

## 論 文

UDC 669.14.018.262 : 621.787-415 : 539.389.2

## 軟鋼の混粒と変形応力についての一考察\*

増井浩昭\*\*・武智弘\*\*\*

## A Study of the Relation between Distribution of Grain Diameters and Flow Stress in Mild Steel

Hiroaki MASUI and Hiroshi TAKECHI

## Synopsis:

Effects of grain diameter distribution on the flow stress of mild steel were studied. The flow stress have been usually connected with an apparent average grain diameter which is determined by counting a number of grains appeared in the cross section of mild steel. The difference between a true flow stress calculated considering a distribution of grain diameters and an apparent flow stress connected directly with the apparent average grain diameter was obtained in some distribution of grain diameters.

The following results were obtained:

(1) A stress calculated by the strain continuity model and a stress calculated by the stress continuity model coincided well for all the adopted distribution types of grain diameters.

(2) In Gauss distribution ( $f(x) = (1/\sqrt{2\pi}S) \cdot \exp\{-(x-\mu)^2/2S^2\}$ ,  $x$ : grain diameter(mm)), the difference mentioned above increased with  $S$ .

(3) In the uniform distribution ( $f(x) = 1/2P$ ), the difference increased with  $P$ .

(4) In Poisson distribution ( $f(x) = \exp(-R) \cdot R^x/X!$ ,  $X=100x$ ), the difference decreased with  $R$  and gradually came close to that of Gauss distribution.

(5) A metallurgical meaning of the equation ( $\sigma = g(x, \epsilon)$ ) used in the calculations was discussed using work hardening theory.

In summary the difference was remarkable in Poisson distribution, but those in Gauss distribution and in the uniform distribution might be neglected except in the case where the flow stress is discussed with an accuracy of the order of  $10^{-1}$  kg/mm<sup>2</sup>.

## 1. 緒 言

軟鋼の変形応力におよぼす冶金学的因子のうちでもつとも大きな影響をもつものはフェライト粒の結晶粒径(以下:粒径)である<sup>1)~5)</sup>。

変形応力と粒径とを結びつける際によく使われる重要な関係として、つぎに示すいわゆる PETCH の式がある。

$$\sigma = \sigma_i + kd^{-1/2} \dots\dots\dots (1)$$

$\sigma$ : 変形応力,  $d$ : 平均粒径

ところで、この平均粒径をもとめる方法として、通常、試料断面の光学顕微鏡組織写真で一定面積内の粒数を測定して算出する方法をとっている。しかし、このようにして求める平均粒径は粒径の体積的な統計的分布を考慮していないので、あくまでも一応の目安を示す「見かけの平均粒径」にすぎない。

さらに、仮りに体積的な真の平均粒径を知ることができたとしても、それと変形応力とを直接結びつけること

も問題である。

このような問題はとくに粒径の分散の大きい、いわゆる混粒の軟鋼では無視できないことのように考えられる。

そこで、粒径の体積的な統計的分布を考慮して得られる変形応力と、「見かけの平均粒径」から単純に結びつけられる変形応力(これを「見かけの変形応力」と呼ぶ)との差がどの程度の大きさを示すかをモデルを組み立てて計算をおこなった。

## 2. 実験方法

通常の低炭素リムド軟鋼の熱延前の均熱時の温度を変化させることにより、冷延・焼鈍板の粒径は段階的に変

\* 昭和46年4月本会講演大会にて発表

昭和46年8月2日受付

\*\* 新日本製鉄(株)技術研究所

\*\*\* 新日本製鉄(株)君津製鉄所 工博

Table 1. Chemical analysis of the sample (wt%).

C	Mn	S	P	Si	Cu	sol. N	insol. N	O
0.021	0.31	0.019	0.010	0.012	0.042	0.0024	0.0002	0.033

化する。

Table 1 は使用したリムド軟鋼の化学分析値である。

これを 1100°C, 1200°C, 1300°C, 1350°C の各温度で 1 hr 均熱後, 仕上温度 900°C で熱延し板厚 2.7 mm の熱延板を作った。これを HCl 酸洗後, 圧下率 70% で冷延し, 板厚 0.8 mm の冷延板を得た。

冷延板の圧延方向に長さ 180 mm×幅 35 mm の試料取りを行ない, この試料を加熱速度 100°C/hr で, 750°C×4 hr の再結晶焼鈍, 炉冷を施した。この試料から JIS 5 号引張試験片を製作した。

引張試験は最大能力 5 t のインストロン引張試験機により, 室温で引張速度 20 mm/min で行なつた。

一方, モデルの諸数式の計算には TOSBAC 3400 を使用した。

### 3. モデル理論と計算

#### 3.1 軟鋼の多結晶体の変形応力

軟鋼の応力-歪曲線は概略的に Fig. 1 のように表わせる。

歪  $\epsilon$  における応力  $\sigma$  (kg/mm<sup>2</sup>) の表わし方はいろいろあるが,  $\epsilon$  のせまい範囲では近似的につぎの直線関係で表わせる。

$$\sigma = \sigma_0(x) + K(x) \cdot \epsilon \quad (2)$$

ここで,  $x$  は粒径 (mm) を表わしており, 実験的には,

$$\sigma_0(x) \propto x^{-1/2}$$

$$K(x) \propto x^{-1/2}$$

の関係が認められる。

低炭素リムド軟鋼の熱延前均熱温度を変えることによ

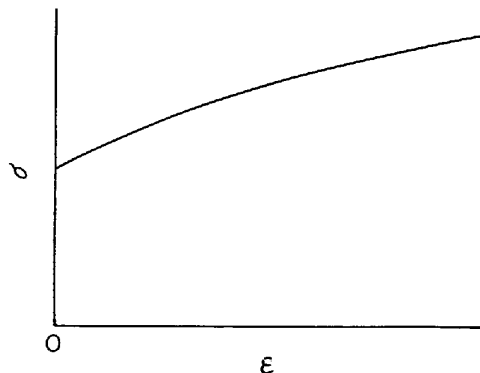


Fig. 1. Schematic representation of the stress-strain curve of mild steel.

り冷延・焼鈍板の粒径が段階的に変わることを利用して, その平均粒径と  $\sigma_0(x)$ ,  $K(x)$  との関係を  $\epsilon=0.095$  (公称伸び率 10%) において求めたのが Fig. 2 である。Fig. 2 から近似的につぎの関係が得られる。

$$\sigma_0(x) = 16 + x^{-1/2} \text{ (kg/mm}^2\text{)} \quad (3)$$

$$K(x) = 53 + 4x^{-1/2} \text{ (kg/mm}^2\text{)} \quad (4)$$

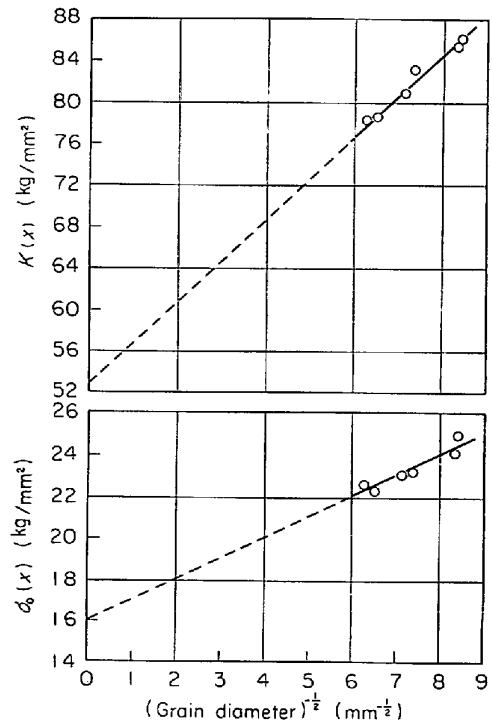


Fig. 2. Relation between the minus one half of grain diameter and  $\sigma_0$ ,  $K$  which are obtained in a relationship  $\sigma = \sigma_0 + K \cdot \epsilon$  at  $\epsilon=0.095$  in the tension tests of the low carbon rimmed steel.

