

鍊中における炉中酸素分圧の変化が連続的に測定され、あるいは一部作業の自動化に役立つものと考えられる。

なお WEISSBART and RUKA<sup>7)</sup> は著者らとは独立して同様の原理で酸素分圧測定器を作成したが、その酸素分圧の測定範囲は著者らの場合のごとく広範でなく、またその電池の構造も異なっている。しかしながらその獨創性には深甚の敬意を表するものである。

#### IV. 結 言

酸素イオン格子欠陥の移動による純粋なアニオン電気伝導体である固体電解質  $ZrO_2 \cdot CaO$  を用いた酸素濃淡電池を作成し高温ガス中の酸素分圧を  $10^{-1} \sim 10^{-20}$  気圧にわたり直接測定し得る方法を確立した。

用いた標準電極は  $Fe \cdot FeO$ ,  $Ni \cdot NiO$ , および  $Cu \cdot Cu_2O$  の粉末混合体であり、得られる起電力はガス組成の変化、温度変化および加電圧に関して完全に可逆的であつた。

またそのレスポンスタイムは測定不可能な位短かく、

かつ起電力は非常に安定でありライフタイムも長いことがわかつた。

さらに工業的応用についても 2, 3 の検討を加えた。

最後に著者らは本論文発表に種々御支援下さいました東京大学工学部教授松下幸雄工学博士に謹んで感謝の意を表します。

#### 文 献

- 1) H. SCHMALZRIED: Private Communication
- 2) W. D. KINGERY, J. RAPPIS, M.E. DOTY, and D. C. HILL: J. Amer. Chem. Soc., 42 (1959), p. 393.
- 3) F. HUND: Z. Phys. Chem., 142 (1952), p. 199.
- 4) K. KIUKKOLA and C. WAGNER: J. Electrochem. Soc., 104 (1957), p. 379.
- 5) R. A. RAPP and F. MAAK: Trans. Met. Soc., Amer. Inst. Min., Met. & Pet. Eng., 投稿中
- 6) J. FOSTER: オハイオ大学修士論文
- 7) J. WEISSBART and R. RUKA: Scientific Instruments, 32 (1961), p. 593.

## 鋼塊の加熱過程における熱応力について\*

(鋼塊の熱応力亀裂に関する研究—II)

原 隆 啓\*\*

### On the Thermal Stress of Ingots during Heating Process.

(Study of thermal stress cracks in steel ingots—II)

Takahiro HARA

#### Synopsis:

During the heating process thermal stress arises in the steel ingot because of two main causes; i. e. the temperature difference within the ingot and the volume change caused by the transformation.

In this report author tried to relate theoretically the method of calculating the thermal stress under high temperature. As the deformation under high temperature is accompanied by not only elastic strain but plastic strain also, it is very difficult to determine the thermal stress. Here the author denotes the deformation in elastic-plastic range by a nonlinear integral equations and by introducing the conception of equivalent total strain he calculates the stress and the plastic strain through a comparatively easy successive integration.

For the calculation of the stress during transformation range the author regards the curve of the expansion values as three straight lines and these three lines denote the three stages of transformation i. e. the pre-, mid- and post-transformation stage and so he makes calcula-

\* 昭和37年10月本会講演大会にて発表 昭和37年10月13日受付

\*\* 山陽特殊製鋼株式会社

tion according to these three stages. And he calculates the stress and plastic strain which occur when the transformation progresses from the surface to the core.

Two calculated examples are shown of high-carbon-chromium steel circular ingots at two stages; one is where the ingot is undergoing the transformation and the other is where the ingot has no relation with transformation.

The following facts have been discovered by this theoretical calculation;

(1) As for the stress distribution there is compression stress ( $\sigma_r=0, \sigma_t=\sigma_z$ ) in the outer part of the ingot and tension stress ( $\sigma_z=2\sigma_r=2\sigma_t$ ) near its core and the stress is greatest at the core in the heating process, because of high surface temperature.

(2) During the transformation the tension stress which has been greatest at the core decreases in accordance with the progress of transformation for the time, but from the beginning of transformation of the core till its completion there occurs a violent increase of the stress and plastic strain and the elastic stress becomes the greatest of all the stages.

