

技術資料

UDC 669.017.25 : 539.4.01

複合材料の加工硬化*

田中 紘一**・森 勉***・中村 正久***

Work Hardening of Composite Materials

Ko-ichi TANAKA, Tsutomu MORI, and Tadahisa NAKAMURA

記 号

U_i, e_{ij}, σ_{ij} : 内部応力に基づく変位, 弾性ひずみ, 応力
 $U_i^A, e_{ij}^A, \sigma_{ij}^A$: 外力に基づく変位, 弾性ひずみ, 応力
 e_{ij}^T : misfit (または塑性, transformation) ひずみ
 (第2相の弾性常数が母相のそれと等しいとき)
 e_{ij}^{T*} : 同上 (一般的な第2相のとき)
 e_{ij}^C : 全ひずみまたは拘束ひずみ
 σ_{ij}^I : 第2相中の内部応力
 σ_{ij}^∞ : 無限体を仮定したときの内部応力
 σ_{ij}^{Im} : 表面の Image 効果によつて生じる応力
 β_{ji}, β_{ji}^T : 弾性 distortion, 塑性 distortion
 X_i : 表面に働く力
 γ_P, τ_A, τ_O : せん断塑性ひずみ, 流れ応力, 降伏応力
 $\epsilon_P, \sigma_A, \sigma_O$: 引張り塑性ひずみ, 流れ応力, 降伏応力
 $C_{ijkl}, C_{ijkl}^*, C_{ijkl}^{**}$: 母相, 第2相, 複合材料の弾性
 常数
 λ, μ : ラーメの常数

E, κ, ν : ヤング率, 体積弾性率, ポアソン比
 $S_{ijkl}, S_{ijkl}^*, S_{ijkl}^{**}$: 母相, 第2相, 複合材料のコン
 プライアンス
 V または V_i, D または V_0 : 第2相の体積, 物体の体
 積
 S または $|V|, |D|$: 第2相の表面, 物体の表面
 a, b, c : 楕円体の主軸 (b はバーガースベクトルを示す
 こともある)
 n_i : 方向余弦
 N, f : 第2相の数, 体積含有率
 δ_{ij} : クロネッカーのデルタ記号
 G_{ij} : Green 関数
 S_{ijkl} : Eshelby のテンソル
 E_{el} : 弾性エネルギー
 G : Gibbs の自由エネルギー
 E_{int} : 外力と内部応力の相互作用エネルギー
 E_{int}^A : 外力と inhomogeneity の相互作用エネルギー
 W : 外力のなす仕事

1. はじめに

金属の加工硬化は転位という概念が導入されて以来常に論ぜられてきた問題であるが, いまだにすべての金属にあてはまるような理論はないように見える¹⁾. 加工硬化の一部は金属が不均一に変形することによつて生じた内部応力が原因であるが, 純金属のように均質な材料では不均一な変形がどこでどのように起こるかということを予想することはむずかしい. すなわち, そのような不均一性はいわば統計的に分布するものであり²⁾, その法則性を見つけないければならないところに加工硬化理論の困難さがあるように思われる. これに対して, じょうぶな第2相を分散させた材料では塑性変形が不均一になる場所がその第2相がある場所であるということは, 幾何学的に始めからわかっているのであるから³⁾, 内部応力発生の問題を議論することは容易である. 実用的に使用されている金属では, そのような幾何学的に必要な転位

に基づく硬化の方が統計的にたくわえられた転位に基づく硬化よりも, 重要な役割を演じている場合が多い. その典型的な例として, 析出硬化型合金, 分散強化型合金, 繊維あるいは積層強化型合金などをあげることができる.

このような第2相を含む合金の硬化の機構はそれぞれ異なつて見えるように見えるが, 変形の初期においてはそれらはまったく同一の機構にしたがっているものであり, 含有されている第2相の形や弾性常数の相違によつてその機構の働く強さが異なつてくるだけである. その硬化の機構の基本は, 金属母相中をすべつてきた転位は第2相間を通り抜けていくとき第2相のまわりに転位ループを残していくが³⁾, その転位ループに基づく内部応力が

* 昭和47年7月10日受付 (依頼技術資料)

** 金属材料技術研究所 工博

*** 東京工業大学金属工学科 工博

後からすべつてくる転位に対する逆応力となることにある。FISHER, HART と PRY は Fig. 1(C) のように、第2相のまわりの1すべり面上で同心円状に転位が堆積した場合の問題を、電流を通じた針金によつて生じた電磁場の類推を使つて算出し、第2相の存在による硬化を議論している⁴⁾。その結果によると、転位ループによる逆応力はループの数 N と第2相の大きさ d の比 N/d に比例することがわかる。 N は変形量に比例してふえるから、逆応力も変形量に比例することになる。すなわち ASHBY も指摘しているように⁵⁾、第2相の数が十分多くかつ均一に分布しているとすると、第2相1個あたりに残つたループの数は母相の受けた塑性ひずみ γ_p と $\gamma_p = Nb/d$ (b は転位のバーガースペクトル) という関係で結ばれる。したがつてループの逆応力に基づく硬化応力は、塑性ひずみと直線的な関係をもつてふえる。この原則は、第2相のまわりに残る転位ループの数は変形量に比例し、ループに基づく内部応力は第2相の幾何学的な形状と弾性常数、母相の弾性常数のみによつて決まりかつループの数に比例するので、硬化応力は変形量に比例すると一般化することができる。

FISHER らの理論は 1953 年に発表されたが、それ以後見るべき理論の発展はないように見える (ごく最近 HART によつて彼らの理論の修正が試みられてはいるが前理論とは大きな違いはないように見受けられる⁶⁾)。それは一つには、彼らの方法では解決できない問題が依然として残つているからである。第一は、内部応力は場所によつて変わり、しかも多数の第2相が存在するときには一体どの点の応力をもつて巨視的に観測される加工硬化応力と結びつけるかという問題である。たとえば FISHER-HART-PRY 理論ではその応力として、第2相から $R/3$ (R は粒子間距離) のところの内部応力をとつているが、その理論的根拠は何ら示されていない。また1個の第2相の外の内部応力場ですら一般には非常に複雑な形をしており、簡単には計算できない (たとえば、BROWN らは一様せん断変形下の球状第2相の外の応力場を計算しているが、決して簡単なものではない⁷⁾)。まして、多数の第2相があるときに、ある1点の応力場を正確に求めることは不可能に近い。第二は、一般には弾性常数が母相のそれと異なる第2相のまわりにある転位ループに基づく応力は今のところ計算できないため、第2相の形状や弾性常数と内部応力を関連づけることができないということである。

本稿では第2相の存在による硬化の問題を FISHER らとは異なつた考え方、取り扱い法で理解することを試みる。ここで複合材料を一種のばねと見なしてみる。応力とひずみの関係を求めることは、ばねの伸びとひずみの関係を求めることと同じである。ばね常数 k のばねを x だけ静かに伸ばしたとき、その弾性エネルギーは $(1/2)kx^2$ となる。温度が一定ならばこれは HELMHOLTZ の自

由エネルギーに等しい。ばねの伸びを x から $x + \Delta x$ に伸ばすと、その自由エネルギーの変化は $k\Delta x$ であり、外力 W はその分だけ余分の仕事 $W\Delta x$ をする必要がある。したがつてこの両者を等しいと置いて、ばねの力と伸びの関係 $W=kx$ というよく知られた HOOKE の法則が導かれる。このことは、ばねに一定荷重のおもり W をつるしたと考えると、そのためにポテンシャルが $-Wx$ だけ変化するから、ばねの Gibbs の自由エネルギーは

$$G = (1/2)kx^2 - Wx \dots \dots \dots (1)$$

となり、この安定条件より $W=kx$ という関係が求まるものと考えてもよい。複合材料では第2相という多数のばねを母相がゴムのように取り巻いているから問題が複雑になつている。このゴムも弾性的に変形するから、試料全体に与えた変形ひずみ ϵ が個々のばねにそのまま伝わらない。しかし ϵ と個々のばねが感じるひずみ ϵ' の割合は、HOOKE の法則を仮定するかぎり常に一定である。つまり ϵ' は ϵ に直線的に比例するはずで、 $\sqrt{\epsilon}$ に比例するなどということは起こりえない。したがつて、これらのばねの集合である複合材料を変形するのに必要な応力とひずみの関係を求める手順は、1個のばねの HOOKE の法則を求める手順とならば変わりはない。母相が弾性的にしか変形しない場合は正真正銘のHOOKEの法則を複合材料について求める問題になる。母相が弾塑性的に変形する場合は、(1)式の変数 x として塑性ひずみをとれば加工硬化の法則を求める問題になる。ただしここで述べた方法はあくまでも、第2相があることによつて金属中に生じた内部応力という可逆的な力に基づく硬化応力を求めるために有効であつて、塑性変形の際金属中で熱として消散されてしまう不可逆的な力を求めるためには役に立たない。別の言葉でいうならば、本稿は転位と転位の切り合いなどに基づく短範囲の力による硬化を論ずるのでなく、転位の存在に基づく長範囲の力による硬化を論ずることを主眼としている。

さて、それならばつぎの問題は複合材料が塑性変形した際、ばねの弾性エネルギー $(1/2)kx^2$ に相当するエネルギーをどのようにして計算するかということであるが、それには連続転位の概念を使う⁸⁾⁹⁾。たとえば図1(a)のような球状第2相を含む試料が単一すべりで塑性変形したとする。もし第2相が母相と同じ塑性変形を受

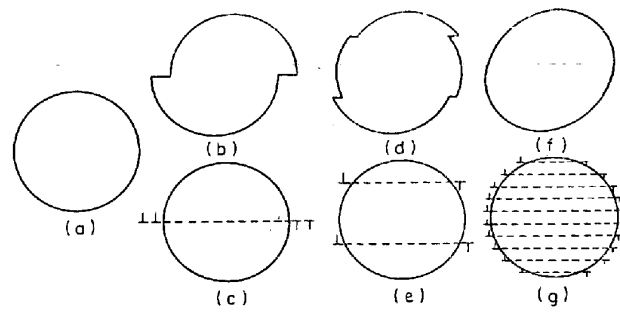


図1 第2相のまわりに残つた転位の模型図

けると仮定すると、1つの第2相を単一のすべり面、多くのすべり面で切る場合に応じて、それぞれ図1(b), (d)のように変形されるはずである。ところが第2相はじょうぶなため弾性的にのみ変形し、塑性変形を受けないとすると、(b)(d)に対応して(c)(e)のように転位ループが第2相のまわりに残ることになる。しかし、第2相のごく近辺の応力状態は(c)と(e)ではもちろん異なってくるであろうが、ある程度第2相から離れたところでは応力状態は両者の間では大差ないであろう。また実際の金属中では、ループは図1に示すように規則正しく残らず、個々の第2相によつてその残る位置がいろいろに変化するはずである。したがつて試料全体で見ると、単一面ですべろうと多すべり面ですべろうと平均化されたエネルギーはあまり差がないであろうと考えられる。そこで思いきつて、バーガースベクトルとループの数の積は一定にしたまま(g)のようにループ数を無限に大きくし、バーガースベクトルの大きさを無限に小さくし、同時に介在物のまわりに均一に分布させる。このことは(f)のような形をした穴に、(a)のような形をした第2相を無理に押し込む問題であると理解することができる¹⁰⁾。この際、母相と第2相の間に相対的な misfit ((f)と(a)の形の差)が生じるので内部応力が発生する。この misfit ひずみを持つ第2相の内部応力を求める問題は一般的にすでに得られている^{11)~13)}。

本稿では、まず第2章において ESHELBY の楕円体第2相に関する論文を主体として内部応力の問題を一般的に取り扱う¹⁴⁾。それはこの論文は加工硬化の問題ばかりでなく、転位と溶質原子や点欠陥との相互作用、析出や破壊の問題などを解くためにそのまま応用されており、きわめて有用であるからである。第3章には、複合材料の加工硬化率の求め方を具体的な例をあげて述べ、かつ複合材料の塑性挙動が第2相の存在によつてどう変わっていくかを考える。第4章では、第2相の量が多くなったとき、複合材料中に働く平均的な内部応力はどうか計算されるかという問題と、それを基として複合材料の弾性常数や硬化率をどう計算していつたらよいかという問題を述べる。第5章では、内部応力の緩和の機構を連続転位を使つて説明することを試みる。すなわち、本稿の考え方では直線的な硬化が期待されるが、実在の複合材料ではある程度変形すると硬化度が低下してくる。これは内部応力が非常に高くなるので、その応力場を緩和するような種々の機構が働いてくるためである。

2. Misfit ひずみに基づく内部応力

2.1 内部応力

物体Dの中のある領域Vに misfit に基づく distortion β_{ji}^T が発生したとする。この状態の物体中に生ずる応力場はつぎのような手順で計算する。

まず領域V (第2相)を物体より切出して、一様な塑

性変形を行ない塑性 distortion β_{ji}^T を与える⁸⁾。これはVに大きさと形の変化が起こつても応力を生じない変形であり、 x_j 軸に垂直な面が x_i 軸方向に動くように起こる。ESHELBY はひずみ $e_{ij}^T = (\beta_{ji}^T + \beta_{ij}^T)/2$ を (stress-free) transformation strain と呼び、考え方として、マルテンサイトのような変態によるひずみを持ち出している¹⁴⁾。

仮想的にこの第2相の表面Sに力 $-\sigma_{kl}^T n_l$ を加えて、変形前の形と大きさに戻してやり、もとの穴の中に押し込んでその界面Sを溶接する。ここで

$$\sigma_{kl}^T = C_{klmn} \beta_{nm}^T \dots\dots\dots (2)$$

であり、 n_j はSの方向余弦、 C_{ijkl} は母相の弾性常数である。なお本稿ではテンソル記号の約束を使うことにし、サフィックスが繰り返して出てきたときには、これに1, 2, 3を代入して和をとる。またサフィックスのあとのコンマは微分を意味する。たとえば静的つり合いの方程式は

$$\sigma_{1j,j} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

と書くことができる。

つぎに第2相の表面に与えた力を打ち消すように、反対方向の力 $\sigma_{kl}^T n_l$ を界面にかけて母相に変位Uを与えて内部応力状態とする。無限体中のある1点 $x(x_1, x_2, x_3)$ に x_k' 方向の単位強さの力を加えたとき、任意の点 $x'(x_1', x_2', x_3')$ に生じる x_i' 成分の変位を $G_{ik}(x', x)$ と書く。これは弾性論における Green 関数と呼ばれている。第2相の界面S(x)に力 $\sigma_{kl}^T n_l$ を加えたとき、任意の点 x' に生じる x_i' 成分の変位 $U_i(x')$ は

$$U_i(x') = \int_S \sigma_{kl}^T n_l G_{ik}(x, x') dS(x) \dots\dots\dots (4)$$

と表わせる。ここで積分は第2相の界面での表面積分であるが、GAUSSの定理を使い第2相内Vでの体積積分に直すと(4)式は

$$U_i(x') = \int_V \sigma_{kl}^T G_{ik,l}(x, x') dD(x) \dots\dots\dots (5)$$

となる。ここで $dD(x) = dx_1 dx_2 dx_3$ である。(5)式に(2)式を代入し、 x_j' で微分すると $\partial G_{ik}/\partial x_j' = -\partial G_{jk}/\partial x_i$ という性質があるので、

$$U_{i,j}(x') = -\beta_{nm}^T \int_V C_{klmn} G_{ik,lj}(x, x') dD(x) \dots\dots\dots (6)$$

