'76－S 44

546.72-31: 622.341.1-188: 669.046.464

(44) 静止流体中で微小・調和振動する物体のまわりの流れに関する理論解析

大阪大学 工学部　　近江 宗一　　○ 碓井 建夫

1. 緒言

酸化鉄ペレットの脈動還元反応において，球のまわりの流れを評価し，ガス境膜内物質移動係数を導く目的で，ここではまず一般性のある基礎的な解析として，静止流体中で微小・調和振動する物体のまわりの流れを境界層理論に基づいて導いた．物体が微小・調和振動する場合に生じる二次流れについては，円柱の場合を Schlichting[1]が，回転対称物体の場合を Roy[2]が導いているが，後者の場合数式に誤りが多く，検討も不十分であるので，これらの点に関しても訂正補足した．

2. 速度の近似解

基礎式はそのままでは解けないが，微小振動する流れでは　$u=u_1+u_2,\ v=v_1+v_2$ …(1)　ただし $\partial u_1/\partial t-\nu\partial^2u_1/\partial y^2=\partial U/\partial t$ …(2)　$\partial u_2/\partial t-\nu\partial^2u_2/\partial y^2=U\partial U/\partial x-u_1\partial u_1/\partial x-v_1\partial u_1/\partial y$ …(3)　と近似すると解析的に解ける[3]．ここで境界条件は　$y=0:\ u=0,\quad y=\infty:\ u=U\equiv U_0(x)e^{i\omega t}$ …(4)　いま無次元座標を　$\eta=y\sqrt{\omega/\nu}$ …(5)　ととり，流れ関数の第1近似 ψ_1 をつぎのように仮定する．　$\psi_1(x,y,t)=\sqrt{\nu/\omega}\,U_0(x)\,r\,\zeta_1(\eta)e^{i\omega t}$ …(6)　なお　$u=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial y},\ v=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ …(7)　の関係より　$u_1(x,y,t)=U_0(x)\zeta_1'(\eta)e^{i\omega t}$ …(8)　$v_1(x,y,t)=-\sqrt{\nu/\omega}\,\{dU_0/dx+(U_0/r)dr/dx\}\zeta_1(\eta)e^{i\omega t}$ …(9)

そこで 式(8)を式(2)に代入して　$\zeta_1=-(1-i)/\sqrt{2}+\eta+\{(1-i)/\sqrt{2}\}e^{-(1+i)\eta/\sqrt{2}}$ …(10)

つぎに流れ関数の第2近似 ψ_2 をつぎのように仮定する．

$$\psi_2(x,y,t)=\sqrt{\nu/\omega}\,(U_0dU_0/dx)(r/\omega)\{\zeta_{2a}(\eta)e^{2i\omega t}+\zeta_{2b}(\eta)\}+\sqrt{\nu/\omega}\,(U_0^2/\omega)(dr/dx)\{\zeta_{2c}(\eta)e^{2i\omega t}+\zeta_{2d}(\eta)\}\quad\cdots(11)$$

したがって

$$u_2(x,y,t)=(U_0/\omega)(dU_0/dx)(\zeta_{2a}'e^{2i\omega t}+\zeta_{2b}')+\{U_0^2/(\omega r)\}(dr/dx)(\zeta_{2c}'e^{2i\omega t}+\zeta_{2d}')\quad\cdots(12)$$

いま U,u_1,v_1,u_2 を式(3)に代入すると最終的に

$$\zeta_{2a}=\frac{1+i}{4}e^{-(1+i)\eta}+\frac{i}{2}\eta e^{-(1+i)\eta/\sqrt{2}}-\frac{1+i}{4}\quad\cdots(13)$$

$$\zeta_{2b}=-\frac{1}{4\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}\eta}-\frac{3}{\sqrt{2}}e^{-\eta/\sqrt{2}}\cos\frac{\eta}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}e^{-\eta/\sqrt{2}}\sin\frac{\eta}{\sqrt{2}}-\frac{\eta}{2}e^{-\eta/\sqrt{2}}\sin\frac{\eta}{\sqrt{2}}-\frac{3}{4}\eta+\frac{13}{4\sqrt{2}}\quad\cdots(14)$$

$$\zeta_{2c}=-\frac{1+i}{8\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}(1+i)\eta}+\frac{7}{8}(1+i)e^{-(1+i)\eta}-\frac{1+i}{\sqrt{2}}e^{-(1+i)\eta/\sqrt{2}}+\frac{i}{2}\eta e^{-(1+i)\eta/\sqrt{2}}-\frac{(7\sqrt{2}-9)(1+i)}{8\sqrt{2}}\quad\cdots(15)$$

$$\zeta_{2d}=-\sqrt{2}e^{-\eta/\sqrt{2}}\cos\frac{\eta}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\eta/\sqrt{2}}\sin\frac{\eta}{\sqrt{2}}-\frac{\eta}{2}e^{-\eta/\sqrt{2}}\sin\frac{\eta}{\sqrt{2}}-\frac{\eta}{2}+\sqrt{2}\quad\cdots(16)$$