So if some crackings take place in this case, it can be inferred that discus-form crackings will occur normal to the axis near the core when the core completes the transformation.

(Received 13 Oct. 1962)

## I. 結 言

鋼塊が加熱される過程に発生する熱応力亀裂を解明するために、前報<sup>1)</sup>において、鋼塊内部の温度分布を明らかにしたが、本報告では、この温度分布による熱応力ならびに変態による膨張変化によつて発生する熱応力を理論的に計算する方法について述べる。

高温における熱応力は、勿論、実際に測定することは不可能であり、また計算することも塑性能が大きく、塑性流動を伴つた応力を解析しなければならず、実際にはむずかしい問題が多い。したがつて、これらの計算をなされた例は数少ない。著者は、鋼の高温における弾性および塑性的性質を十分考慮した弾一塑性域における応力ならびに塑性歪の計算式により、単なる温度分布のある場合および変態点を通過する場合について計算を行なつた。以下、計算例を挙げて説明する。

## II. 弾一塑性域の応力および塑性歪の計算

弾一塑性域における計算では、線型の微分方程式でなく、直接解を求めることが容易でない非線型微分方程式となる。これを解き得る形に変形された計算式などがあるいろいろな文献<sup>2)3)</sup>にあるが、実際には計算が困難なものが多い。ここでは、H. И. Безухов<sup>3)</sup> および A. MENDELSON<sup>4)</sup>の方法を参考にし、変態による熱応力を計算する方法を確立した。

弾性および塑性問題のいずれの場合も、全く同じ釣合いならび適合の条件式が成立する。すなわち両者の相違は応力一歪の関係が異なるだけである。しかしながら、塑性歪が発生する場合は、非線型微分方程式が導かれるので、これをまず非線型積分方程式に変換し、次いでそれを逐次積分の数学的テクニックにより近似的に解くと

いう比較的簡単な方法により求めることにする。

計算方法として、半径方向に温度分布を有する長い中実円柱のごとく、3軸応力状態のものを考える。釣合いならびに適合条件と応力一歪関係より3主軸方向の全歪が次のような積分方程式の形に導くことができる。

$$\epsilon_r = f(r) + \int_0^r g(r, \epsilon_r, \epsilon_t, \epsilon_z, \epsilon_{rp}, \epsilon_{tp}) dr \dots (1)$$

また、 $\epsilon_t$  および  $\epsilon_z$  についても同様に導かれる。ここで  $f(r)$  は弾性変形で積分内は塑性変形によるものである。

塑性歪を含む応力一歪の単純なる1軸方向のものは、引張り試験によつて簡単に求め得るが、実際の場合は2軸や3軸の応力状態である。そこで、相当全歪なる概念を導入することにより塑性歪が単純なる形の全歪から計算することができる。

この理論的計算において、主歪の方向は主応力の方向に一致する、主剪断歪間の比が主剪断応力間の比に等しい、そして塑性変形では体積が一定であるという3つの通常なる仮定を置く。

相当全歪は次式によつて定義される。

$$\epsilon_{et} \equiv \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_r - \epsilon_t)^2 + (\epsilon_r - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_t - \epsilon_z)^2} \dots (2)$$

したがつて、塑性歪は次のごとく表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{rp} &= \frac{1}{3} \frac{\epsilon_{ep}}{\epsilon_{et}} (2\epsilon_r - \epsilon_t - \epsilon_z) \\ \epsilon_{tp} &= \frac{1}{3} \frac{\epsilon_{ep}}{\epsilon_{et}} (2\epsilon_t - \epsilon_r - \epsilon_z) \\ \epsilon_{zp} &= -(\epsilon_{rp} + \epsilon_{tp}) \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

ここで、1軸引張り試験により求めた応力一歪曲線から相当応力  $\sigma_e$  および相当塑性歪  $\epsilon_{ep}$  が求め得るので、相当全歪は次の式で計算することができる。