となる。 $U_{i,j}$ は第2相内に distortion β_{ji}^T が発生する以前を標準にしたとき、 x_i 軸に垂直な面が x_j 軸の方向にどれくらい形の変化があつたかを表わす全 distortion である⁹⁾。弾性エネルギーに寄与するのは distortion の対称成分であるから、 $C_{klmn} = C_{nmkl}$ であることを利用して(6)式より全みずみ $e_{ij}^C = (U_{i,j} + U_{j,i})/2$ を求めると

$$e_{ij}^C(x') = -e_{mn}^T \int_V C_{mnlk} [G_{ik,lj}(x, x') + G_{jk,li}(x, x')] / 2 dD(x) \dots\dots\dots (7)$$

となる。ESHELBY は、内部応力は変態が母相の拘束によつて妨げられることによつて生じるのであるから、(7)

式のひずみを拘束ひずみと呼んでいる¹¹⁾。物体 D が等方等質の無限体の場合には Green 関数は

$$G_{ik}(x, x') = [\bar{x}_i \bar{x}_k / r^3 + (3-4\nu) \delta_{ik} / r] / 16\pi(1-\nu)\mu, \\ \bar{x}_i = x_i - x'_i, \quad r^2 = \bar{x}_k \bar{x}_k \quad \dots\dots\dots (8)$$

と書ける⁹⁾。ここで ν, μ は母相のポアソン比とせん断弾性常数であり、 δ_{ij} は Kronecker のデルタ記号で、 $i=j$ のときには 1, $i \neq j$ のときには 0 を表わす。ESHELBY は第 2 相が楕円体のときには、(7)式に(8)式を代入して解き、 e_{ij}^C は楕円積分の形で解けることを示した¹¹⁾¹²⁾。なお最近になつて木下と村は(8)式の Green 関数は異方性のある物質の場合にも解け、かつ、 e_{ij}^C は形にもよらず一般的に解けることを示している¹³⁾。とくに x' が第 2 相 V の中にあるときには、(7)式の積分は場所によらず一様となり、

$$e_{ij}^C = S_{ijmnp} e_{mnp}^T \quad \dots\dots\dots (9)$$

と表わせる。ここで S_{ijmnp} は第 2 相が

$$x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 + x_3^2/c^2 = 1 \quad \dots\dots\dots (10)$$

の形をしているときにはつぎのような楕円積分となる。

$$\left. \begin{aligned} S_{1111} &= Qa^2 I_{aa} + RI_a, \\ S_{1122} &= Qb^2 I_{ab} - RI_a, \\ S_{1212} &= S_{1221} = S_{2112} = S_{2121} \\ &= Q(I_a^2 + I_b^2) I_{ab} / 2 + R(I_a + I_b) / 2, \\ Q &= 3/8\pi(1-\nu), \quad R = (1-2\nu) / 8\pi(1-\nu), \\ I_a &= 2\pi abc \int_0^\infty du / (a^2 + u) A, \\ I_{aa} &= 2\pi abc \int_0^\infty du / (a^2 + u)^2 A, \\ I_{ab} &= (2/3)\pi abc \int_0^\infty du / (a^2 + u)(b^2 + u) A, \\ A &= (a^2 + u)^{1/2}(b^2 + u)^{1/2}(c^2 + u)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

上記のほかの S_{ijkl} は、 a, b, c を 1, 2, 3 にそれぞれ対応させながら順番に交換して求める。また $S_{1112}, S_{1123}, S_{2311}, \dots$ のようなせん断と引張り、 $S_{1223}, S_{1213}, \dots$ のようなせん断とほかのせん断の組み合わせは 0 となる。具体的な S_{ijkl} の値として、第 2 相が球状の場合と繊維状の場合をあげるとつぎようになる。

$$\left. \begin{aligned} \text{球 } (a=b=c) : \\ S_{1111} &= S_{2222} = S_{3333} = (7-5\nu) / 15(1-\nu), \\ S_{1122} &= S_{2211} = S_{2233} = S_{3322} = S_{1133} = S_{3311} \\ &= (-1+5\nu) / 15(1-\nu), \\ S_{1212} &= S_{2323} = S_{3131} = (4-5\nu) / 15(1-\nu). \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{繊維 } (a=b \ll c) : \\ S_{1111} &= S_{2222} = (5-4\nu) / 8(1-\nu), \quad S_{3333} = 0, \\ S_{1122} &= S_{2211} = (-1+4\nu) / 8(1-\nu), \\ S_{1133} &= S_{2233} = 4\nu / 8(1-\nu), \quad S_{3322} = S_{3311} = 0 \\ S_{1212} &= (3-4\nu) / 8(1-\nu), \quad S_{1313} = S_{2323} = 1/4 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

一般的に全 distortion $U_{j,i}$ は塑性 distortion β_{ji}^T と弾性 distortion β_{ji} の和で定義され、対称ひずみに関しても同様な関係が成立するから、弾性ひずみ $e_{ij} = (\beta_{ji} + \beta_{ij}) / 2$ は

$$e_{ij} = e_{ij}^C - e_{ij}^T \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。内部応力 σ_{ij} は弾性 distortion またはひずみと

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \beta_{lk} = C_{ijkl} e_{kl} \quad \dots\dots\dots (15)$$

と結ばれる。仮定により第 2 相 V の中には misfit に基づく塑性ひずみ e_{ij}^T が存在し、その外では $e_{ij}^T = 0$ であることを考慮すると、(7)と(14)式を(15)式に代入することによつて内部応力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}^I &\equiv \sigma_{ij} = C_{ijkl}(e_{kl}^C - e_{kl}^T) \quad \text{介在物中}(V) \\ \sigma_{ij}^C &\equiv \sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}^C \quad \text{介在物外}(D-V) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

と求めることができる。第 2 相が楕円体のときには、内部応力は第 2 相の中では一様となり、(9)式を(16)式に代入することによつて容易に求まるが、第 2 相の外では場所の関数となるので(16)式の計算は一般には複雑である。

以上では第 2 相の弾性常数は母相のそれと等しいと仮定したが、実在の第 2 相の弾性常数 C_{ijkl}^* は母相の弾性常数 C_{ijkl} と異なることが多い。その場合には、実際の第 2 相が持つ misfit (塑性) ひずみを e_{ij}^{T*} とし、これによつて生ずる変位と応力を、母相と同じ弾性常数を持つ第 2 相に塑性ひずみ e_{ij}^T を与えることによつて再現できないか考えてみる¹²⁾。この仮想的な第 2 相を ESHELBY は等価第 2 相と呼んでいる。これは実際の第 2 相と同じ変位を作るから、その変位に基づく全ひずみ e_{ij}^C も両者では等しくなる。応力が両者で等しくなるために、第 2 相の中では(14)式と(16)式を参照して

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}^I &= C_{ijkl}(e_{kl}^C - e_{kl}^T) \quad \text{等価第 2 相の中} \\ &= C_{ijkl}^*(e_{kl}^C - e_{kl}^{T*}) \quad \text{実在第 2 相の中} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

の関係が成立しなければならない。つまり等価第 2 相が存在するためには、(17)式を満足させるような e_{ij}^T が e_{ij}^{T*} の関数としてみつからないといけない。これは e_{ij}^C が(9)式より e_{ij}^T の 1 次式として与えられているので、 e_{ij}^T は e_{ij}^{T*} の 1 次式の形で解くことが可能である。第 2 相中の変位と応力の等価性が保証されれば、第 2 相の外での変位と応力の等価性も保証されることは明らかである。なお、母相も第 2 相も等方体の場合には、一般的に弾性常数は $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk}$ の関係があるので(17)式はつぎのように書けることを付け加えておく。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}^I &= \lambda(e^C - e^T) \delta_{ij} + 2\mu(e_{ij}^C - e_{ij}^T) \\ &= \lambda^*(e^C - e^{T*}) \delta_{ij} + 2\mu^*(e_{ij}^C - e_{ij}^{T*}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで λ, μ と λ^*, μ^* はそれぞれ母相と第 2 相のラーメの常数であり、一般に $e = e_{ii} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ を表わす。

2.2 エネルギー

このように内部応力 σ_{ij} を持つ第 2 相 V を含有する物体 D の表面 $|D|$ に外応力を生じる力 $X_i = \sigma_{ij} A n_j$ が働くとき、この物体 D のエネルギーを考える。第 2 相の弾性常数が母相のそれと異なるときには、一様な外力場 σ_{ij}^A は第 2 相の存在のために乱される。これを ESHELBY は inhomogeneity 効果と呼んでいるが¹¹⁾、転位論では

modulus 効果とよく呼ばれている。この効果によつて乱されたのちの外力場 $\sigma_{ij}^{A'}$ は、内部応力場 σ_{ij} とはおのおのの独立で重ね合わせがきくので、物体 D の Gibbs の自由エネルギーは

$$G = 1/2 \int_D (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{A'}) (e_{ij} + e_{ij}^{A'}) dD - \int_{|D|} X_i (U_i + U_i^{A'}) dS \dots\dots\dots (19)$$

となる。これは (1) 式と対応させればわかりやすいが、この第 1 項は弾性エネルギー、第 2 項は外力のポテンシャル変化である。ここでそれぞれ U_i, e_{ij} は内部応力、 $U_i^{A'}, e_{ij}^{A'}$ は inhomogeneity があるときの外力の変位と弾性ひずみである。(19) 式はつぎのように書き換えることができる。

$$G = (1/2) \int_D \sigma_{ij} e_{ij} dD + [(1/2) \int_D (\sigma_{ij} e_{ij}^{A'} + \sigma_{ij}^{A'} e_{ij}) dD - \int_{|D|} X_i U_i dS] + [(1/2) \int_D \sigma_{ij}^{A'} e_{ij}^{A'} dD - \int_{|D|} X_i U_i^{A'} dS] + [(1/2) \int_D (\sigma_{ij}^{A'} e_{ij}^{A'} - \sigma_{ij}^{A'} e_{ij}^{A'}) dD - \int_{|D|} X_i (U_i^{A'} - U_i^{A'}) dS] \dots\dots\dots (20)$$

この式の第 1 項は内部応力のみに基づく弾性エネルギー E_{el} であり、(14) 式を代入して (e_{ij}^T は e_{ij}^{T*} で置き換える)、GAUSS の定理を使うと

$$E_{el} = (1/2) \int_D \sigma_{ij} e_{ij} dD = (1/2) \int_D \sigma_{ij} (e_{ij}^C - e_{ij}^{T*}) dD = (1/2) \int_{|D|} \sigma_{ij} U_i n_j dS - (1/2) \int_D \sigma_{ij,j} U_i dD - (1/2) \int_D \sigma_{ij} e_{ij}^{T*} dD \dots\dots\dots (21)$$

となる。内部応力であるから、表面 $|D|$ では $\sigma_{ij} n_j = 0$ となることと、(3) 式の関係より (21) 式は

$$E_{el} = - (1/2) \int_D \sigma_{ij} e_{ij}^{T*} dD \dots\dots\dots (22)$$

となる⁹⁾。第 2 相 V が楕円体のときには、その中では σ_{ij} は均一で、(16) 式で与えられるので

$$E_{el} = - (V/2) \sigma_{ij}^I e_{ij}^{T*} \dots\dots\dots (23)$$

となる。また後章の計算の必要上から、母相中にたくわえられた弾性エネルギーを上記と同様の手順を使つて求めると

$$(1/2) \int_{D-V} \sigma_{ij}^C e_{ij}^C dV = (1/2) \int_{|D|} \sigma_{ij}^C U_i n_j dS - (1/2) \int_{|V|} \sigma_{ij}^C U_i n_j dS = - (1/2) \int_{|V|} \sigma_{ij}^I U_i n_j dS = - (1/2) \int_V \sigma_{ij}^I e_{ij}^C dD = - (V/2) \sigma_{ij}^I e_{ij}^C \dots\dots\dots (24)$$

となる。ここで第 2 相の界面 $|V|$ において力が連続でなければならぬので、界面のすぐ内側の力 $\sigma_{ij}^I n_j$ とすぐ外側の力 $\sigma_{ij}^C n_j$ が等しくなることを利用した。

(20) 式の第 2 項は外力と内部応力の相互作用エネルギー E_{int} である。このエネルギーの第 1 項は相互作用に基づく弾性エネルギーの変化であり

$$\int_D \sigma_{ij}^{A'} e_{ij} dD = \int_D \sigma_{ij} e_{ij}^{A'} dD = \int_D \sigma_{ij} U_{i,j}^{A'} dD = \int_D \sigma_{ij} U_i^{A'} n_j dS - \int_D \sigma_{ij,j} U_i^{A'} dD \dots\dots\dots (25)$$

となるが、(21) 式を参照して容易にゼロとなることがわかる。この結果は外力と内部応力が共存するときの物体の持つ弾性エネルギーは、両者が別々に存在したときのそれぞれの弾性エネルギーを単純に加え合わせたものになつていて、COLONNETTI の定理と呼ばれている⁹⁾¹⁴⁾。しかししばしば誤解されるように、内部応力と外力はまったくおたがいに作用し合わないというのではなく、misfit ひずみがあるために外力のポテンシャルエネルギーの変化があることを通じて作用し合うことを忘れてはならない。(20) 式の第 2 項は等価第 2 相の内部応力を考え、GAUSS の定理を使い (25) 式を考慮すると

$$E_{int} = - \int_{|D|} X_i U_i dS = - \int_{|D|} \sigma_{ij}^{A'} U_i n_j dS = - \int_D \sigma_{ij,j}^{A'} U_i dD - \int_D \sigma_{ij}^{A'} U_{i,j} dD \dots\dots\dots (26)$$

と変形できる。この式の第 1 項は (3) 式の静的つり合いの条件よりゼロである。(14)、(16) 式を参照して、(25) 式と同様な手順をふんで

$$E_{int} = - \int_D \sigma_{ij}^{A'} e_{ij} dD - \int_V \sigma_{ij}^{A'} e_{ij}^{T*} dD = - \int_V \sigma_{ij}^{A'} e_{ij}^T dD = - \int_V \sigma_{ij}^{A'} e_{ij}^{T*} dD \dots\dots\dots (27)$$

と求まる。(27) 式の後半の等式は実在の第 2 相の内部応力を考え、上記とまったく同様な方法により導くことができる。さらに第 2 相が楕円体のときには (27) 式は

$$E_{int} = - V \sigma_{ij}^{A'} e_{ij}^{T*} = - V \sigma_{ij}^{A'} e_{ij}^{T*} \dots\dots\dots (28)$$

となる。

(20) 式の第 3 項は第 2 相のない物体に一樣な外力がかつたときの物体の Gibbs の自由エネルギーであるが、GAUSS の定理を使うことによりこれは

$$- (1/2) \int_{|D|} X_i U_i^{A'} dS = - (1/2) \int_D \sigma_{ij}^{A'} e_{ij}^{A'} dD = - (V_0/2) \sigma_{ij}^{A'} e_{ij}^{A'} \dots\dots\dots (29)$$

となることは容易に示される。ここで V_0 は試料の体積である。(29) 式は外力のポテンシャルエネルギー変化の半分は試料中にたくわえられた弾性エネルギーとなることを示している。