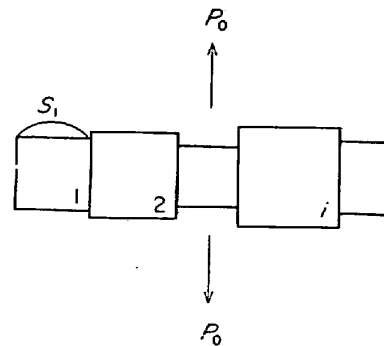


Fig. 3. Schematic representation of the strain continuity model of grains.

(3), (4)式は  $\sigma_0(x)$ ,  $K(x)$  と  $x$  との函数関係を表わす一応の目安と考えられる。

3.1.1 「歪一定」のモデル

Fig. 3 に模式図的に示されるように、種々の粒径の結晶粒 (1, 2, ..., N) に負荷する応力を  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$  とし、その断面積を  $S_1, S_2, \dots, S_N$  とする。このとき変形外力  $P_0$  は(5)式で、また変形応力は(6)式で表わせる。

$$P_0 = \sum_{i=1}^N \sigma_i S_i \dots\dots\dots (5)$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^N \sigma_i \left( \frac{S_i}{\sum_{i=1}^N S_i} \right) \dots\dots\dots (6)$$

粒径 ( $x$ ) の確率密度函数を  $f(x)$  とすると、(6)式はさらにつぎのように表わせる。

$$\sigma (\equiv \sigma_n) = \int \sigma(x) \cdot \frac{x^3 f(x)}{\{\int x^3 f(x) dx\}} \cdot dx \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $\sigma(x) = \sigma_0(x) + K(x) \cdot \epsilon$

3.1.2 「応力一定」のモデル

Fig. 4 に模式図的に示されるように、種々の粒径の結晶粒 (1, 2, ..., N) に負荷する応力をいずれも  $\sigma =$ 一定とし、各結晶粒の応力軸方向の長さおよび歪を各  $l_1, l_2, \dots, l_N$  および  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N$  とする。このとき全体の長さ  $l$  の変化  $\Delta l$  はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \Delta l/l &= \sum_{i=1}^N \Delta l_i/l \\ &= \sum_{i=1}^N (l_i/l) \cdot (\epsilon_i + \epsilon_i^2/2) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

第  $i$  群の  $\sigma_0(x)$ ,  $K(x)$  を各  $\sigma_{0i}$ ,  $K_i$  とするとき(9)式の関係が存在する。

$$\sigma = \sigma_{0i} + K_i \cdot \epsilon_i \dots\dots\dots (9)$$

(8)式と(9)式とから  $\epsilon_i$  を消去すると(10)式が得られる。

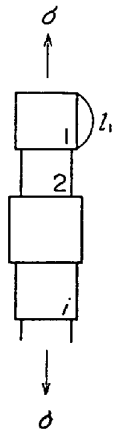


Fig. 4. Schematic representation of the stress continuity model of grains.

$$\frac{\Delta l}{l} = \sum_{i=1}^N \frac{l_i}{l} \left\{ \frac{\sigma - \sigma_{0i}}{K_i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma - \sigma_{0i}}{K_i} \right)^2 \right\} \dots\dots (10)$$

(10)式より  $\sigma$  を求めるとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \sigma = & \left[ - \sum_{i=1}^N \frac{K_i - \sigma_{0i}}{K_i^2} \cdot \frac{l_i}{l} + \left\{ \left( \sum_{i=1}^N \frac{K_i - \sigma_{0i}}{K_i^2} \cdot \frac{l_i}{l} \right)^2 \right. \right. \\ & - \left. \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{K_i^2} \cdot \frac{l_i}{l} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_{0i}^2 - 2 K_i \sigma_{0i}}{K_i^2} \cdot \frac{l_i}{l} \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \frac{\Delta l}{l} \right\}^{1/2} \right] / \sum_{i=1}^N \frac{1}{K_i^2} \cdot \frac{l_i}{l} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

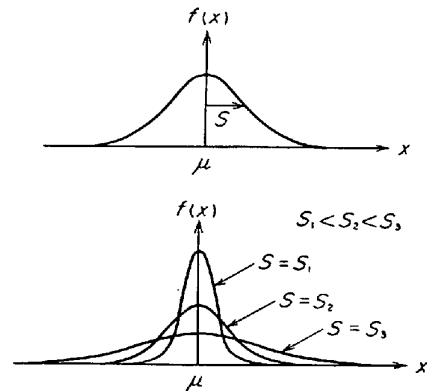
粒径 ( $x$ ) の確率密度函数を  $f(x)$  とすると、(11)式はさらにつぎのように表わせる。

$$\sigma (\equiv \sigma_s) = [-\Gamma_2 + \{\Gamma_2^2 - \Gamma_1(\Gamma_3 - 2D)\}^{1/2}] / \Gamma_1 \dots\dots\dots (12)$$

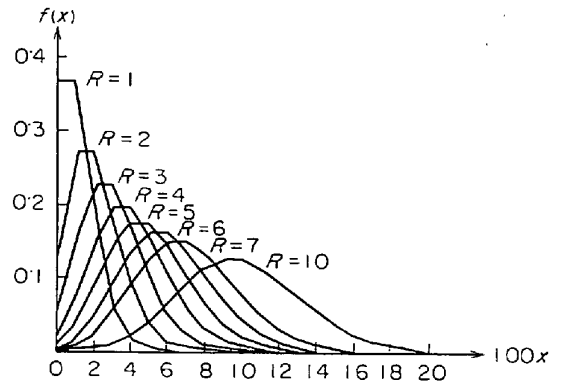
ここで、 $F(x) = x^3 f(x) / \int x^3 f(x) dx$

$$\Gamma_1 = \int \{1 / (K(x))^2\} \cdot F(x) dx$$

1) Gauss:  $f(x) = (1/\sqrt{2\pi}S) \cdot \exp \{-(x-\mu)^2/2S^2\}$



2) Poisson:  $f(x) = \exp(-R) \cdot R^x / x!$  ( $X = 100x$ )



3) The uniform:  $f(x) = \frac{1}{2P}$

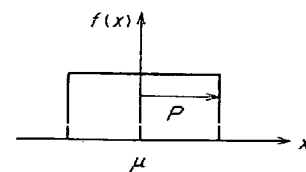


Fig. 5. Figures of the probability density functions used in the models.

