. SUTHERLAND: Chem. Eng. Sci., 12(1960), p. 214
- 22) H. GIBERT et H. ANGELINO: Chem. Eng. Sci., 28(1973), p. 855
- 23) 小保方富夫, 岡島 厚, 谷田好通: 日本機械学会講演論文集, No. 760-5(1976), p. 163
- 24) M. LÉBOUCHE et M. MARTIN: Int. J. Heat Mass Transfer, 18(1975), p. 1161
- 25) R. W. GRAFTON: Chem. Eng. Sci., 18(1963), p. 457
- 26) F. IHME, H. SCHMIDT-TRAUB, und H. BRAUER: VDI-Berichte, Nr. 187(1972), S 84
- 27) J. ULSAMER: Forschung, 3(1932), S 94
- 28) H. KRAMERS: Physica, 12(1946), p. 61
- 29) W. J. M. DOUGLAS and S. W. CHURCHILL: Chem. Eng. Progress Symp. Ser., 52(1956), p. 23
- 30) S. K. FRIEDLANDER: AIChE J., 3(1957), p. 43
- 31) K. M. KISER and H. E. HOELSCHER: Indust. Eng. Chem., 49(1957), p. 970
- 32) P. D. RICHARDSON: Chem. Eng. Sci., 18(1963), p. 149
- 33) F. K. DEAVER, W. R. PENNEY, and T. B. JEFFERSON: Trans. ASME, Ser. C, 84(1962), p. 251
- 34) P. D. RICHARDSON: J. Fluid Mech., 30 (1967), p. 337
- 35) B. J. DAVIDSON: Int. J. Heat Mass Transfer, 16(1973), p. 1703
- 36) P. NOORDSIJ and J. W. ROTTE: Chem. Eng. Sci., 22(1967), p. 1475
- 37) Y. MORI, M. IMABAYASHI, K. HIJIKATA, and Y. YOSHIDA: Int. J. Heat Mass Transfer, 12 (1969), p. 571
- 38) 原 弘, 島田浩次, 遠藤一夫: 化学工学, 35 (1971), p. 597
- 39) G. W. LOWERY and R. I. VACHON: Int. J. Heat Mass Transfer, 18(1975), p. 1229