(20) 式の最後の項は、外力と inhomogeneity の相互作用のエネルギー E_{int}^A である。ESHELBY はこのエネルギーも (17) 式で使つた等価第 2 相を利用して計算できることを示した¹¹⁾。すなわち、この場合には inhomogeneity によつて乱された外力 $\sigma_{ij}^{A'} - \sigma_{ij}^A$ と変位 $U_i^{A'} - U_i^A$ は、弾性常数が母相のそれと等しい等価第 2 相が塑性ひずみ e_{ij}^T を持つたときに生じる応力 σ_{ij} と変位 U_i で完全に置き換えられるかを考える。実在の物体中での応力は

$$\sigma_{ij}^{A'} = \begin{cases} C_{ijkl}e_{kl}^{A'} & \text{母相中} \\ C_{ijkl}^*e_{kl}^{A'} & \text{第2相の中} \end{cases} \dots (30)$$

であり、等価第2相による応力 σ_{ij} は

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} C_{ijkl}e_{kl}^C & \text{母相中} \\ C_{ijkl}(e_{kl}^C - e_{kl}^T) & \text{第2相の中} \end{cases} \dots (31)$$

$$e_{kl}^C = (U_{k,1} + U_{l,k})/2$$

である。(31)式の応力 σ_{ij} に一様な外力 $\sigma_{ij}^A = C_{ijkl}e_{kl}^A$ を重ね合わせたものは

$$\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^A = \begin{cases} C_{ijkl}(e_{kl}^C + e_{kl}^A) & \text{母相中} \\ C_{ijkl}(e_{kl}^C + e_{kl}^A - e_{kl}^T) & \text{第2相の中} \end{cases} \dots (32)$$

となるが、この応力が(30)式の応力に等しくなるような e_{ij}^T を与えた等価第2相が存在することが、上記の変位と応力の置換が可能であるために必要である。そのためには、第2相のなかで応力が

$$\sigma_{ij}^{A'} = C_{ijkl}(e_{kl}^C + e_{kl}^A - e_{kl}^T) = C_{ijkl}^*(e_{kl}^C + e_{kl}^A) \dots (33)$$

の条件を満足するように e_{kl}^T が定められればよい。これは e_{ij}^C と e_{ij}^T は(9)式の関係が成立するので、(33)式は(17)式と同様に解ける。(33)式が満足されれば、変位 $U_i^{A'} - U_i^A = U_i$ が保証されているので、(32)式の第2相の外の応力は(30)式のそれと等価となることは自明である。

外力と inhomogeneity の相互作用エネルギーは(29)式と同様に弾性エネルギーは

$$(1/2) \int_D (\sigma_{ij}^{A'} e_{ij}^{A'} - \sigma_{ij}^A e_{ij}^A) dD = (1/2) \int_{|D|} X_i (U_i^{A'} - U_i^A) dS \dots (34)$$

となることは容易に示されるので、

$$E_{int}^A = -(1/2) \int_{|D|} X_i (U_i^{A'} - U_i^A) dS \dots (35)$$

となる。これは $X_i = \sigma_{ij}^{A'} n_j = \sigma_{ij}^A n_j$, $C_{ijkl} = C_{klij}$ の関係、(3)式、GAUSSの法則などを使うと

$$E_{int}^A = (1/2) \int_V (\sigma_{ij}^{A'} e_{ij}^A - \sigma_{ij}^A e_{ij}^{A'}) dD = (1/2) \int_V (C_{ijkl}^* - C_{ijkl}) e_{kl}^A e_{kl}^{A'} dD \dots (36)$$

と変形することができる。第2相が楕円体をしているときには、(33)式を(36)式に代入することにより

$$E_{int}^A = -(V/2) \sigma_{ij}^A e_{ij}^T \dots (37)$$

と求めることができる。ESHELBYは(37)式の応用例として、円板状のクラックに外力が働いたときのエネルギーを計算する問題、すなわち Griffith クラックの問題をあげて、第2相の形を(10)式で $a=b \gg c$, その弾性常数をゼロとすれば求まることを示している¹¹⁾。

なお、(28)、(37)式は物体の表面にかかる力が一定の条件で解いているが、表面の変位が一定の条件で解いたときには、それらは試料中にたくわえられる弾性エネルギーとなる¹¹⁾¹⁴⁾。またこれらの式は、 σ_{ij}^A が外力のときだけでなく、物体内のほかの内部応力に基づく応力場で

あつても成立つ。

3. 直線硬化

3.1 基本的な考え方

Fig. 1において、せん断変形によつて母相中に x_1 軸に垂直な面に x_3 軸方向に塑性 distortion γ_P が生じたとする。その際に母相と第2相との間に生じる相対的な misfit に基づく内部応力を評価するため、試料全体に $-\gamma_P$ なる仮空の塑性 distortion を重ねてみる。物体全体に均一に起こつた塑性 distortion は内部応力を発生しないから、この状態は内部応力に関しては Fig. 1(f)の状態とまったく同じである。しかし、 $-\gamma_P$ を全体に重ねることによつて、その効果は第2相にのみ一様な塑性 distortion あるいは $e_{13}^{T*} = e_{31}^{T*} = -\gamma_P/2$ なる塑性ひずみが導入されたと同じことになる¹⁵⁾。つまり Fig. 1(g)のように第2相の界面にある転位は第2相のちようど外にあるとも中にあるとも区別できないわけで、これらの転位は第2相が塑性変形してできたと考えてもよい。

この場合に必要な(9)式の全ひずみは $e_{13}^C = 2S_{1313}e_{13}^T$ だけであるから、母相も第2相も等方体とすると(16)式は

$$\sigma_{13}^1 = 2\mu(2S_{1313}e_{13}^T - e_{13}^1) = 2\mu^*(2S_{1313}e_{13}^T + \gamma_P/2) \dots (38)$$

となるので、等価ひずみ e_{13}^T は容易に求まる。第2相が球のときには、(12)式の S_{1313} を使つて第2相の中の内部応力は

$$\sigma_{13}^1 = \sigma_{31}^1 = A\mu\gamma_P \quad A = (7-5\nu)\mu^*/[(7-5\nu)\mu + (8-10\nu)\mu^*] \dots (39)$$

となる。さらに(23)式を用いて、この内部応力に基づく物体の弾性エネルギー増加 E_{el}^1 は

$$E_{el}^1 = -V_1(\sigma_{13}^1 e_{13}^{T*} + \sigma_{13}^1 e_{13}^{T*})/2 = V_1 A \mu \gamma_P^2 / 2 \dots (40)$$

となる。ここで V_1 はある任意の第2相の体積であり、 V_1 は物体の体積 V_0 に比べると十分小さいとする。

つぎに同質の球状第2相が N 個試料中に含有されている場合を考える。ただし、第2相の含有体積比 f が1に比べて小さく、おのおのの第2相のもつ内部応力場同士の重なり合いに基づく弾性エネルギー変化はそれらの自己エネルギーに比べると無視できるほど小さいとする。このときには、試料のもつ弾性エネルギーはおのおのの第2相のもつ自己エネルギーを単純に加えたものになる。したがつて試料単位体積あたりにたくわえられる弾性エネルギー E_{el}^0 は(40)式より

$$E_{el}^0 = (1/V_0) \sum_{i=1}^N E_{el}^1 = (\sum_{i=1}^N V_i/V_0) A \mu \gamma_P^2 / 2 = f A \mu \gamma_P^2 / 2 \dots (41)$$

となる。

このように第2相を含有する試料を一定外力 $\sigma_{13}^A = \tau_A$ のもとでひずみ γ_P より $\gamma_P + \delta\gamma_P$ に塑性変形する際、試

料単位体積当たりの Gibbs の自由エネルギー δG は (1)式に対応させて

$$\delta G = \delta E_{e1}^0 - \delta W = 0 \dots\dots\dots (42)$$

の条件を満足しなければならない。ここで δE_{e1}^0 は試料単位体積あたりの弾性エネルギー増加であり、(41)式より

$$\delta E_{e1}^0 = (\partial E_{e1}^0 / \partial \gamma_P) \delta \gamma_P = f A \mu \gamma_P \delta \gamma_P \dots\dots\dots (43)$$

となる。 δW は試料単位体積あたりの外力が可逆的になす仕事変化で

$$\delta W = (\tau_A - \tau_0) \delta \gamma_P \dots\dots\dots (44)$$

と書ける。ここで、 τ_0 はこの変形の際の母相中の摩擦力であり、 $\tau_0 \delta \gamma_P$ は熱として失われる仕事分を表わしている。実際の金属中では、この変形は転位が動くことにより起こるので、母相中では転位同士の切り合いなどにより、 τ_0 の増加があるはずであるが、そのためによる仕事変化は(43)式のエネルギー変化に対して無視できるほど小さいと仮定する。

(42)式へ(43)、(44)式を代入して、外力と塑性ひずみの関係式

$$\tau_A - \tau_0 = f A \mu \gamma_P \dots\dots\dots (45)$$

を得る¹⁵⁾。これは直線硬化を表わしており、硬化率は含有第2相の体積比 f に比例するが、第2相の大きさには依存しないことがわかる。

さて第1章で、第2相のまわりの N 個のループに基づく逆応力を求めた EISHER-HART-PRY の理論も、直線硬化の理論であることが理解できることを述べた⁴⁾⁵⁾。彼らは第2相(半径 r)から $R/3$ ($2R$ が平均粒子間隔)のところの内部応力 τ_h を硬化応力として

$$\tau_h = 3\mu (r/R)^3 (Nb/d) \dots\dots\dots (46)$$

と与えている。ここで第2相に引つかかる転位の数、平均的に見ると巨視的な塑性ひずみ γ_P と $\gamma_P = Nb/2r$ と関係づけられるから、(46)式は

$$\tau_h = 6\mu (r/R)^3 \gamma_P \dots\dots\dots (47)$$

となる。FISHERらはすべり面上の応力のみを考慮したため第2相の量 f も2次元的な平均 $f = (r/R)^2$ を採用しているの、 τ_h は $f^{3/2}$ に比例すると導いた。しかし、第2相は問題にしている面上のみでなく、その上にも下にも3次元の分布をしているはずである。そしてそれらの第2相に基づく内部応力も問題の場所における逆応力として $(r/R)^3$ に比例した形で寄与してくるものである。したがって、第2相の量 f は3次元の平均 $(r/R)^3$ を採つた方がより合理的であるので、(47)式は

$$\tau_h = 6f \mu \gamma_P \dots\dots\dots (48)$$

となることが理解できる。これは(45)式とまったく同じ形をしており $A=6$ と置き換えただけである。すなわち長範囲の力を問題にする限り、第2相のまわりのループの分布状態をどのように仮定しても硬化応力は塑性ひずみに直線的に比例し、 f にも比例するという法則は常に成り立ち、個々のモデルによつてその強さ A が異なつて

くるだけであると考えられる。

3-2 第2相の形と弾性常数の影響

析出硬化や分散強合金の機械的性質を議論するときには、粒子によつて転位の運動が妨げられるのがその強化の原因であり、繊維強合金の場合には母相の変形を繊維が機械的に拘束することにより強化されるなどを使い分けることが多いので、それらの強化機構が異なるような印象を受ける。しかし、実はそれらは同じ強化機構に従っていることはさきに述べた。ここでは念のため、繊維強合金の加工硬化も球状介在物の場合とまったく同じ手続きで求めることができることを示しておく。そして、繊維と球では、その機構の働き方がどのように違ってくるかを考えてみる。

繊維は(10)式の楕円体で $a=b \ll c$ の形をしていると考え、すべての繊維の c 軸は、試料の引張り軸 x_3 軸方向に並んでいるものとする。1軸引張り母相に塑性ひずみ ϵ_P を与えたとすると、塑性変形により体積が不変であるために引張り軸とは直角方向には圧縮ひずみ $\epsilon_P/2$ が生じるので、繊維が受けた misfit ひずみは $e_{33}^{T*} = -\epsilon_P$ 、 $e_{11}^{T*} = e_{22}^{T*} = \epsilon_P/2$ と考えることができる。(13)式を(9)式に代入すると繊維中の全ひずみは

$$\left. \begin{aligned} e_{11}^C &= e_{22}^C = (e_{11}^T + \nu e_{33}^T) / 2(1-\nu) \\ e_{33}^C &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (49)$$

と求まる。繊維のなかの内部応力は(49)式を(18)式に代入して

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11}^I &= \sigma_{22}^I = - (1-2\nu^*) EE^* \epsilon_P / \\ & 2[(1+\nu^*)(1-2\nu^*)E + (1+\nu)E^*], \\ \sigma_{33}^I &= [(1-2\nu^*)E + (1+\nu)E^*] E^* \epsilon_P / \\ & [(1+\nu^*)(1-2\nu^*)E + (1+\nu)E^*] = A' E \epsilon_P. \end{aligned} \right\} \dots (50)$$

ここで E 、 E^* と ν 、 ν^* はそれぞれ母相と繊維のヤング率とポアソン比を表わす。

任意の第2相 V_i に基づく弾性エネルギー E_{e1}^i は(23)式へ(50)式を代入して

$$\begin{aligned} E_{e1}^i &= - (V_i/2) (\sigma_{11}^I \epsilon_P - \sigma_{33}^I) \epsilon_P = (V_i/2) A E \epsilon_P^2 \\ A &= [3(1-2\nu^*)E + 2(1+\nu)E^*] E^* / \\ & 2[(1+\nu^*)(1-2\nu^*)E + (1+\nu)E^*] E \dots\dots\dots (51) \end{aligned}$$

と求まる。(51)式より球の場合とまったく同じ手順で、引張り応力 σ_A と塑性ひずみの間に、(45)式に対応させて

$$\sigma_A - \sigma_0 = f A E \epsilon_P \dots\dots\dots (52)$$

という関係を得る。ここで σ_0 はこの引張り変形の際、母相に働く摩擦力である。

Fig. 2 に(52)式の硬化係数 A の計算結果を繊維の硬さ E^*/E を横軸にとつて図示した。 $c/a = \infty$ が(52)式の A の値を表わす。計算では母相と繊維のポアソン比を $\nu = \nu^* = 1/3$ とした。なお形の影響をみるために、(10)式で $a=b < c$ の楕円体を考え、軸比 c/a を種々に変えて繊維の場合と同様な計算をして求めた硬化係数 A も同図に示した¹⁶⁾。

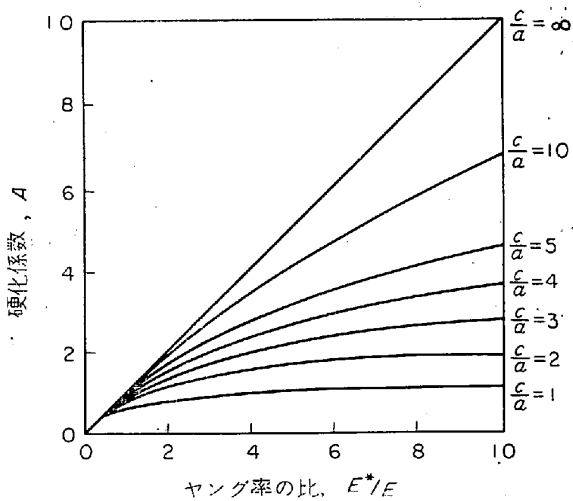


図2 長方楕円体 (形状比 c/a) を含む材料を引張つたときの加工硬化係数

楕円体が球状 ($a=c$) より細長くなればなるほど、第2相の弾性常数の影響が現われてくるのがわかるが、その極限 ($c/a = \infty$)、硬化係数 A はおよそ E^* に比例している。したがって (52) 式は

$$\sigma_A - \sigma_0 = f E^* \epsilon_p \dots\dots\dots (53)$$

と近似できる。実は (53) 式は f がかなり大きくなつても良い近似となつている (次章参照)。繊維を弾性的にひずみ ϵ_p 変形したとき、そのなかに生ずる応力は $E^* \epsilon_p$ であるから、(53) 式は複合材の強度は母相の強度と繊維の強度を単純に足し合わせたものとなることを示し、混合則という一種の経験則を正当化している¹⁷⁾。しかし、混合則はあくまで便宜的なものであり、形状比 c/a が小さくなればなるほどそれがあてはまらなくなることを Fig. 2 は示している。