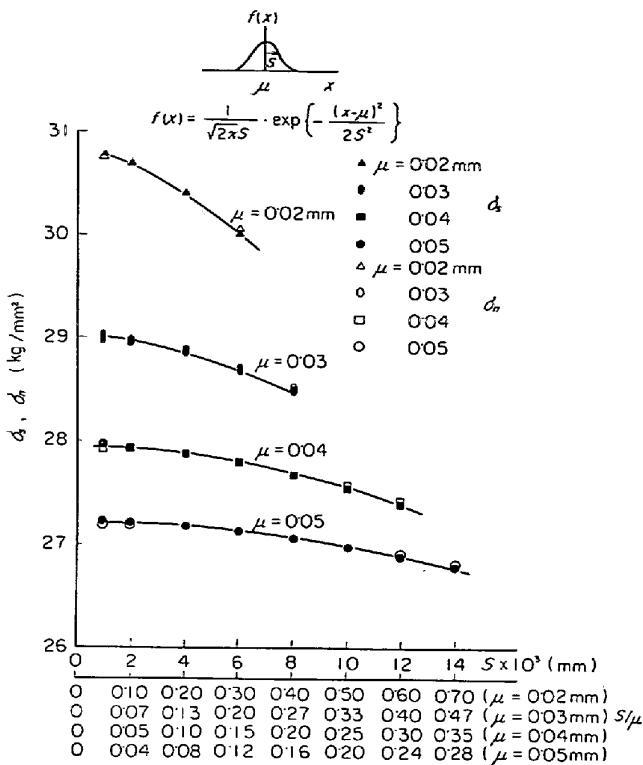


Fig. 6. Relation between  $S$  and  $S/\mu$  in the probability density function of Gauss distribution of the grain diameters and  $\sigma_s$ ,  $\sigma_n$ .

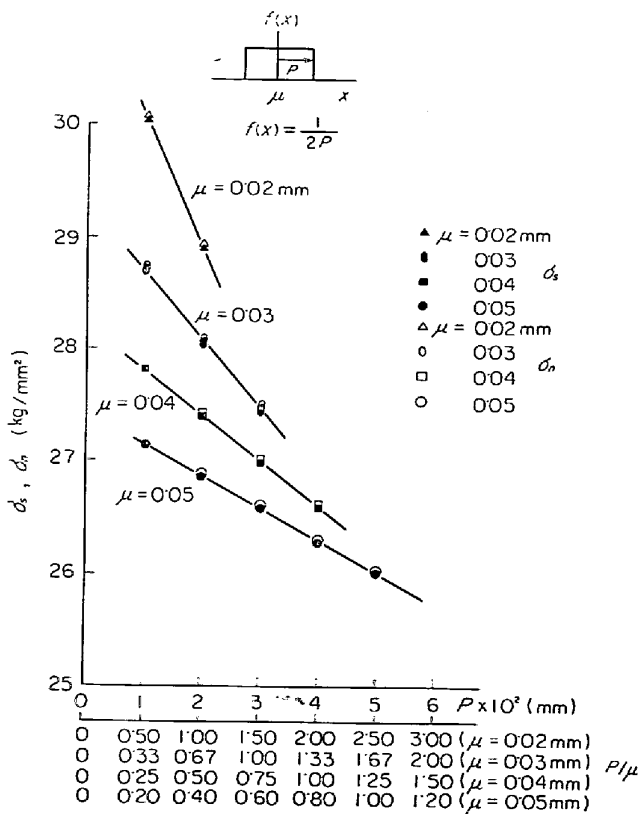


Fig. 7. Relation between  $P$  and  $P/\mu$  in the probability density function of the uniform distribution of the grain diameters and  $\sigma_s$ ,  $\sigma_n$ .

$$\Gamma_2 = \int \{(K(x) - \sigma_0(x)) / (K(x))^2\} \cdot F(x) dx$$

$$\Gamma_3 = \int \{[(\sigma_0(x))^2 - 2K(x)\sigma_0(x)] / (K(x))^2\} \cdot F(x) dx$$

$$D = e^e - 1$$

3.1.3 確率密度函数:  $f(x)$

確率密度函数  $f(x)$  としては代表的な Gauss 分布 (正規分布), Poisson 分布 および 一様分布 を使うことにした.

Gauss 分布:  $f(x) = \{1 / (\sqrt{2\pi} S)\} \cdot \exp\{- (x - \mu)^2 / (2 S^2)\}$  ... (13)

Poisson 分布:  $f(x) = \exp(-R) \cdot R^X / X!$ , ( $X = 100x$ ) ..... (14)

一様分布:  $f(x) = 1 / (2P)$  ..... (15)

これらの分布の形状を Fig. 5 に示す.

3.1.4 計算結果

「歪一定」および「応力一定」のモデルにもとづいて, 粒径が Gauss 分布, 一様分布および Poisson 分布をするときの変形応力を求めた. すなわち, (7)式および(12)式に(3), (4)式および(13)~(15)式を代入した.

Fig. 6 に Gauss 分布, Fig. 7 に一様分布, さらに Fig. 8 に Poisson 分布の場合を示してある. Gauss 分

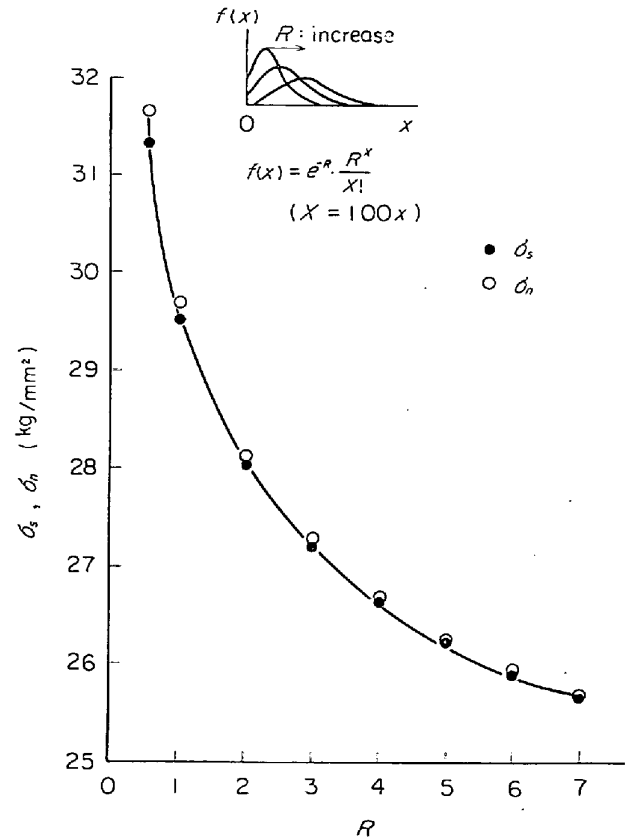


Fig. 8. Relation between  $R$  in the probability density function of Poisson distribution of the grain diameters and  $\sigma_s$ ,  $\sigma_n$ .

布、一様分布および Poisson 分布のおおの分散状態を表わす  $S$  (あるいは  $S/\mu$ ),  $P$  (あるいは  $P/\mu$ ) および  $R$  に対して変形応力がどのような変化をするかがわかる。ここで注目すべきことは「歪一定」および「応力一定」の両モデルで計算した変形応力が、粒径のいずれの分布の場合にもかなりよく一致していることである。多結晶体の変形においてのおおの結晶粒が満たすべき重要な条件は「歪一定」および「応力一定」の条件であり、したがってこの両条件を適当に満たす応力は実際の変形応力に近いと言えることができる。そこで本モデルにおいて、「歪一定」モデルによる変形応力を  $\sigma_n$  ((7)式)、一方「応力一定」モデルによる変形応力を  $\sigma_s$  ((12)式) とするとき、それらの算術平均値は実際の変形応力に近い値であると考えられ、これを真の変形応力  $\sigma_{tr}$  とする。

$$\sigma_{tr} = (\sigma_n + \sigma_s) / 2 \dots\dots\dots (16)$$

**3.2 多結晶体の断面組織と見かけの平均粒径**

通常、軟鋼の多結晶の断面の光学顕微鏡組織写真をとって、その写真の中の一定面積内の粒数を測定することにより見かけの平均粒径を求めている。

そこで、粒径の分布状態によつて見かけの平均粒径がどのように表わされるかを検討した。

**3.2.1 結晶粒の球形近似による見かけの平均粒径**  
結晶粒を球形で近似して考察する。

Fig. 9 で示すような半径  $R_0$  の球の任意の切断面の半径が  $r \sim r+dr$  の間に存在する確率は (17) 式で表わされる。

$$P(r)dr = \frac{1}{R_0} \cdot \frac{r}{\sqrt{R_0^2 - r^2}} dr \dots\dots\dots (17)$$