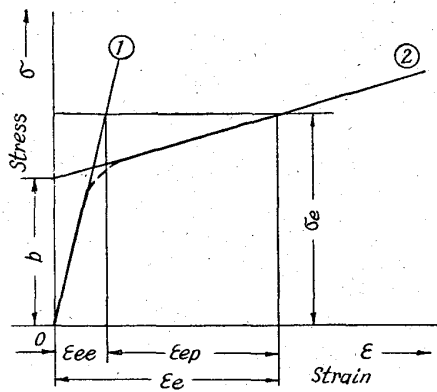


Fig. 1. Typical schematic diagram of stress-strain curve at high temperature.

$$\epsilon_{et} = \frac{2(1+\nu)}{4} \frac{\sigma_e}{E} + \epsilon_{ep} \dots \dots \dots (4)$$

次に、温度により応力-歪曲線が変化するため、この変化を加味する必要がある。高温の応力-歪関係は実際には曲線的なものであるが、歪量が極端に大きくない範囲では Fig. 1 のごとく直線的に置いても大差ないものと考えられる。そこで、弾性変形と弾-塑性変形の2つの直線に分割し、それぞれ  $\sigma = E \epsilon$ 、 $\sigma = a \epsilon + b$  と置き、弾性率および定数  $a$ 、 $b$  が温度の関数であるとす。これを (4) 式の関係に代入することにより次の関係式が求められる。

$$\epsilon_{ep} = A \epsilon_{et} - B \quad (\text{ただし } \epsilon_{ep} \geq 0) \dots \dots \dots (5)$$

この関係式の  $A$  と  $B$  が温度により変化するため、高温引張り試験によつて、その鋼種の温度変化を求めておけばよいことになる。

これら一連の関係から、弾-塑性変形範囲における応力-歪の計算が可能となる。計算方法は、(1) 式の全歪について、まずゼロ近似 (弾性変形のみ) を、積分項を無視して求める。したがつて、 $e_r$  は  $f(r)$  に等しいものと置く、次に塑性歪の値を決めるために、ゼロ近似の  $e_r$ 、 $e_t$ 、 $e_z$  を (2)、(5)、(3) 式と順次代入し、塑性歪  $\epsilon_{rp}$ 、 $\epsilon_{tp}$  を決定する、この値を再び (1) 式に代入することにより全歪の第1近似が求められる。この計算を繰返して行ない全歪または塑性歪の変化が十分に収斂するまで行なつて、この結果から応力を求め得ることができ。

### III. 丸型鋼塊 (無限中実円柱) の熱応力

実際に使用されている丸型鋼塊では、一般に長さが外径の3倍以上であるから、中腹部の応力を考える場合には、無限中実円柱と考えてもよい。また温度分布は円柱軸に対称であり、温度は半径のみの関数と考え、前

報<sup>1)</sup> で求めた関係式が成立するものとする。

(1) 変態がない場合の熱応力関係式

中実円柱の任意点における釣合いの式は次のごとし、

$$\sigma_r - \sigma_t + r d\sigma_r/dr = 0$$

また、全歪は  $e_z = dw/dz = \text{const}$ 、 $e_r = du/dr$ 、 $e_t = u/r$  である。次に応力との関係は

$$e_r = [\sigma_r - \nu(\sigma_t + \sigma_z)] / E + \epsilon_{rp} + \alpha t$$

であり、 $e_t$ 、 $e_z$  も同様に求められる。これらの関係から微分方程式を求めると次のごとく表わされる。

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{d\alpha t}{dr} + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left[ \frac{d\epsilon_{rp}}{dr} + \frac{\epsilon_{rp} - \epsilon_{tp}}{r} \right]$$

この方程式を解くことにより応力および全歪の積分方程式が得られる。なお解く場合の積分定数の決定は、中心の変位が0で、表面の  $\sigma_r$  が0であると置き、 $\sigma_z$  を求める場合の条件として  $2\pi \int_0^a \sigma_z r dr = 0$  と置いた<sup>2)</sup>。

全歪の計算結果を次に示す。

$$\left. \begin{aligned} e_r &= \frac{1-3\nu}{1-\nu} \frac{1}{a^2} \int_0^a \alpha t r dr - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_0^r \alpha t r dr \\ &\quad + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha t + P_r \\ e_t &= \frac{1-3\nu}{1-\nu} \frac{1}{a^2} \int_0^a \alpha t r dr \\ &\quad + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_0^r \alpha t r dr + P_t \\ e_z &= \frac{2}{a^2} \int_0^a \alpha t r dr + P_z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