ここで母相と第2相の弾性的な係り合いの度合いを計る尺度として、(23)、(24) 式より

$$\gamma \equiv \frac{\text{母相中にのみたくわえられた弾性エネルギー}}{\text{第2相に基づく全弾性エネルギー}} = \frac{(-V/2) \sigma_{ij}^I e_{ij}^C}{(-V/2) \sigma_{ij}^I e_{ij}^{T*}} \dots\dots\dots (54)$$

という値を定義すると、繊維の場合には

$$\gamma = (1+\nu) (1-2\nu)^2 E E^* / [(1+\nu^*) (1-2\nu^*) E + (1+\nu) E^*] [3(1-2\nu^*) E + 2(1+\nu) E^*] \dots\dots (55)$$

となる。この γ は E^*/E が大きくなると 0 に近づき、 $E^*/E=1$ のときでも $\gamma \approx 0.02$ である。すなわち、繊維強化材料の場合には弾性エネルギーはほとんど全部繊維中にたくわえられて、母相と繊維との係り合いは非常に少なくなつているところに (53) 式の根拠があると考えられる。これに反して、球状介在物の場合には、(54) 式の γ は

$$\gamma = (8-10\nu) (1+\nu) E^* / [(7-5\nu) (1+\nu^*) E + (8-10\nu) (1+\nu) E^*] \dots\dots\dots (56)$$

と表わせる。この場合、 $E^*/E=1$ のときには $\gamma \approx 0.5$ で

あるが、 E^*/E が大きくなると γ は 1 に近づく。すなわち E^*/E が大きくなるにしたがつて、母相中の弾性的な変形で吸収されてしまう。そのため、ある程度 E^*/E が大きくなると、硬化率は第2相の硬さの影響を受けなくなつてくる。

3.3 第2相の並び方と硬化挙動

3.1 の考え方によると、硬化率は塑性変形によつて第2相に相対的に導入された misfit ひずみに依存して行くわけであるが、この misfit ひずみは当然、第2相と塑性変形の間との相対的な向き相違によつて異なつて行く。そのため、3.2 で述べた繊維強化型合金の例をとれば、繊維が引張り軸に対して傾斜すると硬化率が急速に低下するという現象がでてくる。逆に、塑性変形様式自身が第2相の向きによつて規制されてくることも予想される。本節では、塑性と硬化率の異方性の問題を上記の繊維強化型合金の場合につき議論する。ついで、そのような異方性も第2相の向きもまったくランダムになつた場合にはどのように平均化されてしまうかという問題を考える¹⁸⁾。

一般的に、(10) 式の楕円体の主軸に一致させて座標系をとつたとき、母相が受けた塑性ひずみを e_{ij}^* とする。ただし、このひずみは塑性変形に際し、体積一定の条件 $e_{ii}^* = 0$ を満足する。第2相の中の misfit ひずみ e_{ij}^{T*} は $-e_{ij}^*$ と評価でき、(17) 式より内部応力は σ_{ij}^I は e_{ij}^{T*} または e_{ij}^* の一次式で表わされるので、(23) 式の弾性エネルギーは

$$E_{el} = - (V/2) \sigma_{ij}^I e_{ij}^{T*} = Vg(e_{ij}^{T*} e_{ij}^{T*}) = Vg(e_{ij}^* e_{ij}^*) = VE(A_1 e_{11}^{*2} + A_2 e_{33}^{*2} + A_3 e_{33}^{*2} + A_4 e_{12}^{*2} + A_5 e_{23}^{*2} + A_6 e_{31}^{*2}) \dots\dots\dots (57)$$

という形で表わせる。ここで係数 A_i は母相と第2相の弾性常数および S_{ijkl} の関数である。任意の方向を向いた第2相 V_i については、座標系を楕円体の主軸に一致させるように移動回転させてやればよい。その際、第2相の受ける misfit ひずみ $e_{pq}^{T*} = -e_{pq}^*$ ももとの座標系から変換する必要がある。したがって、第2相が多数含有する試料単位体積当たりの弾性エネルギー E_{el}^0 は、(57) 式のひずみの座標変換を行なつて、(41)、(51) 式と同様に

$$E_{el}^0 = (1/V_0) \sum_{i=1}^N V_i g(e_{pq}^{T*} e_{pq}^{T*}) = (1/V_0) \sum_{i=1}^N V_i g(e_{pq}^* e_{pq}^*) = (1/V_0) \sum_{i=1}^N V_i g(\alpha_{ipm}^i \alpha_{qn}^i \alpha_{pk}^i \alpha_{ql}^i e_{mn}^* e_{kl}^*) \dots\dots\dots (58)$$

となる。(p, q は 1, 2, 3 で加え合わせない)。ここで α_{mn}^i はもとの座標系の x_n 軸が任意の座標系の x_m^i

軸に対してなす方向である。

ここで繊維がそろって引張り軸(x_3 軸)に対して、角度 φ をなし、 $x_1=0$ に平行な面内に横たわつているとする。この試料を引張り方向に一定応力 σ_A でひずみ $\epsilon_{33}^* = \epsilon_P$ を与えたとき、試料中に生じるそのほかのひずみを便宜上 $r = -\epsilon_{22}^*/\epsilon_{33}^* = 1 + \epsilon_{11}^*/\epsilon_{33}^*$, $p = \epsilon_{23}^*/\epsilon_{33}^*$, $q = \epsilon_{13}^*/\epsilon_{33}^*$ とすると、(58)式の弾性エネルギーは

$$E_{el}^0 = (f/2) (K_1 + K_2 r^2 + K_3 p^2 + K_4 q^2 + K_5 r p + K_6 r + K_7 p) E \epsilon_P^2 \dots\dots\dots (59)$$

となる。ここで係数 K_i は(57)式の係数 A_i と角度 φ の関数である。したがって、この試料を变形する際、(42)式の条件 $\delta G = 0$ を満足しなければならないが、そのためには φ を一定とすると E_{el}^0 は ϵ_P , r , p , q の関数であり、外力の仕事 $W = (\sigma_A - \sigma_0) \epsilon_P$ は ϵ_P のみの関数であるから、

$$\left. \begin{aligned} (\partial E_{el}^0 / \partial r)_{\epsilon_P, p, q} &= (\partial E_{el}^0 / \partial p)_{\epsilon_P, r, q} \\ &= (\partial E_{el}^0 / \partial q)_{\epsilon_P, r, p} = 0 \\ (\partial W / \partial \epsilon_P)_{p, q, r} &= \sigma_A - \sigma_0 \\ &= (\partial E_{el}^0 / \partial \epsilon_P)_{p, q, r} = f A E \epsilon_P \end{aligned} \right\} \dots\dots (60)$$

を満足する必要がある。ただし摩擦力 σ_0 は変形様式によつて変化しないものと仮定する。

Fig. 3 には (60) 式を満足する硬化係数 A を繊維の傾き角 φ を変数にとつて、繊維の硬さ $E^*/E = 3$ と 1 の場合を計算した結果を実線で図示した¹⁸⁾。いずれの場合も繊維が引張り軸より傾いてくると硬化率が低下し、 E^*/E が大きくなるほどその低下の割合は大きい。しかし、 $\varphi = 45^\circ$ を越えると A はほとんど変動せず、しかもその値は繊維の硬さにも大きく依存しない。このことは、塑性ひずみが引張り軸に $\epsilon_{33}^* = \epsilon_P$ 、その直角方向に $\epsilon_{11}^* = \epsilon_{22}^* = -\epsilon_P/2$ の一様変形が起こると仮定して計算した硬化係数 (Fig. 3 の点線) と比べて見るとわかるように、塑性変形に異方性がでてくるのが原因である。すなわち、もつとも内部応力の大きくなる繊維軸方向の変形が抑制されるため、変形は $\epsilon_{33}^* = \epsilon_P$, $\epsilon_{11}^* \approx -\epsilon_P$, $\epsilon_{22}^* \approx 0$ の平面ひずみ状態に近づいてくるので、硬化率は傾き角

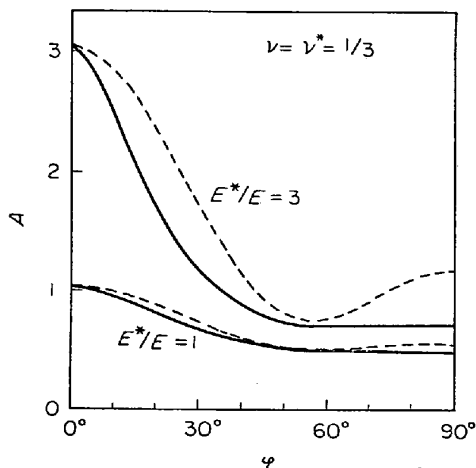


図 3 繊維の傾き角 (φ) の硬化係数に対する影響

φ や弾性常数に影響されなくなる。

つぎに第 2 相がでたらめに分布している場合を考える。第 2 相は同一の形をし、それらの向いている方向はまったくでたらめに分布し、その分布の仕方はどの方向をとつても同様とする。この場合、第 2 相の数が十分多いときには、(58)式の計算は $\alpha^{i_{mn}}$ が連続的に変化すると考え積分形にしても十分な近似となる。その結果は、

$$E_{el}^0 = f \bar{A} E e_{ij}^* e_{ij}^* \quad \bar{A} = (2/15) (A_1 + A_2 + A_3) + (1/10) (A_4 + A_5 + A_6) \dots\dots\dots (61)$$

となる。ここで \bar{A} の値は(57)式を参照すると、もとの座標系の採り方に依存せず、第 2 相の形と弾性常数、母相の弾性常数のみに依存することを注意したい。

普通の多結晶の引張り試験では、多すべり系が均一に働くので、塑性ひずみは引張り軸方向に ϵ_P 、その直角方向に軸対称に $-\epsilon_P/2$ となることはあたりまえのこととして受け入れられている。実はこのようにひずむときにもつとも(61)式の弾性エネルギーは低くなることはつぎのように簡単に証明できる。引張り方向のひずみ ϵ_P が与えられたとき、その直角方向の塑性ひずみは体積一定の条件より、 $\alpha \epsilon_P$, $-(1+\alpha) \epsilon_P$ となる。(61)式は

$$E_{el}^0 = f \bar{A} E [\epsilon_P^2 + \alpha^2 \epsilon_P^2 + (1+\alpha)^2 \epsilon_P^2] \dots\dots\dots (62)$$

となるが、これは $\alpha = -(1+\alpha) = -1/2$ のとき最小である。

単結晶を引張つたときには 1 すべり系しか働かないことも考えられる。しかしこのとき多すべり系が働いたときのような変形状態にならないので、(62)式の弾性エネルギーの最小値より必ず高くなる。そのため第 2 相を含有する試料を引張つたときには、多すべり系が働いた方がエネルギー的には有利となる。このことは、分散強化合金はたとえ単結晶でも多結晶を引張つたときと同じようなすべり挙動を示すという種々の実験事実¹⁹⁾ を説明するものと考えられる。

(61)式はさらに母相が受けた全等価ひずみ²⁰⁾

$$\bar{\epsilon} = [(2/3) e_{ij}^* e_{ij}^*]^{1/2} \dots\dots\dots (63)$$

が等しければ、でたらめに並んだ第 2 相に基づく試料の弾性エネルギーは変形様式が異なつても等しくなることを示している。たとえば、ねじり試験で得た結果と引張り試験で得た結果を比較する問題を考えてみる。(63)式より単純せん断ひずみ γ_P は等価ひずみに直すと $\bar{\epsilon} = \gamma_P / \sqrt{3}$ となる。(45)式を参照して、(61)式を使うとせん断変形の際の硬化率は

$$d\tau_A / d\gamma_P = f \bar{A} E \dots\dots\dots (64)$$

となるので、等価ひずみに直して

$$d\tau_A / d\bar{\epsilon} = \sqrt{3} f \bar{A} E \dots\dots\dots (65)$$

となる。一方、引張り試験の場合は(52)式を参照して硬化率は

$$d\sigma_A / d\epsilon_P \equiv d\sigma_A / d\bar{\epsilon} = 3f \bar{A} E \dots\dots\dots (66)$$

と求まる。したがって、引張り試験とねじり試験の結果

が同じ硬化率を与えるためには、(65)、(66)式を比べて応力は

$$\sigma_A = \sqrt{3} \tau_A \dots\dots\dots (67)$$

と評価すればよいことになる。これは応力は一般的に等価応力 $\bar{\sigma}^{(20)}$

$$\bar{\sigma} = [(3/2) \sigma_{ij}' \sigma_{ij}']^{1/2}$$

$$\sigma_{ij}' = \sigma_{ij} - (1/3) \sigma \delta_{ij} \dots\dots\dots (68)$$

で評価してやり、ひずみは(63)式の全等価ひずみで計れば変形様式によらない一定の硬化率を得ることを示していると思われる。

つぎに具体的に繊維状 ((10)式で $a=b \ll c$) あるいは円板状 ($a=b \gg c$) の第2相がまつたくでたらめの向きをもって含有している試料を引張ったときの硬化係数 $A = 3\bar{A}$ を(57)(61)式より計算した結果を図4に第2相の硬さ E^*/E を横軸にとって点線で示した ($\nu = \nu^* = 1/3$)。図4の上方の実線は第2相が引張り軸に平行に並んだときの硬化係数であり¹⁹⁾、下方の実線は球の場合のそれである。円板の場合ではたらめに並ぶと方向が一定のとき

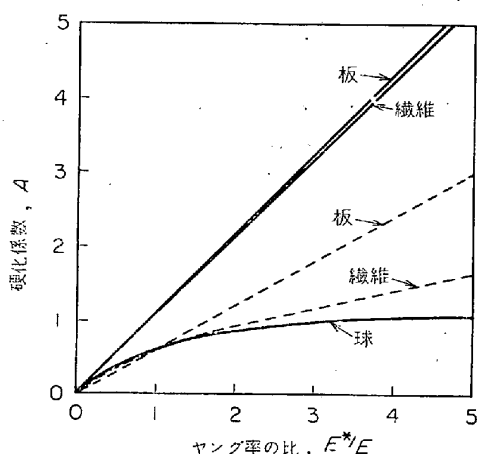


図4 第2相の並び方の硬化係数に対する影響。実線：引張り軸に平行に並んだ介在物。点線：でたらめに並んだ介在物

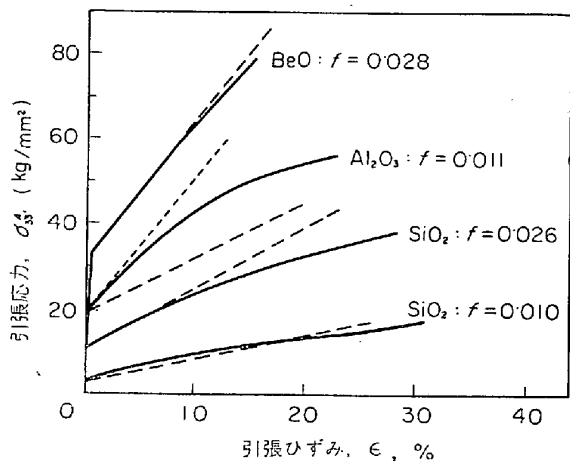


図5 Cu-SiO₂ 合金の引張応力-ひずみ曲線

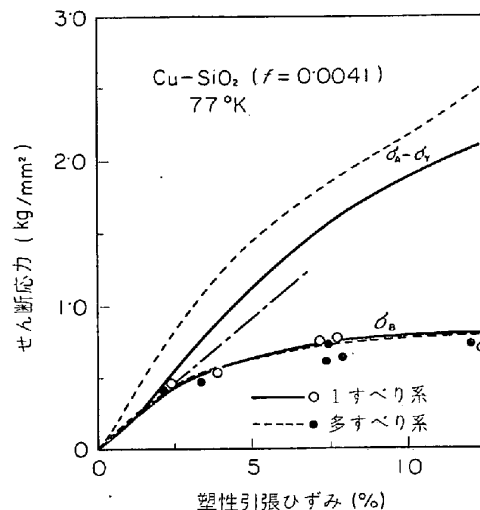


図6 Cu-SiO₂ 合金の変形応力に対するり系の影響

の値の約3/5となる。繊維の場合は方向性の影響はさらに大きく、ほとんど球の硬化率と変わらなくなってくる。なお第2相の弾性常数が母相のそれに等しいときには、第2相がまつたくでたらめな方向に分布していると形に関係なく硬化係数は球の場合のAに等しくなる。この場合には形状の変化に基づく内部応力のかたよりは正にも負にもなつてたがいに打ち消し合い、平均として球の場合と同じ弾性状態となるものと考えられる。