半径  $R_0$  の球で満たされたある体積を任意の断面 (総面積  $S_0$ ) で切断するときの各球の平均断面積  $\overline{\pi r^2}$  はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \overline{\pi r^2} &= \int_0^{R_0} \pi r^2 \cdot P(r) dr \\ &= (2/3) \pi R_0^2 \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

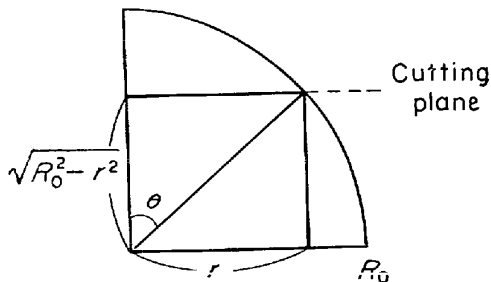


Fig. 9. Relation between  $R_0$  and the radius appeared in a cutting plane of the spherical model of grain.

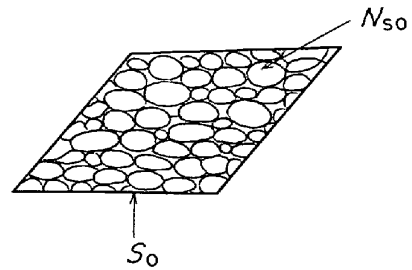


Fig. 10. Schematic representation of a relation between the area  $S_0$  of the cutting plane and  $N_{s0}$  which is a number of grains appeared in the area.

したがって、切断面総面積 ( $S_0$ ) 内に観測される球の総数を  $N_{s0}$  とするとき (Fig. 10 参照), つぎの関係がある。

$$N_{s0} = S_0 / \{ (2/3) \pi R_0^2 \} \dots\dots\dots (19)$$

つぎに、直径が  $x_1, x_2, \dots, x_M$  の球が混在する場合はおのおのつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} N_{s1} &= S_1 / \{ (2/3) \pi \cdot (x_1/2)^2 \} = S_1 / \{ (1/6) \pi x_1^2 \}, \\ N_{s2} &= S_2 / \{ (1/6) \pi x_2^2 \}, \dots\dots, \\ N_{sM} &= S_M / \{ (1/6) \pi x_M^2 \} \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

この場合の全総面積を  $S_T$ , また  $S_T$  内に観測される球の総数を  $N_M$  とすると, つぎの関係がある。

$$S_T = S_1 + S_2 + \dots + S_M \dots\dots\dots (21)$$

$$N_M = N_{s1} + N_{s2} + \dots + N_{sM} \dots\dots\dots (22)$$

通常の一定の断面積内の粒数を測定することによつて求めている見かけの平均粒径をつぎのように考える。もし全体積が一定直径  $\bar{x}_{ap}$  の球で満たされていると仮定するとつぎの関係がある。

$$(1/6) \pi \bar{x}_{ap}^2 = S_T / N_M \dots\dots\dots (23)$$

この  $\bar{x}_{ap}$  はいわゆる見かけの平均粒径を表わしている。(23)式に(20)~(22)式を代入して計算するとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \pi \bar{x}_{ap}^2 &= 1 / \left[ \frac{S_1}{S_T} \cdot \frac{1}{(1/6) \pi x_1^2} + \dots + \frac{S_M}{S_T} \cdot \frac{1}{(1/6) \pi x_M^2} \right] \\ &= \frac{1}{6} \pi \left[ \frac{x_1 f(x_1)}{\sum_{i=1}^M x_i^3 f(x_i)} + \dots + \frac{x_M f(x_M)}{\sum_{i=1}^M x_i^3 f(x_i)} \right] \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

これより

$$\bar{x}_{ap} = \left[ \frac{\int x f(x) dx}{\int x^3 f(x) dx} \right]^{-1/2} \dots\dots\dots (25)$$

ここで、 $f(x)$  は直径  $x$  の球 (結晶粒) の確率密度関数である。

3.2.2 結晶粒の球形近似による切断面半径出現率  
 実際の電解鉄AおよびBの断面の光学顕微鏡組織写真

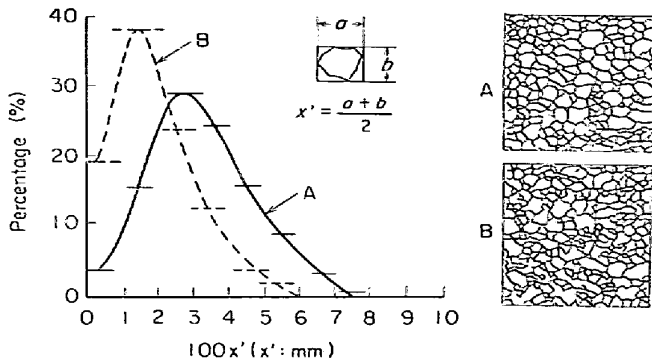


Fig. 11. Distribution of the approximate grain diameters appeared in the cross section of the electrolytic iron A and B.

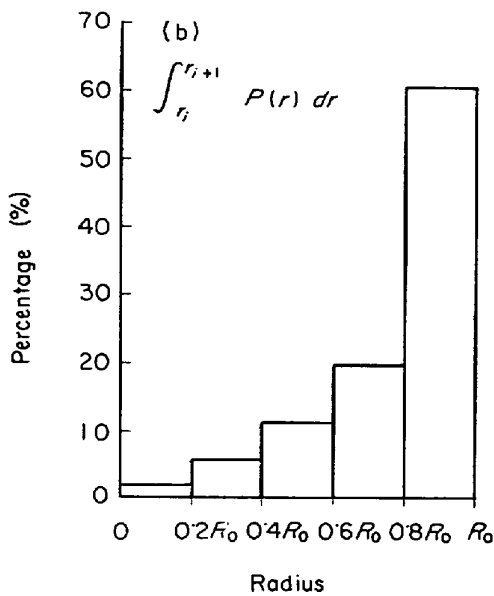
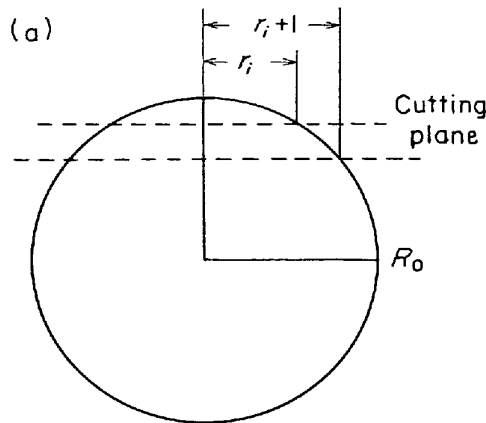


Fig. 12. (a) Radius in the cutting plane of the spherical model of grain. (b) distribution of the radii appeared in the cutting planes of the spherical model of grain which has a radius of  $R_0$ .

から, Fig. 11 のように近似的な断面粒径を測定して観測量の分布をプロットしてみた. 電解鉄Aは Gauss 分布に近いが, Bは Poisson 分布に近い.