この式が弾-塑性範囲の全歪を求める式である。ここで前報<sup>1)</sup> で求めた温度分布の式 (10) を入れることにより、応力を求め得る。温度分布は前報 (10) 式より次のごとくなる。

$$t = [t_i / \{J_0(\lambda_1) - 1\}] \cdot \{J_0(\lambda_1 r/a) - 1\} \dots \dots \dots (7)$$

また応力は次の式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= E_1 e_r + E_2 (e_t + e_z) - E_3 \epsilon_{rp} - E_4 \alpha t \\ \sigma_t &= E_1 e_t + E_2 (e_r + e_z) - E_3 \epsilon_{tp} - E_4 \alpha t \\ \sigma_z &= E_1 e_z + E_2 (e_r + e_t) + E_3 (\epsilon_{rp} + \epsilon_{tp}) - E_4 \alpha t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

(2) 変態応力の計算式

一般の鋼では、オーステナイト変態を有するために、この変態を通過するとき急激な体積変化による応力が加わることになる。いろいろな鋼種の変態の形状は Fig. 2 に示すごとく2つに大別される。この変化を計算するには、このままでは計算することが不可能であるから、図

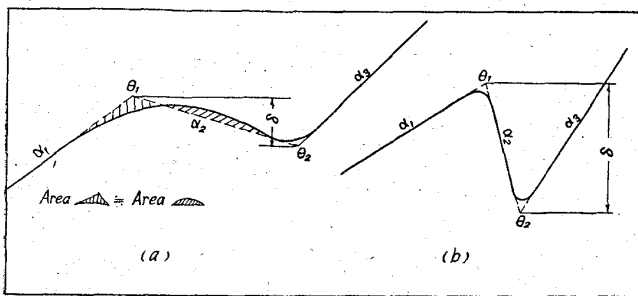


Fig. 2. Typical schematic diagrams of thermal expansion in the neighbourhood of transformation point.

Where (a) type of low-carbon steel,  
(b) type of high-carbon steel and alloy steel.

に示すごとく直線で結んだものと仮定して計算する。

また、変態には熱量の収支を伴うものであり、これを加味して求めた表面、中間および中心温度の3点だけでは正確な温度分布の式が求められないが、多少の誤差は無視し、3点を満足する式を(7)式から選んだ。

中実円柱が表面から加熱される場合、当然、表面より変態が始まり、中心に向かって進行する。したがって、温度分布が中心に対して対称であると仮定したので、変

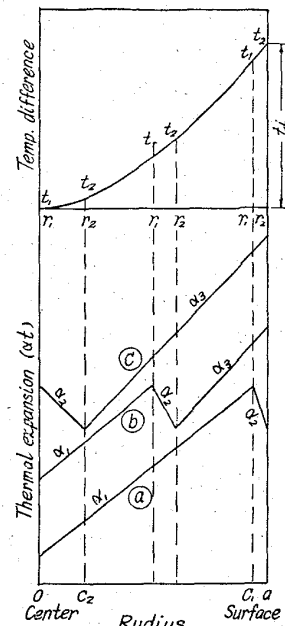


Fig. 3. Schematic diagram of progressing stages from surface to core of transformation of long solid cylinder in heating process; denoting surface trans. stage as (a), middle trans. stage as (b) and center trans. stage as (c).

計算式に使用した記号の説明

- $\sigma_r, \sigma_t, \sigma_z$ : 半径, 接線, 軸方向の応力
- $\epsilon_r, \epsilon_t, \epsilon_z$ : 半径, 接線, 軸方向の全歪
- $\epsilon_{rp}, \epsilon_{tp}, \epsilon_{zp}$ : 半径, 接線, 軸方向の塑性歪
- $\sigma_e$ : 相当応力,  $\epsilon_{et}$ : 相当全歪,  $\epsilon_{ep}$ : 相当塑性歪
- $E$ : 弾性率,  $\nu$ : ポアソン比,
- $a$ : 半径,  $r$ : 任意点の半径,  $r_1$ : 変態開始点の半径
- $r_2$ : 変態完了点の半径,  $\alpha$ : 熱膨脹率

- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ : 変態前, 変態中, 変態後の熱膨脹率,
- $\theta_0, \theta_a, \theta$ : 中心, 表面, 任意点の温度,
- $t_i = \theta_a - \theta_0, t = \theta - \theta_0,$
- $\theta_1, \theta_2$ : 変態開始, 完了温度,  $t_1 = \theta_1 - \theta_0, t_2 = \theta_2 - \theta_0$
- $\lambda_1$ : 温度分布定数,
- $u, w$ : 任意点の半径方向, 軸方向の変位

$$A = \frac{3(E-a)}{3E-(1-2\nu)a}, \quad B = \frac{2b(1+\nu)}{3E-(1-2\nu)a}$$

$$E_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad E_2 = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad E_3 = \frac{E}{1+\nu}, \quad E_4 = \frac{E}{1-2\nu}$$

$$G_0 = t_i / \{J_0(\lambda_1) - 1\}, \quad G_1 = \frac{1-3\nu}{1-\nu}, \quad G_2 = \frac{1+\nu}{1-\nu}$$

$$G_3 = \frac{1}{2(1-\nu)}, \quad G_4 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, \quad G_5 = \frac{1-2\nu}{1-\nu}$$

$t = G_0 \{J_0(\lambda_1 r/a) - 1\}$	$t_1 = G_0 \{J_0(\lambda_1 r_1/a) - 1\}$	$t_2 = G_0 \{J_0(\lambda_1 r_2/a) - 1\}$
$T(a) = G_0 \left\{ \frac{1}{\lambda_1} J_1(\lambda_1) - \frac{1}{2} \right\}$	$T(r_1) = G_0 \left\{ \frac{r_1}{\lambda_1 a} J_1 \left( \lambda_1 \frac{r_1}{a} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{r_1}{a} \right)^2 \right\}$	$T(r_2) = G_0 \left\{ \frac{r_2}{\lambda_1 a} J_1 \left( \lambda_1 \frac{r_2}{a} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{r_2}{a} \right)^2 \right\}$
$T'(r) = G_0 \left\{ \frac{a}{\lambda_1 r} J_1 \left( \lambda_1 \frac{a}{r} \right) - \frac{1}{2} \right\}$	$T'(r_1) = G_0 \left\{ \frac{ar_1}{\lambda_1 r_1^2} J_1 \left( \lambda_1 \frac{r}{a} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{r_1}{r} \right)^2 \right\}$	$T'(r_2) = G_0 \left\{ \frac{ar_2}{\lambda_1 r_2^2} J_1 \left( \lambda_1 \frac{r_2}{a} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{r_2}{r} \right)^2 \right\}$
	$T(t_1) = \frac{t_1}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{r_1}{a} \right)^2 \right\}$	$T(t_2) = \frac{t_2}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{r_2}{a} \right)^2 \right\}$
	$T'(t_1) = \frac{t_1}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{r_1}{r} \right)^2 \right\}$	$T'(t_2) = \frac{t_2}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{r_2}{r} \right)^2 \right\}$

態も同心円的に進行することになる。Fig. 3 に変態が表面より中心に推移する段階を示している。計算方法として、熱膨張率  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  を分割して計算するので、この3つの関係する範囲で変態の進行を区別しなければならない。そこで図に示すように、表面変態②、中間変態③そして中心変態①と区分し、その限界半径を  $C_1$ , および  $C_2$  とする。

変態の進行にしたがって、上記の区分により全歪を計算し、逐次積分により求めることができる。

(3) 応力計算式の総括

中実円柱において、単なる温度分布の場合ならびに変態点を通過する場合の全歪の式を次に総括する。

① 変態のない場合

$$\left. \begin{aligned} e_r &= G_1 R_0 - G_2 Q_0 + G_2 \alpha t + P_r \\ e_t &= G_1 R_0 + G_2 Q_0 + P_t \\ e_z &= 2 R_0 + P_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A)$$