3.4 実験との比較

Fig. 5は内部酸化で作成した種々の酸化物粒子で強化した銅の単結晶を77°Kで引張ったときの応力-ひずみ曲線でASHBYの実験である²¹⁾²²⁾。これらの曲線は明らかに直線硬化を示している。図中鎖線は理論曲線ですべりは多すべり系が働くと考え、第2相の形を球形と仮定して計算したものである¹⁹⁾。従来、これらの合金の硬化挙動の相違は第2相の大きさの相違に基づくとしてされていたようであるが¹⁹⁾、これは第2相の量と弾性常数の相違に基づくことがよくわかる。たとえば同じSiO₂で強化した銅の硬化率を比較すると第2相の量fに比例している。また同じ程度の第2相の量で比べるとBeO (f=0.028, E*/E=3)とSiO₂ (f=0.026, E*/E=0.6)の場合、弾性常数の相違が硬化率の相違として現われている。Al₂O₃の場合は形状は三角形の板状をしているので正確な計算ができないが、実験値は第2相を球と仮定して計算した値(鎖線)と円板がでたらめに分布していると考えて計算した値(点線)の間にはさまれている。

Fig. 6もSiO₂で強化した銅を77°Kで引張り変形したときの硬化曲線で成田の行なつた実験である²³⁾。第2相の含有量が非常に小さくなると(f=0.0041)、母相の摩擦力の変化も無視できなくなつて、1すべり系のみが働く方向に切り出した試料(実線)と2すべり系が働く方向に切り出した試料(点線)とでは降伏してからの硬化挙動 $\sigma_A - \sigma_B$ は異なつてくる(σ_A は変形応力)。しか

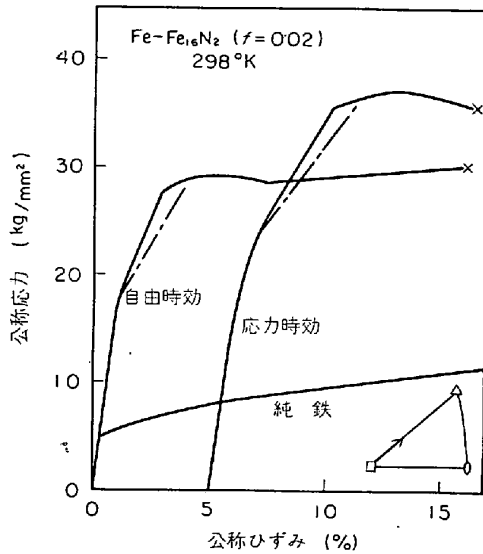


図 7 Fe₁₆N₂ の析出状態を変えた 2 種類の鉄と純鉄の引張応力-ひずみ曲線

し、いわゆる長範囲力 σ_B をバウシinger 効果を利用して求めると両者とも同じ曲線で表わされて、その立ち上がりの勾配は計算値 (一点鎖線) と一致している。なお彼は 1 すべり系が働く方向に切り出した試料でも第 2 相の量が増加すると ($f=0.0091$)、多すべり系が働いてしまうことも見いだしている。

Fig. 7 は窒化鉄を析出させた鉄の単結晶を室温で引張り変形した柴田の実験である²⁴⁾。窒化鉄は (100) 面に板状に析出するが、外力を加えた状態で析出させるとある定まった (100) 面に析出してくる。外力を加えて析出させた試料 (応力時効) も外力を加えずに任意の (100) 面にでたらめに析出させた試料 (自由時効) も変形のごく初期を除いて直線的な硬化を示す。それらの硬化率は計算では (一点鎖線)、後者の方が前者より高いと予測されるが、実験でもその傾向はでている。柴田はさらにこの合金では、直線硬化域で多すべり系が働いていること、硬化率が急激に低下するとともにすべり面が回転して 1 すべり系のみが働きだすこと、純鉄 (下方の実線) では変形のごく初期に 1 すべり系のみが働いてしまうことを見出している。すなわち、析出物は多すべり系を誘起するという 3.3 での予測を裏づけている。

4. 第 2 相の量が多くなつたときの硬化

4.1 弾性常数

第 2 相の量 f が大きくなると、複合材料の弾性常数や硬化率を求める問題は非常にむずかしくなってくる。それはある第 2 相のもつ応力場とほかの第 2 相のもつ応力場がたがいに重なり合ってくるので、その効果まで考えなければならないからである。この計算は第 2 相の場所を定めてやらないとできず、正確に行なうことは非常にむずかしいであろう。しかし、第 2 相の数が非常に多く

なると、ある第 2 相のまわりの応力とひずみは平均化して取り扱うことができるので、問題を原理的には解くことができる。ここでは第 2 相の弾性常数が母相のそれと異なっているとき、複合材料の弾性常数をどう計算していけばよいかという問題を述べる。以下弾性常数 C_{ijkl} のほかに弾性コンプライアンス S_{ijkl} を用いるが、これらはおたがいに

$$C_{ijkl}S_{klmn} = \delta_{im}\delta_{jn} \dots\dots\dots (69)$$

の関係がある。またこれらの記号で * がついたものは第 2 相、** は複合材料、何もついていないものは母相のそれを意味している。

試料に一定の外力 σ_{ij}^A を与えたとき、複合材料を一体の物体と見なすとその単位体積あたりの弾性エネルギー E_{el}^A は

$$E_{el}^A = (1/2V_0) \int_D \sigma_{ij}^A e_{ij}^A dD = (1/2) C_{ijkl} ** e_{kl}^A e_{ij}^A = (1/2) S_{ijkl} ** \sigma_{kl}^A \sigma_{ij}^A \dots\dots\dots (70)$$

で与えられる。

試料を母相と第 2 相の複合体と見なすと、その弾性エネルギーは第 2 相がないとき試料に一定の外力 σ_{ij}^A を与えたときに生ずる弾性エネルギーと第 2 相の存在により外力が乱されるために生ずるエネルギーの和となる。この後者のエネルギーは (35)~(37) 式で与えられるが、それに基づく試料にたくわえられる弾性エネルギーはこれらの式の符号を反対にしたものであるから、試料のもつ弾性エネルギー E_{el}^A は

$$E_{el}^A = (1/2) C_{ijkl} e_{kl}^A e_{ij}^A - (1/2V_0) \sum_{i=1}^N \int_{V_i} (\sigma_{ij}^A e_{ij}^A - \sigma_{ij}^A e_{ij}^A) dD = (1/2) S_{ijkl} \sigma_{kl}^A \sigma_{ij}^A - (1/2V_0) \sum_{i=1}^N (S_{mnlk} - S_{mnlk}^*) \sigma_{kl}^A \int_{V_i} \sigma_{mn}^A dD = (1/2) S_{ijkl} \sigma_{kl}^A \sigma_{ij}^A - (f/2) (S_{mnlk} - S_{mnlk}^*) \sigma_{kl}^A \overline{\sigma_{mn}^A} \dots\dots\dots (71)$$

と求めることができる。ここで $\overline{\sigma_{mn}^A} = (1/V_i) \int_{V_i} \sigma_{mn}^A dV$ は第 2 相 V_i 中での応力の平均値である。(70) 式と (71) 式は等しくなければならないので、これらの式を応力 σ_{ij}^A で微分することにより

$$S_{ijkl} ** \equiv \partial E_{el}^A / \partial \sigma_{ij}^A \partial \sigma_{kl}^A = \partial E_{el}^A / \partial \sigma_{ij}^A \partial \sigma_{kl}^A \quad (72)$$

の関係から複合材料の弾性コンプライアンスが求まり、(60) 式を使つてその弾性常数が求まる²⁵⁾²⁶⁾。

問題は (71) 式の $\overline{\sigma_{ij}^A}$ であるが、これは V_i が複合材料の弾性常数をもつ等質の無限体の母相に取り囲まれ、かつ試料が一様な応力 σ_{ij}^A を受けたとき第 2 相の中に生ずる応力 σ_{ij}^A で近似することによつて求めることができる。この応力は第 2 相が楕円体のときにはその中では一様であり、(33) 式を $C_{ijkl} = C_{ijkl} **$ と置き換え、 $e_{ij}^A = S_{ijkl} ** \sigma_{kl}^A$ と与えることによつて計算できる。この近似の仕方は KRÖNER によつて、個々の単結晶の弾性常数を知つて多結晶の弾性常数を計算する問題を解く際に

用いられたもので、この近似を使つて複合材料の弾性常数を求める方法を HILL は self-consistent 法と呼んでいる²⁵⁾²⁷⁾。

(72)式を解けば原理的には複合材料の弾性常数は求まるのであるが、実際の計算はなかなかやつかいである。ここでもつとも簡単な例として、第2相も母相も等方等質でかつ第2相が球状をしている場合の弾性常数の計算の結果を述べる²⁸⁾。試料に一樣なせん断応力 τ_A が与えられたとすると、(33)式に $\gamma_A = \tau_A / \mu^{**}$ を代入し、 $\mu = \mu^{**}$ と置き、(12)式を使つて

$$\bar{\tau}_A = \{ [15(1-\nu^{**})\mu^*] / [(7-5\nu^{**})\mu^{**} + (8-10\nu^{**})\mu^*] \} \tau_A \dots\dots\dots (73)$$

と求めることができる。(73)、(71)式を(72)式に代入して

$$\frac{1}{\mu^{**}} = \frac{1}{\mu} - f \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu^*} \right) \frac{15(1-\nu^{**})\mu^*}{(7-5\nu^{**})\mu^{**} + (8-10\nu^{**})\mu^*} \dots\dots\dots (74)$$

と求まる。

まったく同様な計算を試料に一定の静水圧を与えた場合について行ない、複合材料の体積弾性コンプライアンス $1/\kappa^{**}$ を求めると、

$$\frac{1}{\kappa^{**}} = \frac{1}{\kappa} - f \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa^*} \right) \frac{3(1-\nu^{**})\kappa^*}{2\kappa^{**}(1-2\nu^{**}) + (1+\nu^{**})\kappa^*} \dots\dots\dots (75)$$

となる。等方体の場合には、せん断弾性常数、体積弾性率、ポアソン比との間に一般的に

$$3\kappa = 2\mu(1+\nu)/(1-2\nu) = E/(1-2\nu) \dots\dots\dots (76)$$

の関係があるので、(76)式を(75)式に代入し、(74)式と組み合わせることによつて、 μ^{**} と ν^{**} を求めることができる。

第2相の形が球状でなくなると、第2相と母相が等方体でも複合材料が必ずしも等方体となるとは限らないので、 $\bar{\sigma}_{ij}^A$ を求めるため(33)式を解く際、(11)式の Eshelby のテンソル S_{ijkl} は使えない。もつと一般的で、母相が異方体のときにも使える木下と村のテンソルを使つて表現されるものとなる¹⁸⁾。しかし、第2相の量 f が非常に小さいときには、 $\bar{\sigma}_{ij}^A$ を求める際、母相を複合材料と見なくともよく母相そのままと見れるから、母相が等方体ならば(71)式は簡単に計算できる。実はこれは Eshelby の近似方法である¹¹⁾。繊維がそろつて並んでいるとき、その軸方向に引張つたときのヤング率をこの近似方法で解いてみると

$$E^{**} = fE^* + (1-f)E + 2f(\nu-\nu^*)^2EE^* / [(1+\nu^*)(1-2\nu^*)E + (1+\nu)E^*] \dots\dots\dots (77)$$

となる。繊維と母相のポアソン比が等しいときには、(77)式の第3項はゼロとなるのでいわゆる混合則が成り立つ。

4.2 平均的な内部応力

介在物の含有量が多くなつたときの硬化率を計算する前に、前章で硬化応力はエネルギーのつり合いを基とし求めたが、一体この応力を母相中の転位がどう感じるかという問題にふれておく。これはまた物体中に平均にかかっている内部応力を求める問題であるが、これには物体が有限の大きさをもっていることと密接な関係がある。すなわち、実在の物体中の応力場 σ_{ij} は、2. で求めたように無限体を仮定したときの応力場 σ_{ij}^∞ と、物体が有限であるため表面の影響によつて生ずる Image 応力場 σ_{ij}^{Im} に分けて、

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^\infty + \sigma_{ij}^{Im} \dots\dots\dots (78)$$

と書ける¹⁶⁾。この応力は物体の表面 $|D|$ において内部応力の条件 $\sigma_{ij}n_j = 0$ を満足しなければならない。

一般的に内部応力の物体 D 中の総和はゼロであることは、上記の条件や(3)式を使つてつぎのように容易に証明される。

$$\int_D \sigma_{ij} dD = \int_D \sigma_{ik} (\partial x_j / \partial x_k) dD = \int_{|D|} \sigma_{ik} x_j n_k dS - \int_D \sigma_{ik,k} dD = 0 \dots\dots\dots (79)$$

簡単のために、十分多くの楕円体第2相 $V_i (i=1, 2, 3 \dots N)$ は同形で同じ向きをもつて一樣に分布しており、それらの弾性常数は母相のそれと等しいと仮定する。さらにこれらの第2相を含有している物体 D も楕円体で近似できるとする。また第2相はすべて一樣な misfit ひずみ e_{pq}^T をもつており、任意の第2相 V_i に基づく内部応力を σ_{pq}^i とすると、Image 応力の物体全体での総和は、(79)式と(78)式より

$$\int_D \sigma_{pq} dD = - \int_D \sigma_{pq}^\infty dD = - \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \sigma_{pq}^i dD - \sum_{i=1}^N \int_{D-V_i} \sigma_{pq}^\infty dD \dots (80)$$

となる。

(80)式の右辺の第1項は無限体を仮定したときの第2相 V_i 中の内部応力の総和であるが、(16)式と(9)式より容易に

$$- \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \sigma_{pq}^\infty dD = - C_{pqkl} (S_{klmnp} e_{mn}^T - e_{kl}^T) \sum_{i=1}^N V_i \dots\dots\dots (81)$$

と求まる。

(80)式の右辺の第2項は V_i の外の内部応力をおのの独立に足し合わせたものである。(7)式のひずみを V_i を除いた領域 $D-V_i$ で積分すると

$$\int_{D-V_i} e_{ij}^\infty(x') dD(x') = - e_{mn}^T \int_{D-V_i} C_{mnpq} [G_{ki,lj}(x, x') + G_{kj,li}(x, x')] / 2dD(x) dD(x') \\ = - e_{mn}^T \int_{V_i} \int_D C_{mnpq} [G_{ki,lj}(x, x') + G_{kj,li}(x, x')] / 2dD(x') dD(x) \\ + e_{mn}^T \int_{V_i} \int_{V_i} C_{mnpq} [G_{ki,lj}(x, x')]$$

+G_{kj,li}(x, x')]/2dD(x')dD(x) (82)
 となる. ここで $\partial G_{ij}/\partial x_p \partial x_q = \partial G_{ij}/\partial x'_p / \partial x'_q$ なる関係を利用して, 積分の順序を取り換えた. 上記の積分の右辺の第 1 項の x' に関する積分は ESHELBY により¹¹⁾, x が D の中に含まれているときには一様になり, 第 2 項でも同様であるから,

$$\int_{D-V_1} e_{ij}^{\infty} dD = V_1 (S_{ijkl}^0 - S_{ijkl}) e_{kl}^T \dots\dots\dots (83)$$

で表わされる. ここで S_{ijkl}^0, S_{ijkl} は楕円体物体 D , 第 2 相 V_1 に対応した (9) 式の ESHELBY のテンソルである. したがって, (83) 式を (80) 式の第 2 項に代入して

$$-\sum_{i=1}^N \int_{D-V_1} \sigma^{ipq} dD = -C_{pqkl} (S_{klmn}^0 - S_{klmn}) e_{mn}^T \sum_{i=1}^N V_i \dots\dots\dots (84)$$

と求めることができる.