ところで Fig. 11 の分布はあくまでも断面粒径の分布であり, 体積的な真の粒径の分布を示していないはずである. そこで両分布の関係について検討してみた. 結晶粒を球形近似する場合にいかなる大きさの半径の出現する確率が高いかを計算してみた. (17)式の確率密度関数を使い Fig. 12(a)に示すような方法で半径  $R_0$  の球の切断面半径出現率  $\int_{r_i}^{r_{i+1}} P(r) dr$  を計算した結果を Fig. 12(b)に示す. すなわち半径  $R_0$  の球の場合, 切断面半径が  $0.8 R_0 \sim R_0$  の範囲のものが約 60% ある. このことは Fig. 11 の電解鉄の断面粒径の観測量は, 一応, 粒径の体積的な真の分布を大まかに表わしているとも言える.

3.3 見かけの変形応力と真の変形応力とのずれ

前述の見かけの平均粒径  $\bar{x}_{ap}$  と変形応力とを直接結びつけることができるのはすべての粒径が等しい多結晶の場合である. この場合の変形応力は (26) 式で表わせる.

$$\bar{\sigma}_{ap} = \sigma_0(\bar{x}_{ap}) + K(\bar{x}_{ap}) \cdot \epsilon \dots\dots\dots (26)$$

ところが実際は, 粒径は種々の分布をもっており, (26) 式で求められる  $\bar{\sigma}_{ap}$  は見かけの変形応力である. 実際の粒径が分布をもっている限り, 通常われわれが

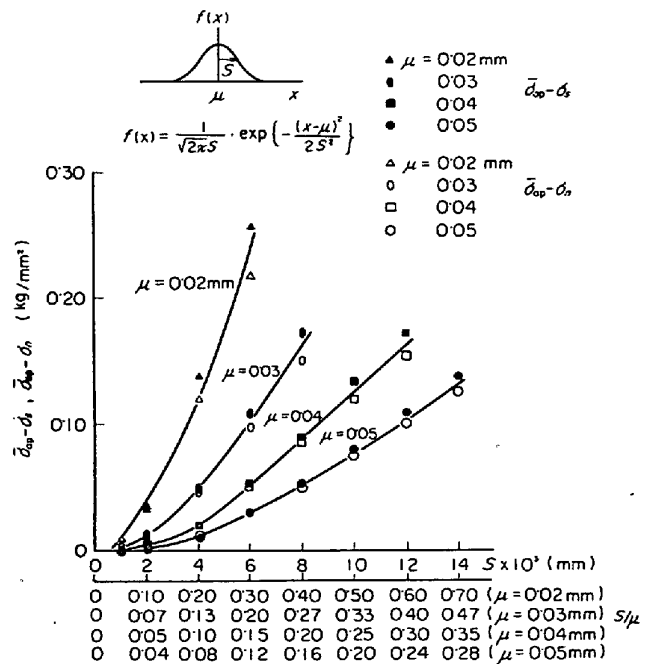


Fig. 13. Relation between  $S$  and  $S/\mu$  in the probability density function of Gauss distribution of the grain diameters; and  $\bar{\sigma}_{ap} - \sigma_s$ ,  $\bar{\sigma}_{ap} - \sigma_\mu$ .

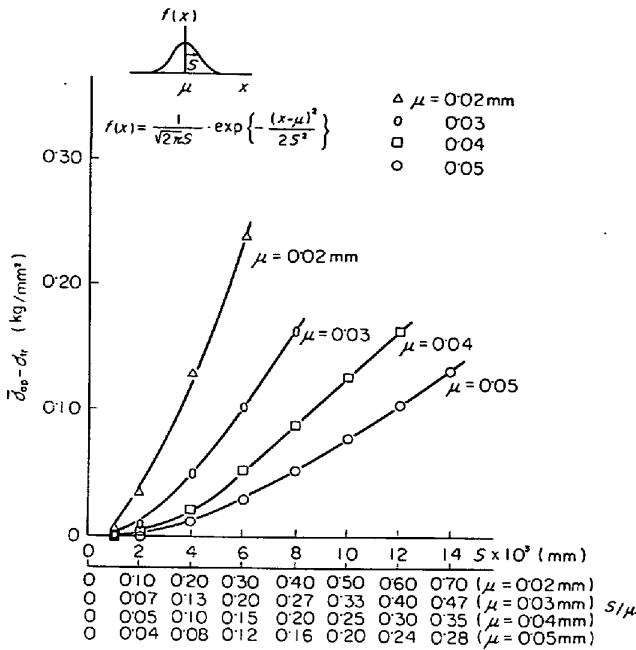


Fig. 14. Relation between  $S$  and  $S/\mu$  in the probability density function of Gauss distribution of the grain diameters and  $\bar{\sigma}_{ap} - \sigma_{tr}$ .

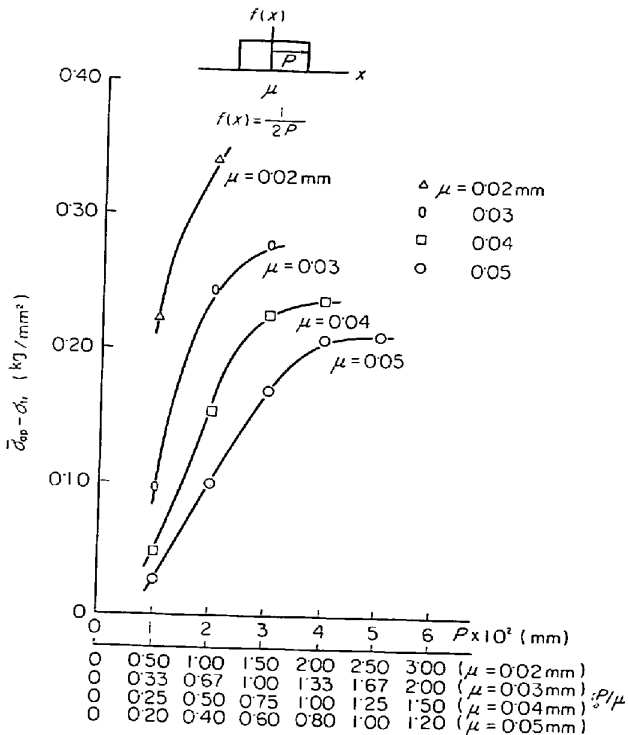


Fig. 15. Relation between  $P$  and  $P/\mu$  in the probability density function of the uniform distribution of the grain diameters and  $\bar{\sigma}_{ap} - \sigma_{tr}$ .

Petch の関係などで実験データを整理する際に、実測の変形応力と見かけの変形応力との差を把握しておくことは必要である。

そこで、粒径 ( $x$ ) がある確率密度函数  $f(x)$  をもつと

き、真の変形応力  $\sigma_{tr}$  と見かけの変形応力  $\bar{\sigma}_{ap}$  とがどの程度の差を生じてくるかを、 $\epsilon = 0.095$  において、(3), (4), (7), (12), (16), (25) および (26) 式から計算した。

なお、比較のために統計的な真の平均粒径  $\bar{x}$  を (27) 式で求めて、 $\bar{x}$  と関係づけるような見かけの変形応力  $\bar{\sigma}$  も (28) 式で一応求めてみた。

$$\bar{x} = \int xf(x) dx \dots\dots\dots (27)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma_0(\bar{x}) + K(\bar{x}) \cdot \epsilon \dots\dots\dots (28)$$

Fig. 13 は Gauss 分布において (13) 式の  $S$  および  $S/\mu$  の変化に対して、 $\bar{\sigma}_{ap} - \sigma_n$ ,  $\bar{\sigma}_{ap} - \sigma_s$  を示したものである。前述のように  $S$ ,  $S/\mu$  の変化に対して  $\sigma_n$  と  $\sigma_s$  とはかなりよく一致しているの、当然  $\bar{\sigma}_{ap} - \sigma_n$  と  $\bar{\sigma}_{ap} - \sigma_s$  とはよく一致している。そこでつぎに  $\bar{\sigma}_{ap} - \sigma_{tr}$  を  $S$  および  $S/\mu$  に対して示すと Fig. 14 となる。