② 表面に変態がある場合

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq r \leq r_1, \quad \alpha t &= \alpha_1 t \\ e_r &= G_1 R_1 - G_2 Q_1 + G_2 \alpha t + P_r \\ e_t &= G_1 R_1 + G_2 Q_1 + P_t \\ e_z &= 2 R_1 + P_z \\ r_1 \leq r \leq a, \quad \alpha t &= (\alpha_1 - \alpha_2) t_1 + \alpha_2 t \\ e_r &= G_1 R_1 - G_2 Q_3 + G_2 \alpha t + P_r \\ e_t &= G_1 R_1 + G_2 Q_3 + P_t \\ e_z &= 2 R_1 + P_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (B)$$

③ 中間に変態がある場合

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq r \leq r_1, \quad \alpha t &= \alpha_1 t \\ e_r &= G_1 R_2 - G_2 Q_1 + G_2 \alpha t + P_r \\ e_t &= G_1 R_2 + C_2 Q_1 + P_t \\ e_z &= 2 R_2 + P_z \\ r_1 \leq r \leq r_2, \quad \alpha t &= (\alpha_1 - \alpha_2) t_1 + \alpha_2 t \\ e_r &= G_1 R_2 - G_2 Q_3 + G_2 \alpha t + P_r \\ e_t &= G_1 R_2 + G_2 Q_3 + P_t \\ e_z &= 2 R_2 + P_z \\ r_2 \leq r \leq a, \quad \alpha t &= (\alpha_1 - \alpha_2) t_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) t_2 + \alpha_3 t \\ e_r &= G_1 R_2 - G_2 Q_4 + G_2 \alpha t + P_r \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{1}{a^2} \left[ \alpha \int_0^a t r dr \right] = \alpha T(a) \\ R_1 &= \frac{1}{a^2} \left[ \alpha_1 \int_0^{r_1} t r dr + \alpha_2 \int_{r_1}^a t r dr + \frac{t_1}{2} (\alpha_1 - \alpha_2) (a^2 - r_1^2) \right] = (\alpha_1 - \alpha_2) T(r_1) + \alpha_2 T(a) + (\alpha_1 - \alpha_2) T(t_1) \\ R_2 &= \frac{1}{a^2} \left[ \alpha_1 \int_0^{r_1} t r dr + \alpha_2 \int_{r_1}^{r_2} t r dr + \alpha_3 \int_{r_2}^a t r dr + \frac{t_1}{2} (\alpha_1 - \alpha_2) (a^2 - r_1^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{t_2}{2} (\alpha_2 - \alpha_3) (a^2 - r_2^2) \right] = (\alpha_1 - \alpha_2) T(r_1) + (\alpha_2 - \alpha_3) T(r_2) + \alpha_3 T(a) + (\alpha_1 - \alpha_2) T(t_1) + (\alpha_2 - \alpha_3) T(t_2) \\ R_3 &= \frac{1}{a^2} \left[ \alpha_2 \int_0^{r_2} t r dr + \alpha_3 \int_{r_2}^a t r dr + \frac{t_2}{2} (\alpha_2 - \alpha_3) (a^2 - r_2^2) \right] = (\alpha_2 - \alpha_3) T(r_2) + \alpha_3 T(a) + (\alpha_2 - \alpha_3) T(t_2) \\ Q_0 &= \frac{1}{r^2} \left[ \alpha \int_0^r t r dr \right] = \alpha T'(r) \\ Q_1 &= \frac{1}{r^2} \left[ \alpha_1 \int_0^r t r dr \right] = \alpha_1 T'(r) \\ Q_2 &= \frac{1}{r^2} \left[ \alpha_2 \int_0^r t r dr \right] = \alpha_2 T'(r) \\ Q_3 &= \frac{1}{r^2} \left[ \alpha_1 \int_0^{r_1} t r dr + \alpha_2 \int_{r_1}^r t r dr + \frac{t_1}{2} (\alpha_1 - \alpha_2) (r^2 - r_1^2) \right] \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2) T'(r_1) + \alpha_2 T'(r) + (\alpha_1 - \alpha_2) T'(t_1) \\ Q_4 &= \frac{1}{r^2} \left[ \alpha_1 \int_0^{r_1} t r dr + \alpha_2 \int_{r_1}^{r_2} t r dr + \alpha_3 \int_{r_2}^r t r dr + \frac{t_1}{2} (\alpha_1 - \alpha_2) (r^2 - r_1^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{t_2}{2} (\alpha_2 - \alpha_3) (r^2 - r_2^2) \right] = (\alpha_1 - \alpha_2) T'(r_1) + (\alpha_2 - \alpha_3) T'(r_2) + \alpha_3 T'(r) + (\alpha_1 - \alpha_2) T'(t_1) + (\alpha_2 - \alpha_3) T'(t_2) \\ Q_5 &= \frac{1}{r^2} \left[ \alpha_2 \int_0^{r_2} t r dr + \alpha_3 \int_{r_2}^r t r dr + \frac{t_2}{2} (\alpha_2 - \alpha_3) (r^2 - r_2^2) \right] = (\alpha_2 - \alpha_3) T'(r_2) + \alpha_3 T'(r) + (\alpha_2 - \alpha_3) T'(t_2) \\ P_r &= G_3 \frac{1}{a^2} \int_0^a r (\epsilon_{rp} + \epsilon_{tp}) dr - G_4 \frac{1}{r^2} \int_0^r r (\epsilon_{rp} + \epsilon_{tp}) dr + G_4 \left[ \int_0^r \frac{\epsilon_{rp} - \epsilon_{tp}}{r} dr - \int_0^a \frac{\epsilon_{rp} - \epsilon_{tp}}{r} dr \right] + G_5 \epsilon_{rp} \\ P_t &= G_3 \frac{1}{a^2} \int_0^a r (\epsilon_{rp} + \epsilon_{tp}) dr + G_4 \frac{1}{r^2} \int_0^r r (\epsilon_{rp} + \epsilon_{tp}) dr + G_4 \left[ \int_0^r \frac{\epsilon_{rp} - \epsilon_{tp}}{r} dr - \int_0^a \frac{\epsilon_{rp} - \epsilon_{tp}}{r} dr \right] \\ P_z &= -\frac{2}{a^2} \int_0^a r (\epsilon_{rp} + \epsilon_{tp}) dr \end{aligned}$$