(81), (84) 式を (80) 式に代入し, Image 応力の総和を求め, 試料 D の体積 V_0 で平均すると

$$\bar{\sigma}_{pq}^{Im} = -f C_{pqkl} (S_{klmn}^0 e_{mn}^T - e_{kl}^T) \dots\dots\dots (85)$$

となる. この結果は (16) 式と対応させればわかるように, 無限体の中の領域 D に一様な塑性ひずみ $f e_{ij}^T$ を与えたとき, 領域 D の中には一様な応力 $-\bar{\sigma}_{pq}^{Im}$ が生じるが, この領域を無限体から切り出して自由にするときそれは平均的に $\bar{\sigma}_{pq}^{Im}$ の応力を受けると見なすことができる.

試料に平均的に働いている応力 $\bar{\sigma}_{pq}$ は

$$\bar{\sigma}_{pq} = \bar{\sigma}_{pq}^{Im} + (1/V_0) \sum_{i=1}^N \int_{D-V_1} \sigma^{ipq} dD = -f C_{pqkl} (S_{klmn}^0 e_{mn}^T - e_{kl}^T) = -f \sigma_{pq}^I \dots (86)$$

で与えられ, かつ試料中では一様であることが証明できるがここではそれは省略する¹⁴⁾²⁹⁾. なお σ_{pq}^I は無限体を仮定したとき, 第 2 相中に生ずる応力である. 第 2 相の弾性常数が母相のそれと異なるときには, (86) 式の e_{ij}^T は等価第 2 相の受ける塑性ひずみと考え, σ_{ij}^I は (17) 式のそれを使えばよい.

特殊な場合として, 第 2 相の形が試料の形と相似のときには $S_{ijkl}^0 = S_{ijkl}$ であるから, (84) 式はゼロとなるので (86) 式の $\bar{\sigma}_{pq}$ は (85) 式の $\bar{\sigma}_{pq}^{Im}$ に等しくなる. BROWN と STOBBS は 3.1 で述べたものと同じモデルを使つて, すなわち, 球状第 2 相を含む試料が単純せん断変形 γ_p を受ける場合について, 第 2 相の外の応力場 (7) 式に (8) 式を代入することによつて具体的に計算して, (84) 式がゼロとなることを証明したという⁷⁾. そして彼らはこの平均化された Image 応力は塑性変形方向とは反対方向を向いているから逆応力として試料の変形に抗して働くので硬化応力となると結論した. 実は彼らの証明は暗黙のうちに試料自体も球形をしていると仮定しない限り成立しないが, 一般的には, 実際に母相中の転位の運動に抗して働くのは (86) 式の $\bar{\sigma}_{pq}$ である.

BROWN らの理論に従うと外力とひずみの関係は, (39) 式の記号を使いそれを (86) 式に代入すると

$$\tau_A - \tau_0 = -\bar{\sigma}_{13} = f A \mu \gamma_p \dots\dots\dots (87)$$

となる. (87) 式は (45) 式とまったく同じ結果を与えるが, これは当然であることはさらに繊維強化型合金を例にとり説明する.

3.2 で述べたように繊維強化型合金を引張つて塑性ひずみ ϵ_p を考えたとすると (87) 式より平均内部応力は引張り軸方向に $\bar{\sigma}_{33} = -f \sigma_{33}^I$, その直角方向に $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} = -f \sigma_{11}^I = -f \sigma_{22}^I$ 働く. さらにこれらの平均内部応力に抗して $\delta \epsilon_p$ 変化させるのに必要な試料単位体積あたりの仕事 δW は (51) 式を参照し, f が 1 に比べて非常に小さいとすると

$$\delta W = -(\bar{\sigma}_{33} \delta \epsilon_p - \bar{\sigma}_{11} \delta \epsilon_p / 2 - \bar{\sigma}_{22} \delta \epsilon_p / 2) = f(\sigma_{33}^I - \sigma_{11}^I) \delta \epsilon_p = f A E \epsilon_p \delta \epsilon_p \dots\dots\dots (88)$$

となる. 外力がなす仕事は δW と等しくならなければならないので, (45) 式を導くと同様な手順で, 外力と塑性ひずみの関係 (52) 式を導く. この考え方は, f が小さいときには 3.1 の考え方とまったく一致していることは, σ_{ij}^I は (17) 式より $e_{ij}^{T*} = -e_{ij}^*$ の 1 次式で表わされるので

$$E_{e1}^0 = -\int_0^{e_{ij}^{T*}} \bar{\sigma}_{ij} \delta e_{ij}^* = -f \int_0^{e_{ij}^{T*}} \sigma_{ij}^I \delta e_{ij}^{T*} = -f \sigma_{ij}^I e_{ij}^{T*} / 2 \dots\dots\dots (89)$$

となり, 試料のもつ塑性エネルギーは (23) 式と同じ形式に導かれることを意味している.

なお BROWN らは 3.1 で述べたエネルギーのつり合いを考えた理論をよく理解しなかつたようである. また, (87) 式の計算を実験と比較するとき誤りをおかし, さらに第 2 相の弾性常数の効果を見逃したため, エネルギーのつり合いから求まる硬化率の 3 倍の値を得ている. これがため, 彼らは彼らの理論と本稿の理論と異なるものだという理解に導いたものと思われる⁷⁾. しかし, 実は彼らの理論は本稿の理論とは本質的には変わらないばかりでなく, ごく特殊な場合について計算しているにすぎない. すなわち, たしかに母相中の転位は (86) 式の平均内部応力に基づく逆応力に抗してすべらなければならないのであるが, 逆応力がそのまま硬化応力となるとは限らないのである. たとえば (88) 式の繊維強化型合金の例をみればわかるように, 引張り軸方向に対する逆応力は (50) 式より $f \sigma_{33}^I = f A' E \epsilon_p$ であるが, 硬化応力は (52) 式より $f A E \epsilon_p$ となり, $A > A'$ であるので逆応力は硬化応力より小さい. それは硬化応力には引張り軸と直角方向に働く逆応力に対する仕事も寄与してくるからである. (88) 式の例では, A' と A の差は小さいが, 球状第 2 相を含む材料を引張つた場合は $A' = (2/3) A$ となるのでその差は無視できない. これは, 塑性変形はいろいろなすべり系でのせん断変形の重なりで起こるという問題の必然的帰結である. なお BROWN らの考えたせん断変形

の場合には、塑性ひずみが一成分しかないため、たまたま逆応力の生の値と硬化応力は一致している。

4.3 硬化率

第2相の量 f が大きくなると内部応力に基づく弾性エネルギーの計算には、(86)式の平均的な内部応力の影響を考慮しなければならない。misfit ひずみは第2相 V_i ($i=1, 2, \dots, N$) にのみ均一に分布するから、内部応力に基づく試料単位体積あたりの弾性エネルギーは(22)式より

$$E_{el}^0 = -(1/2V_0) \int_D \sigma_{pq} e_{pq}^T dD$$

$$= -(1/2V_0) \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \sigma_{pq}^i e_{pq}^T dD \dots\dots\dots (90)$$

となる。ここで σ_{pq}^i は第2相 V_i 中に生じている内部応力場であるが、これは無限体を仮定したとき第2相 V_i 自身によつて生ずる応力、ほかの第2相から直接およぼしてくる応力および Image 応力より成つている。ところが後者の2つの応力の和は、第2相が同じ形の楕円体で同じ向きをしているなら(86)式の平均内部応力で与えられる。したがつて、

$$\sigma_{pq}^i = \sigma_{pq}^\infty + \bar{\sigma}_{pq} = \sigma_{pq}^\infty - f \sigma_{pq}^I \dots\dots\dots (91)$$

を(90)式に代入し、かつ $\bar{\sigma}_{pq}$ は試料内で一様であること、第2相が楕円体であることに注意すると

$$E_{el}^0 = -(f/2) \sigma_{ij}^I e_{ij}^T + (f^2/2) \sigma_{ij}^I e_{ij}^T \dots\dots\dots (92)$$

と求めることができる。この式の第2項は、(27)式の σ_{ij}^A を $\bar{\sigma}_{ij}$ で置き換えて導いた。なお、(92)式のエネルギーを計算する際、第2相の弾性常数が母相のそれと異なつているときには、ある第2相の内部応力場がほかの第2相の inhomogeneity 効果によつて乱されるので、4.1でのべた KRÖNER の近似を使う必要がある²⁷⁾。すなわち、(17)式での σ_{ij}^I 、 e_{ij}^T の計算は母相の弾性常数 C_{ijkl} は複合材のそれ C_{ijkl}^{**} で置き換えて行なわなければならない。

3.1で述べた球状第2相を含む試料がせん断変形を受けた場合について(92)式のエネルギーを計算する。その第1項は(40)式の $A\mu$ を $A^{**}\mu^{**}$ に置き換えればよく、ここで A^{**} は(39)式において、 $\mu = \mu^{**}$ 、 $\nu = \nu^{**}$ と置き換えたものである。(92)式の第2項は

$$-(f^2/2) \sigma_{ij}^I e_{ij}^T = -f^2 \sigma_{13}^I e_{13}^T$$

$$= -(f^2/2) C^{**} \mu^{**} \gamma_p^2 \dots\dots\dots (93)$$

$$C^{**} = 15(1-\nu^{**})(7-5\nu^{**})\mu^{*2}/$$

$$[(7-5\nu^{**})\mu^{**} + (8-10\nu^{**})\mu^*]^2$$

となる。ここで(93)式のエネルギーが負になつているのは第2相のもつ内部応力はすべて同方向を向いているのでそれらの応力場はたがいに助け合つているためである。

第2相の量が多くなるとさらに考慮しなければならないのは、内部応力があることによつて変化する外力のポテンシャルエネルギー(27)式である。外力を τ_A とすると試料単位体積あたりのその変化 E_{int}^0 は

$$E_{int}^0 = -(1/V_0) \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \sigma_{ij}^A e_{ij}^T dD$$

$$= -2f \sigma_{13}^A e_{13}^T = f B^{**} \tau_A \gamma_p$$

$$B^{**} = 15(1-\nu^{**})\mu^{**}/[(7-5\nu^{**})\mu^{**} + (8-10\nu^{**})\mu^*] \dots\dots\dots (94)$$

となる。この試料を0から γ_p まで一定外力 τ_A で塑性変形すると、介在物がないときには、外力のポテンシャルは単位体積あたり $-\tau_A \gamma_p$ 変化するはずである。ところが内部応力をもつ第2相を含有するときにはそのポテンシャルエネルギー変化は

$$-\tau_A \gamma_p + f B^{**} \tau_A = -\tau_A (1 - B^{**} f) \gamma_p \dots\dots\dots (95)$$

となる。(95)式は見方を変えるならば、第2相があるために母相の塑性変形が抑制されて本来 γ_p の変形をするところ、巨視的には塑性ひずみは

$$\gamma_p' = (1 - B^{**} f) \gamma_p \dots\dots\dots (96)$$

しか変化しないことを意味する。このことは、たとえば第2相と母相の弾性常数が等しい場合を考えると(94)式より $B^{**} = 1$ となるが、これはたんに試料全体のうち体積比 f の部分は第2相が占めていて塑性変形しないので、試料の塑性ひずみとしては $(1-f)\gamma_p$ が観測されるというごく当たり前の結果となる。

試料を γ_p より $\delta\gamma_p$ だけ変形させると増加する弾性エネルギー δE_{el}^0 は(92)式へ(40)式と(93)式を代入して微分すると

$$\delta E_{el}^0 = f A^{**} \mu^{**} \gamma_p \delta\gamma_p - f^2 C^{**} \mu^{**} \gamma_p \delta\gamma_p \dots\dots\dots (97)$$

となり、その際必要な外力の仕事は

$$\delta W = \tau_A (1 - B^{**} f) \delta\gamma_p - \tau_0 (1 - f) \delta\gamma_p \dots\dots\dots (98)$$

となる。(98)式の第2項はこの変形の際母相中で消費されるエネルギーであるが、母相は試料全体で体積比 $(1-f)$ を占めていることを考慮した。(97)、(98)式を(42)式へ代入して母相の受ける塑性ひずみと外力の関係として

$$\tau_A = (1-f)\tau_0 / (1 - B^{**} f)$$

$$+ f (A^{**} - f C^{**}) \mu^{**} \gamma_p / (1 - B^{**} f)$$

$$= (1-f)\tau_0 / (1 - B^{**} f) + f A^{**} \mu^{**} \gamma_p \dots\dots\dots (99)$$

が求まる。なおここで(39)、(93)、(94)式を見比べることにより $C^{**} = A^{**} B^{**}$ となつていることを考慮した。

なお、実際に実験データとして巨視的に観察しているひずみ γ は弾性ひずみ γ_e と(96)式の塑性ひずみ γ_p' の和である。この場合、巨視的ひずみ γ は

$$\gamma = \gamma_p' + \gamma_e = (1 - B^{**} f) \gamma_p + \tau_A / \mu^{**} \dots\dots\dots (100)$$

となるので、(99)式を整理して実測の硬化率 $d\tau_A/d\gamma$ を求めるとつぎのようになる。

$$d\tau_A/d\gamma = f A^{**} \mu^{**} / (1 - f B^{**} + f A^{**})$$

$$= f (7 - 5\nu^{**}) \mu^* \mu^{**} / [(7 - 5\nu^{**}) \mu^{**} + (8 - 10\nu^{**}) \mu^*] \dots\dots\dots (101)$$

第2相の形が球状でなくなると、4.1の弾性常数の項で述べたように、第2相と母相が等方体でも複合材は等方体とならないので、(9)式の ESHELBY のテンソルが使用できないため、上記の硬化率を求める計算はむずか