Fig. 15 は一様分布において (15) 式の  $P$  および  $P/\mu$  の変化に対して  $\bar{\sigma}_{ap} - \sigma_{tr}$  を示したものである。

Fig. 16 は Poisson 分布において (14) 式の  $R$  の変化に対して  $\bar{\sigma}_{ap} - \sigma_{tr}$  を示したものである。

ここでいえることは、 $\bar{\sigma}_{ap} - \sigma_{tr}$  の値は Gauss 分布や一様分布では比較的小さいが、Poisson 分布ではかなり大きい、ということである。Fig. 17 は Gauss 分布と

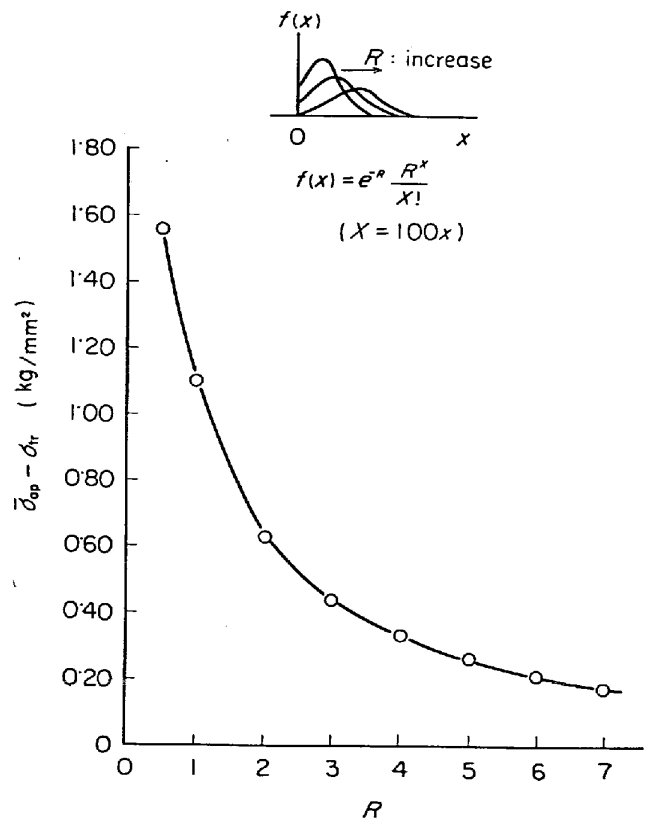


Fig. 16. Relation between  $R$  in the probability density function of Poisson distribution of the grain diameters and  $\bar{\sigma}_{ap} - \sigma_{tr}$ .

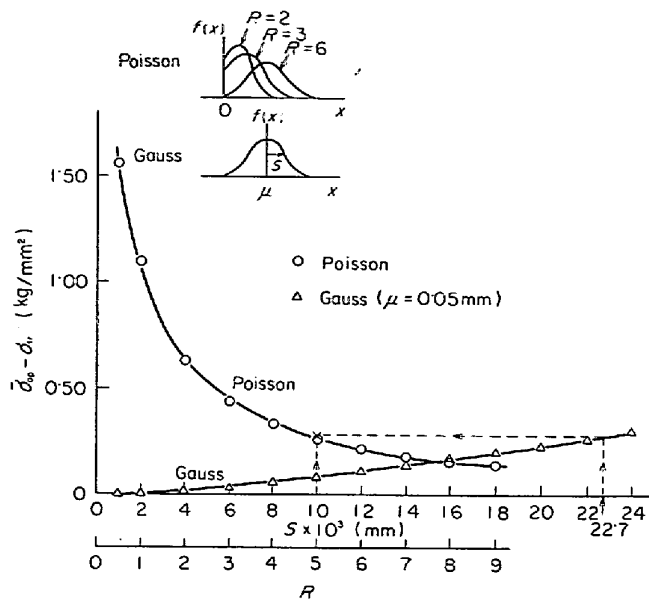


Fig. 17. Comparison of  $\bar{\sigma}_{ap} - \sigma_{tr}$  in Gauss distribution and Poisson distribution of the grain diameters.

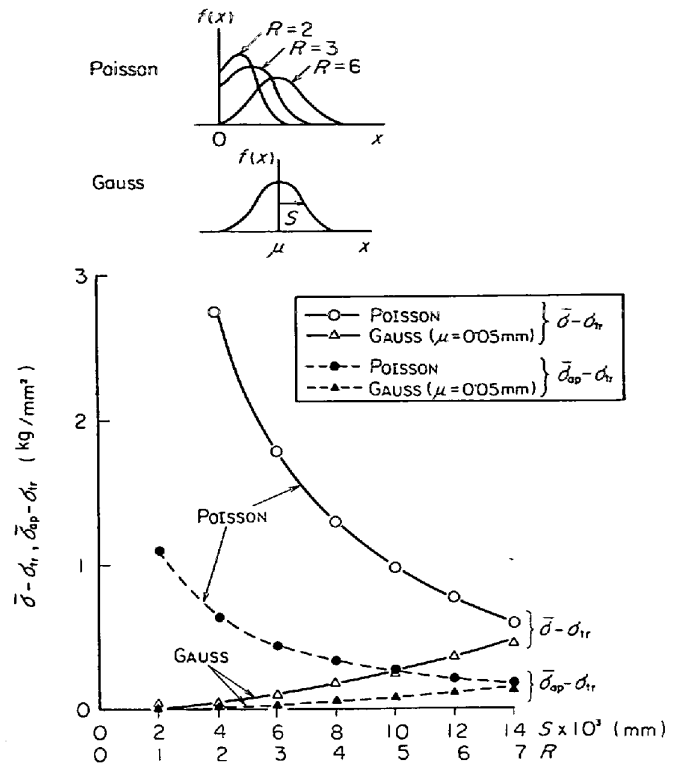


Fig. 19. Comparison of  $\bar{\sigma} - \sigma_{tr}$  and  $\bar{\sigma}_{ap} - \sigma_{tr}$  in Gauss' and Poisson's distribution of the grain diameters.

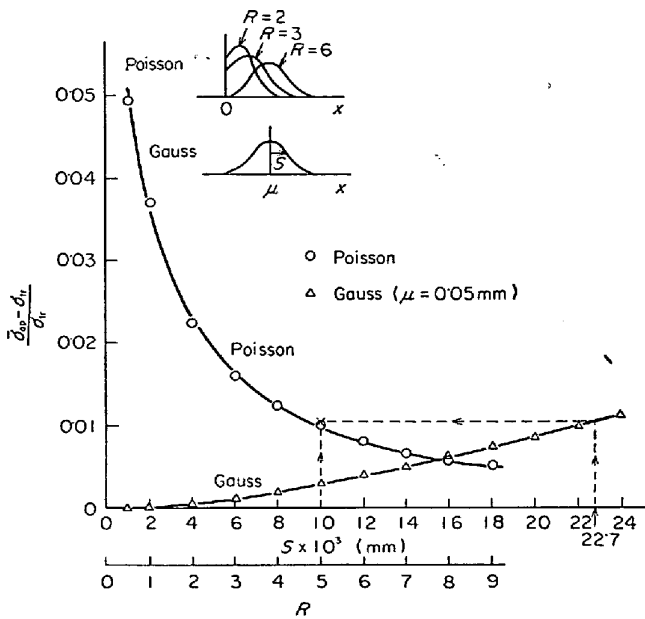


Fig. 18. Comparison of  $(\bar{\sigma}_{ap} - \sigma_{tr}) / \sigma_{tr}$  in Gauss distribution and Poisson distribution of the grain diameters.