したがって，これらの第2近似の解からつぎのような二次流れの生じることがわかる．

$$(u_{2,ta})_{y=\infty}=\frac{U_0}{\omega}\frac{dU_0}{dx}(\zeta_{2b}')_{\eta=\infty}+\frac{U_0^2}{\omega r}\frac{dr}{dx}(\zeta_{2d}')_{\eta=\infty}=-\frac{3}{4}\frac{U_0}{\omega}\frac{dU_0}{dx}-\frac{1}{2}\frac{U_0^2}{\omega r}\frac{dr}{dx}\quad\cdots(17)$$

またつぎの値も得られる．ただし ta は時間平均値を表わす．

$$\beta=\left(\frac{\partial u_{2,ta}}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{U_0}{\omega}\frac{dU_0}{dx}(\zeta_{2b}'')_{\eta=0}+\frac{U_0^2}{\omega r}(\zeta_{2d}'')_{\eta=0}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{U_0}{\omega}\frac{dU_0}{dx}\quad\cdots(18)$$

3. 計算例

(1) 円柱の場合　$U_0(x)=2\omega a\sin(x/r_0)$ …(19)

図1a の場合の例として円柱のまわりの二次流れを図2に示す．$\psi_{2,ta}$ の式，図2より $\theta=x/r_0$ が 90° および 45° に関して対称であることがわかる．

(2) 球の場合　$U_0(x)=(3/2)\omega a\sin(x/r_0),\quad r(x)=r_0\sin(x/r_0)$ …(20)

図1b の場合の例として球のまわりの二次流れを図3に示す．$\psi_{2,ta}$ の式，図3より θ が 90° に関しては対称であるが，円柱の場合とは異なり 45° では対称でないことがわかる．

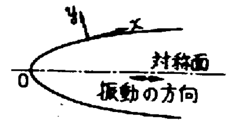

図1a 鏡面対称な奥行無限長の物体 ($r=1$)

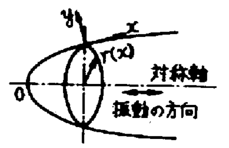

図1b 回転対称な物体

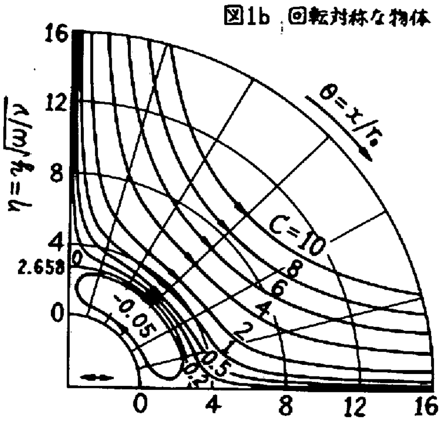

図2 流線図(円柱) $C=\dfrac{r_0\psi_{2,ta}}{a^2\sqrt{\omega\nu}}=2\zeta_{2b}(\eta)\sin\dfrac{2x}{r_0}$

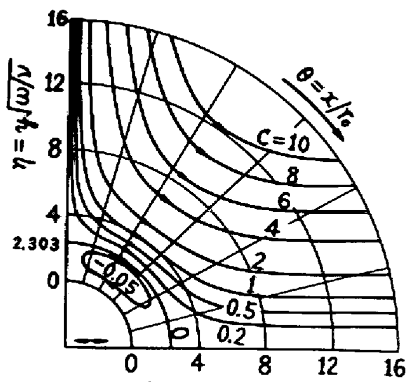

図3 流線図(球) $C=\dfrac{\psi_{2,ta}}{a^2\sqrt{\omega\nu}}=\dfrac{9}{4}\{\zeta_{2b}(\eta)+\zeta_{2d}(\eta)\}\sin^2\dfrac{x}{r_0}\cos\dfrac{x}{r_0}$

文献

1) H. Schlichting: Phys. Z., 33(1932), p.327

2) D. Roy: Z. angew. Math. Phys., 12(1961), p.363

3) H. Schlichting: Boundary-Layer Theory, (1968), p.391 [McGraw-Hill]