しくなる。しかし、この場合も f が小さいときは母相は複合材と見なさなくともよい近似となり割合簡単に計算できる。1 方向にそろって並んでいる繊維を含む材料をその軸方向に引張つたときの硬化率は

$$d\sigma_A/d\epsilon = fAE / (1 - Bf + fAE/E^{**}) \dots\dots\dots (102)$$

で求められる。ここで A は (51) 式で与えられ、 ϵ は実測される全引張りひずみで

$$\begin{aligned} \epsilon &= (1 - Bf)\epsilon_p + \sigma_A/E^{**} \\ B &= (E^*/E)(1 + \nu)[(1 - 2\nu^*)E + E^*] / \\ &[(1 + \nu^*)(1 - 2\nu^*)E + (1 + \nu)E^*] \dots\dots\dots (103) \end{aligned}$$

である。 E^{**} は (77) 式を用いればよい。

HILL は繊維強化型合金は母相は塑性変形をしているから、ポアソン比が $1/2$ となつたと見ることができ、繊維は弾性のままであるからポアソン比はそれよりも小さいので、繊維の軸方向に試料を引張ると両者のポアソン比の違いにより横方向の圧力がかかつたと同じ状態になると考えて、その上限と下限を与えている³⁰⁾。その下限値は

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_A}{d\epsilon} &= fE^* \\ &+ \frac{f(1+f)(1-2\nu^*)^2EE^*}{2(1+\nu^*)(1-2\nu^*)E + (1+\nu)E^* + f3(1-2\nu)E^* - 2(1+\nu^*)(1-2\nu^*)E} \dots\dots\dots (104) \end{aligned}$$

となるが、(104) 式の第 2 項は第 1 項に比べて非常に小さくなるので、(53) 式の混合則が近似的に成立することがわかる。なお (102) 式において、 $\nu = \nu^*$ のときには、機械的に母相のヤング率 E を複合材料のヤング率 $E^{**} = (1 - f)E + fE^*$ と置き換えてやると、(104) 式の HILL の式と正確に一致する。

図 8 は THOMPSON らの実験結果である³¹⁾。彼らは 1 方向に繊維状に炭化物 (体積比 $f = 0.30$) を析出させた Co-Cr 合金を引張りおよび圧縮試験をしている。点線

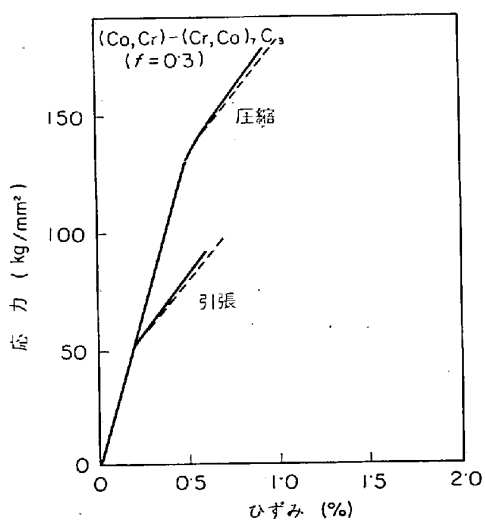


図 8 炭化物を析出した Co-Cr 共晶合金の引張りおよび圧縮応力-ひずみ曲線

は (104) 式より計算した硬化曲線であるが、実験値ときわめてよい一致を示している。なお実験によると降伏応力は圧縮による方が引張りによる場合より顕著に高くなっているが、これはいわゆる MOTT-NABARRO 効果が原因である³²⁾。すなわち、これらの試料は析出処理後急冷されて炭化物は母相との熱膨張差に基づく misfit を持っているため、その misfit による内部応力が試料の塑性変形に対して強い影響をおよぼしているのである。この MOTT-NABARRO 効果の定量的な議論については別稿で行なつていっているのでここではこれ以上ふれない²⁹⁾。

5. 直線硬化の停止

5.1 流体的な取り扱い

(39) 式や (50) 式に示したように第 2 相の近辺の内部応力は変形ひずみに比例して増加するので、ある程度変形するとその値は非常に高くなってしまう。そのため転位は第 2 相の近辺を迂回して通り抜けていつたり³³⁾³⁴⁾、第 2 相から 2 次転位を発生したりして¹⁰⁾、内部応力を緩和するか、第 2 相自体が変形してしまつたり⁴⁾、破壊を起こしてしまつたりする³⁵⁾³⁶⁾。ここでは、前者の転位の運動による内部応力緩和の問題を取り扱つてみる。本来この問題には、転位と転位のからみ合いなどの微視的な転位の運動機構が敏感に影響してくると思われるので、正確な取り扱いは困難であるが、本稿の考え方を応用してできるところまで試みてみる。

最初に材料を完全流体とみなして問題を取り扱う。簡単のために、第 2 相まわりの内部応力がある一定値に達すると、あとからその第 2 相に近づいてきた転位は適当な運動機構によつて第 2 相を迂回してすべつていつてしまいなんらの根跡を残さないと仮定する。この状態を流体と塑性体の類似性から考えると、第 2 相はあたかも流体中の剛体のような働きをなし、一樣な材料の流れは第 2 相によつて乱されると見なされる。このような流れの乱れは母相中でのエネルギーの散逸を増加させる。ESHELBY はこのエネルギー散逸の増加分は、一樣な外力が剛体の第 2 相 V によつて乱される問題と対応させて計算できることを示した¹¹⁾。すなわち (33) 式で $C_{ijkl} = \infty$ と置いて得た

$$S_{ijkl}e_{kl}^T = -e_{ij}^A \dots\dots\dots (105)$$

の関係から、母相のポアソン比 $\nu = 1/2$ 、ひずみ e_{ij}^A を塑性ひずみ速度 \dot{e}_{ij}^* に置き換えて e_{ij}^T に対応する \dot{e}_{ij}^T を求めれば、エネルギー散逸速度 \dot{E}_P が (37) 式より次式のように求まる。

$$\dot{E}_P = -V\sigma_{ij}^A \dot{e}_{ij}^T \dots\dots\dots (106)$$

ただしここで流体の場合 (34) 式に対応する弾性エネルギーは 0 となることを考慮した。

3.1 で述べた例で球状第 2 相が一樣な単純せん断ひずみ γ_p まで一定のひずみ速度 $\dot{\gamma}_p$ で受けた場合を考える。その際、第 2 相のまわりでまったく応力緩和が起こ

らないと仮定すると、第2相Vがあるために余分にしなければならない単位時間あたりの仕事は

$$VA\mu\gamma_P\delta\gamma_P + VB\tau_A\delta\gamma_P \dots \dots \dots (107)$$

で与えられる。この式の第1項は(40)式の弾性エネルギーの増加分であり、第2項は外力 τ_A と第2相のもつ内部応力との相互作用エネルギーの増加分であり、係数 B は(94)式の係数 B^{**} で与えられるが、 f が1に比べて小さいときには $\nu^{**}=\nu$, $\mu^{**}=\mu$ と考えることができる。

もし、第2相のまわりで流れが完全に迂回すると仮定すると、そのために単位時間あたりに散逸する仕事は、(105)式を(12)式に $\nu=1/2$ を代入して得た $S_{1313}=1/5$ を使って解き $\dot{\epsilon}_{13}^T$ を求め、それを(106)式へ代入することにより

$$VB'\tau_A\delta\gamma_P = V(5/2)\tau_A\delta\gamma_P \dots \dots \dots (108)$$

と求まる、 γ_P が小さいときには、(107)式の仕事の方が(108)式の仕事より小さいので、流れは一樣に起こった方がエネルギー的に有利となり、試料は(45)式で与えられる直線硬化を示す。あるひずみ $\gamma_P=\gamma_C$ を越えると(108)式の仕事の方が(107)式のエネルギーより小さくなり、材料は第2相を迂回して流れるようになると考えられ、内部応力はある値で抑えられ、試料は塑性ひずみがふえても硬化を示さなくなる。その臨界ひずみ γ_C は、(107)式と(108)式とを等しいと置き、(45)式の関係を利用しかつ f は1に比べて小さいとすると

$$\gamma_C \approx [(B'-B)/A](\tau_0/\mu) = \gamma^*(\tau_0/\mu) \dots \dots (109)$$

となる。すなわち、母相の摩擦力が高いほど直線硬化域は長くなることが予想される。

(109)式の係数 γ^* は第2相の形状、弾性常数、塑性変形に対する相対的な向きなどによつて影響を受ける。図9に扁平な楕円体((10)式で $a=b>c$)の場合について、形状比 $a/c=1$ から5まで変化させたときの係数 γ^* を図示した³⁷⁾。塑性変形は一樣なせん断が x_3 軸に垂直な面内で x_1 軸方向に起こり、第2相の弾性常数は母相のそれと同じと仮定した。ここで γ_1^* は楕円体のC軸が x_3 軸または x_1 軸方向を向いている場合、 γ_4^* はそ

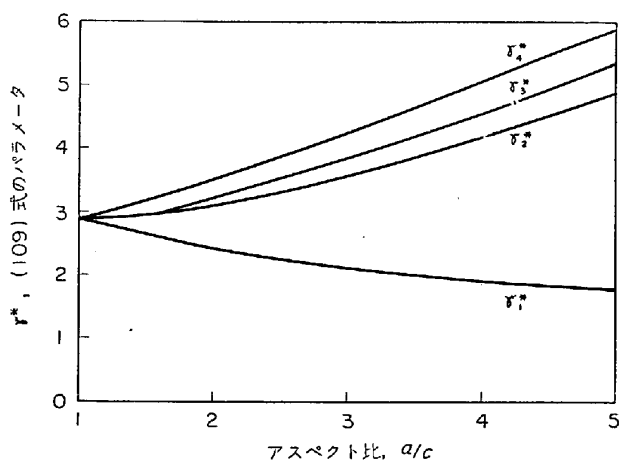


図9 扁平楕円体の場合の(109)式の係数 γ^*

れが x_2 軸方向を向いた場合、 γ_2^* と γ_3^* は x_1 または x_3 軸に対して 45° 傾いた場合の γ^* を表わす。この結果によると、第2相の形とその向きが材料の流れに対して大きな影響を与えることがわかる。楕円体が扁平になればなるほど、流れに対して平行に横たわっている第2相がある場合は流れは容易にそれを迂回しやすくなる。逆に流れ方向に平行で流れ面に直角に横たわる第2相は流れが迂回しにくく内部応力は解放されにくい。この場合、流れは第2相から少し離れたところを迂回して、第2相の見かけの形が球状に近づいた方がエネルギー的に有利となると考えられる。このことはちようど押し出し加工などにおいてダイス近辺にできるデッドメタル²⁰⁾のような部分が第2相のまわりにできる可能性があることを示す。なお第2相が硬くなると(109)式で係数 A , B が大きくなるので γ_C は小さくなり、第2相まわりの応力緩和は起こりやすくなる。

以上は材料の変形を流体のように取り扱うことを試みたものである。必ずしも厳密な方法であるとはいえないかもしれない。しかし、以下に述べるような転位の微視的な運動だけに注目するのではなく、材料の大きな挙動を直観的に理解するという面から、捨てがたいものがあるように思われる。

5.2 プリズマティックパンチングによる応力緩和

この節では応力緩和機構としての転位の運動を具体的に考慮してみる。

モデルとして図10(a)のように x_3 軸に垂直な面上をすべつてきた転位群 α が球状第2相のまわりに残したループを考え、第2相の中に導入した塑性 distortion を β_{31}^T とする。まずこの応力状態と等価な状態を(a)と異なつた転位配列で作りえないかを考えてみる。 β_{31}^T を形式的に書きかえると

$$\beta_{31}^T = (\beta_{31}^T - \beta_{13}^T)/2 + (\beta_{31}^T + \beta_{13}^T)/2 = \omega_{13B} + \epsilon_{13}^T \dots \dots \dots (110)$$

となる。ここで ω_{13}^T は x_2 軸を中心とした座標の回転を表わす成分であるが、これは物体の形の変化には関係しない。したがつて、図10(a)に $-\beta_{13}^T$, $+\beta_{13}^T$ に対応する転位群 β , β' を付け加えても、その弾性状態は変化しないはずである(塑性ひずみ分布が与えられて転位分布を求める方法は、KRÖNERによつて与えられている⁸⁾)。それは図10(b)の状態であつて、(a)とは弾性的には等価である。(b)の転位群 α と β の配列の仕方は、たんに第2相を母相に対して $2\omega_{13}$ だけ回転させているだけであつて、内部応力や変位を生じていないので Impotent な配列をしていると呼ばれている³⁸⁾。

つぎに考えられる配列は、図10(a)の座標系で β_{31}^T の塑性 distortion は座標系を(f)のように変換すると、 x_3' 軸方向に $\beta_{33}^T = \beta_{31}^T/2$, x_1' 軸方向に $\beta_{11}^T = -\beta_{31}^T/2$ を与えたときと変位は等価となるので、塑性 distortion β_{31}^T を打消すように impotent な配列をした転

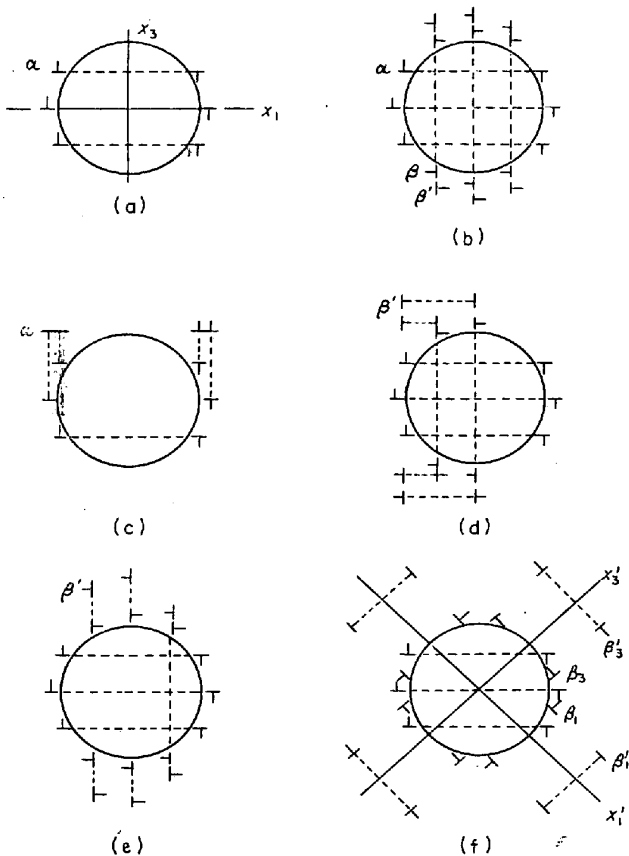


図10 第2相のまわりでの転位による応力緩和機構

位群 β_3, β_1 を導入し、 $\beta_{33}T', \beta_{11}T'$ に対応するプリズマティック転位ループ群 β_3', β_1' を発生させた場合である。

現在までに提唱されている転位による応力緩和機構として図 10(c)~(f) があげられるが³⁴⁾、ASHBY の提唱した(e)と(f)の機構から検討する¹⁰⁾。(e)は(b)の2次転位 β' が動き出して、第2相のまわりから遠ざかっていくという機構である。しかし、この機構では内部応力が低下することは期待できない。なぜなら、これらの放出されたループのかこむ体積はループが遠ざかるにつれて増加するが、そのなかで与えられる塑性 distortion は低下しないので弾性エネルギーも増加してしまう。そのうえ、図 10(a)と(b)とでは形が変化するという面からはまったく等価であることはすでに説明したが、(e)の機構が働けば働くほど試料は変形が起こる以前の形に戻ってしまうという矛盾に落ち入ってしまう。(f)はプリズマティックループ β_3', β_1' の放出による応力緩和機構である。この場合には転位の長さは常に一定に保たれているので、ループが第2相を遠ざかるにつれてループが囲む体積中の塑性 distortion は低下してくるため、内部応力に基づく弾性エネルギーも低下してくると予想される。つぎにこの機構について定量的に検討してみる。計算の都合上、図11のような模型図を考える³⁹⁾。 x_3 軸