Poisson 分布における  $\bar{\sigma}_{ap} - \sigma_{tr}$  を比較したものである。また、Fig. 18 は相対的な値として  $(\bar{\sigma}_{ap} - \sigma_{tr}) / \sigma_{tr}$  を示してある。Fig. 17 および Fig. 18 では Gauss 分布と Poisson 分布との比較がなされている。数学的には(14)式の Poisson 分布の確率密度関数は  $R$  が大きくなるにつれて Gauss 分布の確率密度関数に近くなってくる<sup>6)</sup>。Fig. 17 において、 $\mu = 0.05(\text{mm})$  の Gauss 分布と  $R = 5$  の Poisson 分布とは、前者が適当な  $S$  の値を

もつときに両方の分布の型が非常に接近し、同時に  $\bar{\sigma}_{ap} - \sigma_{tr}$  も近い値をもつはずである。この  $S$  の値は(14)式で  $R = 5$  の場合の最大値  $0.175$  と(13)式から得られる  $1 / \{\sqrt{2\pi} \cdot (S \times 10^3)\}$  とを等しいとおくことにより近似的に得られ、 $S = 22.7 \times 10^{-3}(\text{mm})$  となる。そこで、Fig. 17 の Gauss 分布の曲線と  $S = 22.7 \times 10^{-3}(\text{mm})$  との交点の  $\bar{\sigma}_{ap} - \sigma_{tr}$  の値 ( $\times$ 印)と、Poisson 分布の  $R = 5$  の点の  $\bar{\sigma}_{ap} - \sigma_{tr}$  の値とを比べると、両者はかなりよい一致が認められる。Fig. 18 についても全く同様である。

Fig. 19 は  $\bar{\sigma}_{ap} - \sigma_{tr}$  と、(28)式による  $\bar{\sigma} - \sigma_{tr}$  とを比較したものである。両者は傾向的にはさほど変わっていないが、前者の方が値が小さいことに注目すべきである。

#### 4. 考 察

(7)式あるいは(12)式で表わす変形応力のモデルを厳密につきつめていくと、粒径の異なる1個1個の結晶粒がいずれも(2)、(3)および(4)式を満たすという条件が必要となってくる。これは純粋に物理冶金学的な加工硬化の問題となる。そこでこの問題について考察を行なってみる。



一般に変形応力（せん断応力） $\tau$  と転位密度  $\rho$  との間にはつぎの関係が認められる<sup>7) 12)</sup>。

$$\tau = \tau^* + \alpha \mu b \sqrt{\rho} \dots\dots\dots (29)$$

ここで、 $\tau^*$ ：摩擦応力

$\mu$ ：剛性率

$b$ ：バーガース・ベクトル

変形の際に転位が迂る平均距離を  $\bar{s}$  とすると、これは粒径に比例する。粒径を  $l$  とするとつぎようになる。

$$\bar{s} = \beta l \dots\dots\dots (30)$$

また、せん断塑性歪を  $\gamma$  とするとき、つぎの関係がある。

$$\gamma = \rho b \bar{s} \dots\dots\dots (31)$$

(30)、(31)式より、(32)式が得られる。

$$\rho = \gamma / (b \beta l) \dots\dots\dots (32)$$

(32)式を(29)式に入れると、つぎの関係が得られる。

$$\tau = \tau^* + \alpha \mu b \sqrt{\gamma / (b \beta)} \cdot l^{-1/2} \dots\dots\dots (33)$$

CONRAD ら<sup>13)14)</sup>は Nb についての実験で上記のモデルを支持するような結果を得ているといわれている。

さて、引張方向の応力を  $\sigma$ 、歪を  $\epsilon$  とすると、(33)式は近似的につぎようになる。

$$\sigma = \sigma^* + 2\sqrt{2} \alpha \mu b \sqrt{\epsilon / (b \beta)} \cdot l^{-1/2} \dots\dots\dots (34)$$

ただし、 $\sigma^* \equiv 2 \tau^*$

ここで、(2)式で行なつたように  $\sigma - \epsilon$  曲線を局部的に直線で近似する場合はどうなるかを調べてみる。(34)式で  $2\sqrt{2} \alpha \mu b / \sqrt{b \beta} \equiv C$  とおくと、 $\epsilon = \epsilon_0$  (この点の  $\sigma$  を  $\sigma_0$  とする) 近傍の  $\sigma - \epsilon$  はつぎのように直線で近似される。

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 + \left. \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=\epsilon_0} \cdot (\epsilon - \epsilon_0) \\ &= \sigma_0 + (1/2) C \epsilon_0^{-1/2} l^{-1/2} (\epsilon - \epsilon_0) \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

(35)式に  $\sigma_0 = \sigma^* + C \epsilon_0^{1/2} l^{-1/2}$  を入れるとつぎようになる。

$$\sigma = \sigma^* + (1/2) C \epsilon_0^{1/2} l^{-1/2} + (1/2) C \epsilon_0^{-1/2} l^{-1/2} \cdot \epsilon \dots\dots\dots (36)$$

(36)式は(2)式と非常によく似ている。(2)、(3)、(4)式をまとめて書くとつぎようになる。

$$\sigma = 16 + x^{-1/2} + (53 + 4x^{-1/2}) \cdot \epsilon \dots\dots\dots (37)$$

そこで(36)式と(37)式との数値的な比較を行なつてみる。(36)式の係数  $(1/2) C \epsilon_0^{1/2}$  と  $(1/2) C \epsilon_0^{-1/2}$  とを以

下に表わす値を代入してもとめる。

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.4 \text{ (KEH}^{11))}, \beta = 0.5, \mu = 7.9 \times 10^8 \text{ kg/mm}^2, \\ b &= 2.48 \times 10^{-7} \text{ mm}, \epsilon_0 = 0.095 \end{aligned}$$

を代入して以下の値を得た。

$$(1/2) C \epsilon_0^{1/2} = 0.97 \text{ kg/mm}^{3/2}$$

$$(1/2) C \epsilon_0^{-1/2} = 10.2 \text{ kg/mm}^{3/2}$$

これを(37)式と比較すると Table 2 のようになる。

すなわち、(36)式と(37)式において、 $\epsilon$  を含まない項の  $l^{-1/2}$  (または  $x^{-1/2}$ ) の係数は非常によく一致している。

一方、 $\epsilon$  を含む項の  $l^{-1/2}$  (または  $x^{-1/2}$ ) の係数はやや値が異なっているが、(36)式と(37)式とにおいて  $\epsilon$  の係数として両者を比較するとつぎのように考えられる。たとえば、 $l^{-1/2}$  (または  $x^{-1/2} = 8(\text{mm}^{-1/2})$ ) のときはつぎようになる。

$$10.2 l^{-1/2} = 81.6 \text{ kg/mm}^2$$

$$53 + 4 x^{-1/2} = 85.0 \text{ kg/mm}^2$$

これらの値の差は約 4% 程度であり、実験誤差として入ってくる可能性がある。したがって、両者の間に本質的な食い違いを認めることはできない。

以上を総合すると、(36)式と(37)式とはかなりよく一致していると考えられる。(29)式は単結晶および多結晶に共通して成立する関係であり<sup>8)</sup>、多結晶の1個1個の結晶粒が(37)式を満たすという本モデルの基本的な仮定は一応の妥当性が裏付けられているといえよう。

なお、物理的意味は不明であるが  $\sigma^*$  が  $\epsilon$  の増加とともに増加するという実験結果もあり<sup>15)16)</sup>、これを考慮すると(36)式の代わりにつぎの(38)式が得られ、(37)式とほぼ同じ型の式となることをつけ加えておく。

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^* + (1/2) C \epsilon_0^{1/2} l^{-1/2} \\ &+ \{k_0 + (1/2) C \epsilon_0^{-1/2} l^{-1/2}\} \cdot \epsilon \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

### 5. 結 言

軟鋼の変形応力におよぼすフェライト粒の結晶粒径について考察を行なつた。通常、試料断面の光学顕微鏡組織写真の一定面積内の粒数を測定して求める「見かけの平均粒径」と変形応力とを対応させているが、混粒の場合には問題がある。そこで、粒径の分布を考慮した変形応力と、「見かけの平均粒径」で単純に対応づける「見

Table 2. Comparison of coefficients in the equation (36) and (37).