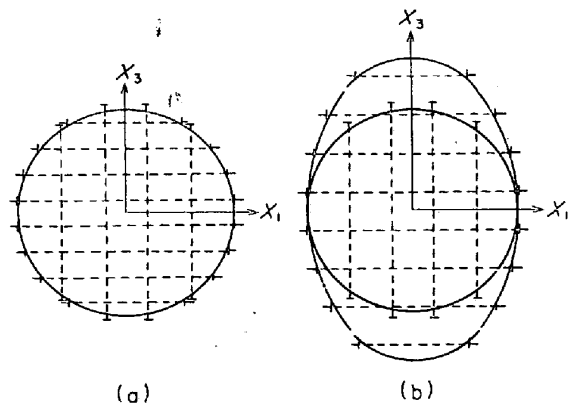


図11 プリズマティックループの放出の模型図

方向の1軸引張りでその方向にひずみ ϵ_P 、それと直角方向にひずみ $-\epsilon_P/2$ の塑性変形を試料が受けたとすると、球形第2相のまわりに残る転位分布は図 11(a) のように表わせる。この状態でもつとも内部応力成分の大きいのは x_3 軸方向の引張り応力であるから、応力緩和は x_3 軸方向に(b)のようなプリズマティックループの放出によって行なわれ、それらの放出されたループは(10)式で $a=b \leq c$ で表わされる長方楕円体上に分布すると仮定する。長方楕円体の体積は c/a に比例して増加するが、そのなかの塑性ひずみは c/a に反比例して減少する。したがって、長方楕円体中の弾性エネルギーは体積に比例し、塑性ひずみの2乗に比例するので c/a におおよそ反比例して減少する。ただし、ループが第2相から遠ざかるにしたがって長方楕円体の形が異なってくるから、その影響も考慮する必要がある、試料中に存在する全第2相が図 11(b) と同じ状態になるとすると試料単位体積あたりの弾性エネルギー E_{el}^0 は

$$E_{el}^0 = (f/2)A(\alpha)\mu\epsilon_P^2 \dots \dots \dots (111)$$

と表わせる。ここで $A(\alpha)$ は放出された転位ループが位置する楕円体の形状比 $c/a = \alpha$ と、第2相と母相の弾性常数の関数である。

このようにループを放出することによって弾性エネルギーは減少するが、ループは母相中の摩擦力 σ_1 に抗して仕事をしなければならない。そのために熱として消散する仕事 W_S は試料単位体積あたり

$$W_S = f(\alpha - 1)\sigma_1\epsilon_P \dots \dots \dots (112)$$

となる。したがって、プリズマティックループの放出が塑性ひずみの増加とともに安定に起こるためには、系の自由エネルギー変化 δG は(112)式のエネルギーも考慮して、(42)式より

$$\delta G = \delta E_{el}^0 + \delta W_S - \delta W = 0 \dots \dots \dots (113)$$

を満足しなければならない。 δG は ϵ_P と α のみの関数であるから、(113) 式の条件は

$$\left. \begin{aligned} (\partial E_{el}^0 / \partial \alpha) \epsilon_P + (\partial W_S / \partial \alpha) \epsilon_P &= 0 \\ (\partial W / \partial \epsilon_P) \alpha = \sigma_A - \sigma_0 &= (\partial E_{el}^0 / \partial \epsilon_P) \alpha \\ + (\partial W_S / \partial \epsilon_P) \alpha &= fA\mu\epsilon_P + f(\alpha - 1)\sigma_1 \end{aligned} \right\} \dots (114)$$

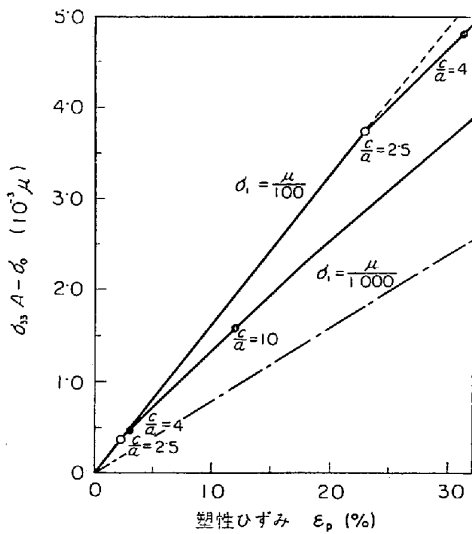


図12 プリズマティックループの放出が起こっている試料の加工硬化曲線 (計算値)

と書きかえることができる。

(114) 式より α を消去するとプリズマティックループによつて内部応力緩和が起こつたときの応力とひずみの関係が求まる。図 12 にそれを球状第 2 相の場合について数値計算した結果を図示した³⁹⁾。計算では第 2 相の弾性常数は母相のそれと同じで、第 2 相の量 f は 0.01 と仮定した。図にはプリズマティックループに働く摩擦力 σ_1 が $\mu/1000$ と $\mu/100$ の場合を示してあるが、応力-ひずみ曲線は両者で相似の関係にあり、その比は摩擦力の比に等しい。すなわち内部応力の緩和は摩擦力 σ_1 に比例して起こりにくくなり、 σ_1 を τ_0 に置き換えてやると (109) 式の結果と定性的に一致する。図中丸印とともに示した数字は放出されたループの位置 $\alpha=c/a$ を表わすが、ループが第 2 相の半径の 5 倍以上離れても、ループの放出によつて内部応力の緩和はあまり有効に起こっていない。これは一つには図 11(b) においてループは x_3 軸に直角方向には放出しないと仮定しているためである。この第 2 相に残つたループの内部応力のみが寄与する硬化分を図 12 に一点鎖線で示しておいたが、この硬化分を差し引いても内部応力の緩和は十分に起こっていないといえる。

ASHBY はプリズマティックループの放出により完全に内部応力が緩和されると仮定しているようである。そして放出されたループと新たにすべつてくる転位との交叉による摩擦力の増加が起こると考え、分散強化合金の高い硬化挙動を説明している¹⁰⁾。しかし、上記の議論が示すように緩和されていないで残っている内部応力は無視できないこと、彼が考えるようにループに対する摩擦力 σ_1 の増加が起こるとするとさらに内部応力の緩和を起りにくくしていることなどを考慮すると、ASHBY の理論を無批判に実験結果と比較することは気をつけなければならない。

(114) 式の計算を第 2 相が長方楕円体 ((10) 式で $a=b < c$) をしているときに適用してみると、第 2 相の形状比 c/a が大きくなつて繊維状に近づくほどプリズマティックループの放出による応力緩和機構は有効でなくなつてくるのがわかる³⁹⁾。これは、(112) 式の摩擦力に抗して行なう仕事 W_s は第 2 相の形状比 c/a に比例して大きくなるが、(111) 式の弾性エネルギーは c/a には直接比例して大きくならないためである。すなわち、後者のエネルギーが減少することによつて生ずるループ放出の駆動力 $-\partial E_{el}^0/\partial \alpha$ は、前者のエネルギー増加にともなうループ放出に対する抵抗力 $\partial W_s/\partial \alpha$ と比べて相対的に小さくなる。また第 2 相が硬くなればなるほどループの放出は容易になる。これらの結論も前節で述べた流体的取り扱いによる結論と定性的に一致する。

上記の計算で繊維強化型合金の場合、図 11(b) に図示したモデルのようにループが繊維全体にわたつて一様に放出される応力緩和はループに対する摩擦力によつて抑えられ起こりえないことが示される。しかし、この場合には繊維の先端部分のみでループの放出が起きて部分的に応力が緩和する可能性がある。たとえば、KELLY と TYSON は繊維内の引張り方向の弾性ひずみ e はその先端よりある距離までは、先端よりの距離に比例すると仮定しているが、おそらくループが部分的に放出されるというモデルに対応していると思われる。なお、この際、母相中の摩擦力は繊維の側面にそつて働くせん断応力となつているが、この応力は内部応力の緩和に部分的に抗しているだけで、繊維内の全内部応力を支えているわけでない。

以上はプリズマティックループによる応力緩和機構を議論したが、つぎに図 10(c) と (d) のクロススリップ機構を簡単に議論する。(c) は 1 次すべり系の転位群 α がダブルクロススリップを起こしてでき³³⁾、(d) は 2 次転位群 β' が発生したのち、それらが同様にクロススリップを起こしてできる³⁴⁾。いずれにしる図に示すようなプリズマティックループが残るわけであるが、バーガースベクトルが正のループと負のループは確率的に見れば大きさも数を等しく作られるはずであるから、長範囲の内部応力はこれらの転位ループによる応力場が打ち消し合うことによつて十分低下するはずである。しかし、BROWN らが指摘しているように残つたループの延べにした長さはもとの転位の長さより大きくなつていろうえ³⁴⁾、本当にこのようなクロススリップ機構によつて内部応力場が十分低下するかどうかは確証がない。なぜなら、図 10(c)、(d) と (f) ではプリズマティックループの配列が異なつていだけであるが、第 2 相付近のループの分布状態が少し異なつたために長範囲の応力場が激減するとは考えにくいからである。いずれにしる、前節で仮定したような完全な応力緩和が起こるためには、第 2 相まわりに残されたループ群が消滅する必要がある

が、その方法としては(f)のようにループが第2相から十分遠く離れるか、拡散に基づくループの非保存運動が起こって消滅してしまうかしなければならない。前者の方法では前に考察したように応力緩和の方法としてはあまり有効でないので、後者の拡散による回復がもつとも有効な方法と考えられる。事実、分散強化型合金の加工硬化挙動には温度が強く影響することはよく知られているが、これは第2相のまわりの拡散現象が重要な因子を占めていることを示しているであろう。

6. お わ り に

本稿で展開した考え方の特徴は長範囲の内部応力場に基づく硬化ならば、それは転位の配列に不敏感なものでこれを連続体力学でおきかえても十分の近似であり、かつ試料にたくわえられる弾性エネルギーの評価によつて硬化量が求まるということにある。しかし、筆者らはこの方法は決して万能でなく、転位論による結晶塑性の理解と協力し合つてよき理解をもたらすものと考えている。たとえば、第2相を含む試料の降伏の問題は隣り合う第2相の間を転位が通り抜けていく OROWAN 機構の問題を考えなければならないが³⁾、本稿のような連続転位の方法は無効である。なぜなら連続転位の考え方では、転位のバーガースベクトルが無限に小さいので任意の形に曲がっても、まっすぐな形にもどろうとする力はさらに高次の微小量になつてしまい、転位を曲げるために必要な外力はゼロとなつてしまうからである。すなわち、転位の線張力という思想は転位が有限のバーガースベクトルの強さ b を持つて始めて現われる¹⁾。さらによい例が変形におけるエネルギーの散逸であつて、連続体として取り扱う限り、これを材料常数とみなさなければならないが、これは転位論によつてこそ、ほかの基本的物質常数から計算されるものと思われる。

文 献

- 1) F.R.N. NABARRO: Theory of Crystal Dislocation, (1967), [Oxford]
- 2) M. F. ASHBY: Phil. Mag., 21 (1970), p. 399
- 3) E. OROWAN: Discussion in "The Symposium on Internal Stresses in Metals and Alloys", Inst. Metals, (1948), p. 451
- 4) J. C. FISHER, E. W. HART, and R. H. PRY: Acta Met., 1 (1953), p. 336
- 5) M. F. ASHBY: Oxide Dispersion Strengthening, (1968), p. 143 [Gordon and Breach]
- 6) E. W. HART: Acta Met., 20 (1970), p. 275
- 7) L. M. BROWN and W. M. STOBBS: Phil. Mag., 23 (1971), p. 1185
- 8) E. KRÖNER: Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigen-spannung, (1958), [Springer]
- 9) T. MURA: Advances in Materials Research, 3 (1968), p. 1 [Interscience]
- 10) M. F. ASHBY: Phil. Mag., 14 (1966), p. 1157
- 11) J. D. ESHELBY: Proc. Roy. Soc. London, A241 (1957), p. 376
- 12) J. D. ESHELBY: Proc. Roy. Soc. London, A252 (1959), p. 561
- 13) N. KINOSHITA and T. MURA: Phys. Stat. Solidi, 5 (1971), p. 759
- 14) J. D. ESHELBY: Solid State Physics, 3 (1956), p. 79 [Academic Press]
- 15) K. TANAKA and T. MORI: Acta Met., 18 (1970), p. 931
- 16) K. TANAKA, T. MORI, and T. NAKAMURA: 2nd International Conference on the Strength of Metals and Alloys, vol. II (1970), p. 562, ASM
- 17) D. L. MCDANIELS, R. W. JECH, and J. W. WEE-TON: Trans. AIME, 233 (1965), p. 636
- 18) K. TANAKA, K. WAKASHIMA, and T. MORI: to be published.
- 19) A. KELLY and R. B. NICKOLSON: Prog. Metal Sci., 10 (1963), p. 151
- 20) R. HILL: The Mathematical Theory of Plasticity, (1950), [Oxford]
- 21) M. F. ASHBY: Ph. D. Thesis, Cambridge University, (1961), 文献 19) に引用されたものを再引用した。
- 22) R. EBELING and M. F. ASHBY: Phil. Mag., 13 (1966), p. 805
- 23) 成田: 東京工大修士論文
- 24) 柴田: 東京工大修士論文
- 25) R. HILL: J. Mech. Phys. Solids, 13 (1965), p. 189
- 26) B. BUDIANSKY: J. Mech. Phys. Solids, 13 (1965), p. 223
- 27) E. KRÖNER: Z. Phys., 151 (1958), p. 504
- 28) K. TANAKA and T. MORI: Journal of Elasticity, to be published
- 29) 森, 田中: 日本金属学会会報, 11 (1972), p. 667
- 30) R. HILL: J. Mech. Phys. Solids, 12 (1964), p. 213
- 31) E. R. THOMPSON, D. A. KOSS, and J. C. CHESNUTT: Met. Trans., 1 (1970), p. 2807
- 32) N. F. MOTT and F.R.N. NABARRO: Proc. Phys. Soc. London, 52 (1940), p. 86
- 33) P. B. HIRSCH: J. Inst. Metals, 86 (1957), p. 7
- 34) L. M. BROWN and W. M. STOBBS: 23 (1971), p. 1201
- 35) K. TANAKA, T. MORI, and T. NAKAMURA: Phil. Mag., 21 (1970), p. 267
- 36) K. TANAKA, T. MORI, and T. NAKAMURA: Trans. ISIJ, 11 (1971), p. 383
- 37) K. TANAKA and J. W. SPRETNAK: to be published in Met. Trans.
- 38) T. MURA: Mechanics of Generalized Continua, ed. by E. KRÖNER, (1968), p. 269, [Springer-Verlag]
- 39) K. TANAKA, K. NARITA, and T. MORI: Acta Met., 20 (1972), p. 297
- 40) A. KELLY and W. R. TYSON: High Strength Materials, ed. by V. F. ZACKAY, (1965), p. 578, [Wiley]