Equation	Coefficient of $l^{-1/2}$ (or $x^{-1/2}$ ) in the term which does not include $\epsilon$ .	Coefficient of $l^{-1/2}$ (or $x^{-1/2}$ ) in the term which includes $\epsilon$ .	Coefficient of $\epsilon$
Equation (36)	0.97	10.2	$10.2 l^{-1/2}$
Equation (37)	1	4	$53 + 4x^{-1/2}$

かけの変形応力」との差がどの程度の大きさかを検討してみた。

(1) 粒径がいかなる分布状態のときでも「歪一定」のモデルで求めた変形応力と「応力一定」のモデルで求めた変形応力はよく一致している。

(2) 粒径 ( $x$ : mm) が Gauss 分布

$$f(x) = (1/\sqrt{2\pi}S) \cdot \exp\{- (x-\mu)^2/2S^2\}$$

をする場合は、 $S$  が大きくなるにつれ、分布を考慮して求めた(1)の真の変形応力と見かけの平均粒径から求める見かけの変形応力とのずれは大きくなる。

(3) 粒径が一様分布 ( $f(x)=1/2P$ ) をする場合は、 $P$  が大きくなるにつれ、ずれは大きくなる。

(4) 粒径が Poisson 分布 ( $f(x)=\exp(-R) \cdot R^X/X!$ ,  $X=100x$ ) をする場合は、 $R$  が小さい場合はずれはかなり大きい。一方、 $R$  が大きくなる (Poisson 分布は Gauss 分布に近づく) につれ、ずれは小さくなり、しだいに Gauss 分布のずれの値に接近していく。

(5) (1) で粒径 ( $x$ ) の分布状態を考慮して変形応力を求める際に使用した基本的関係 ( $\sigma=g(x, \epsilon)$ ) について、加工硬化理論による考察を行なった。

以上の結果、軟鋼の多結晶において、見かけの平均粒径と実際の変形応力とを単純に対応させることは厳密には問題があるといえる。とくに粒径が Poisson 分布をする場合は問題である。一方、Gauss 分布や一様分布をする場合は変形応力を  $10^{-1}$  kg/mm<sup>2</sup> のオーダーで解析する場合には問題があるが、大まかな値 (1 kg/mm<sup>2</sup> 以上のオーダー) の比較の際は通常のように見かけの平均粒径を使用してもさほど問題とならない、などが明らかとなった。

## 文 献

- 1) 武智, 増井: 鉄と鋼, 56 (1970) 4, S 124
- 2) W. B. MORRISON: Trans. Amer. Soc. Metals, 59 (1966), p. 824
- 3) 松藤, 下村: 鉄と鋼, 56 (1970), p. 28
- 4) W. B. MORRISON and R. L. MILLER: Paper to be published in Proceedings of 16th Sagamore Conference (1969), p. 614
- 5) 市山, 小泉, 吉田: 鉄と鋼, 55 (1969), p. 1229
- 6) 成実, 坂井: 数理統計学要説, (1952), [倍風館]
- 7) J. E. BAILEY and P. B. HIRSCH: Phil. Mag., 5 (1960), p. 485
- 8) J. D. LIVINGSTON: Acta Met., 10 (1962), p. 229
- 9) Z. B. BASINSKI and S. J. BASINSKI: Phil. Mag., 9 (1964), p. 51
- 10) J. A. VENABLES: Phil. Mag., 7 (1962), p. 1969
- 11) A. S. KEH: Direct Observation of Imperfections

in Crystals, Interscience (1962), p. 213

- 12) D. J. DINGLEY and D. MCGLEAN: Acta Met., 15 (1967), p. 885
- 13) H. CONRAD, S. FEUERSTEIN, and L. RICE: Mater. Sci. Eng., 2 (1967), p. 157
- 14) H. CONRAD, S. FEUERSTEIN, and L. RICE: Trans. Japan Inst. Metals, 9 (1968), p. 481
- 15) Y. OHBA: Trans. Nat. Res. Inst. Metals, 9 (1967), p. 293
- 16) J. D. MEAKIN and N. J. PETCH: Symposium on the Role of Substructure in the Mechanical Behavior of Metals, (1963), p. 243

## 討 論

【質問 1】 新日本製鉄基礎研 飯野牧夫

$\sigma_n$  計算の際のモデルを明確に説明してほしい。1個1個の結晶粒を塑性変形させる応力を多結晶データ  $\sigma(x)$  ですり換えているがその根拠は? また根拠があつた場合  $\sigma_n$  は、 $\sigma_n = \frac{\int \sigma(x)f(x)x^2 dx}{\int f(x)x^2 dx}$  ではないのか。

【回答】

1個1個の結晶粒を塑性変形させる変形応力を多結晶データ:  $\sigma = 16 + x^{-1/2} + (53 + 4x^{-1/2}) \cdot \epsilon$  で置き換えているが、この関係は転位論的に導いた1個1個の結晶粒の変形応力:

$$\sigma = \sigma^* + (1/2)C\epsilon_0^{1/2}l^{-1/2} + (1/2)C\epsilon_0^{-1/2}l^{-1/2} \cdot \epsilon,$$

$$C \equiv 2\sqrt{2} \alpha \mu b / \sqrt{b\beta}$$

とかなりよく一致している (詳細は本文の「考察」参照) ので、一応の根拠はあると考えている。

また、 $\sigma_n$  を質問者の上記の数式で表わせるのは、要素がファイバー状に束ねられたもの (たとえば種々の強度、直径の針金の束) の変形応力の場合であり、結晶粒の集合体については本論文の数式が妥当である。

【質問 2】 新日本製鉄基礎研 芳賀博世

粒による弾性的、塑性的異方性を考慮した場合、結果がどの程度変わると予想されるか?

【回答】

非常に強い集合組織をもつ場合は、その集合組織方位に対応した Schmid factor によつて変形応力が影響を受けることはありうるが、通常の b. c. c. 多結晶体では迂り系の数が大きいこともあつて、粒径依存性の変形応力の本質をなしていると考えられる (本文の「考察」参照)。

佐賀ら (日本機械学会論文集, 34 (1968) 261, p. 842) は Al の多結晶を 5% 引張つてつぎの結果を得た。平均粒径 1.5 mm 以下の多結晶では1個1個の結晶粒はそのおのおの Schmid factor とは無関係にいずれもほぼ等しい相当歪を受けており、Taylor や Bishop-Hill らの考えと一致していることを認めている。

粒径分布と Schmid factor あるいは Taylor factor とを組み合わせたモデルも厳密には必要であると思われるが、第1次近似としては本論文のモデルで一応の傾向はつかめると考えている。