$$e_t = G_1 R_2 + G_2 Q_4 + P_t$$

$$e_z = 2R_2 + P_z$$

.....(C)

④ 中心に変態がある場合

$$0 \leq r \leq r_2, \quad at = \alpha_2 t$$

$$e_r = G_1 R_3 - G_2 Q_2 + G_2 at + P_r$$

$$e_t = G_1 R_3 + G_2 Q_2 + P_t$$

$$e_z = 2R_3 + P_z$$

$$r_2 \leq r \leq a, \quad at = (\alpha_2 - \alpha_3)t_2 + \alpha_3 t$$

$$e_r = G_1 R_3 - G_2 Q_5 + G_2 at + P_r$$

$$e_t = G_1 R_3 + G_2 Q_5 + P_t$$

$$e_z = 2R_3 + P_z$$

.....(D)

⑤ 変態開始および完了点の半径を求める方法

$$J_0(\lambda_1 r_n/a) = (\theta_n - \theta_0)/t_i \cdot \{J_0(\lambda_1) - 1\} + 1$$

ここで、 $\lambda_1 > 0$ ,  $n=1$  または 2 である。

以上の計算式が変態を通過する場合の弾一塑性範囲における全歪の非線型積分方程式である。計算は前述した方法で行なうが、筆算では大変な労力と時間を要するので、すべて電子計算機によつて計算を行なう。

IV. 熱応力の計算例と考察

高炭素クローム軸受鋼 (SUJ2) の丸型鋼塊 (平均断面 400mm  $\phi$ ) について変態のない場合および変態点を通過する場合の応力および塑性歪の計算した例題を述べる。この鋼の高温における諸性質は次報で報告するとし、ここでは主な計算条件のみを記載する。

(1) 変態のない場合の計算例題

計算条件を Table 1(a) に示し、半径上の温度分布

を Fig. 4 に示す。計算は半径上を 20 等分して行なつた。結果を Fig. 5 にまとめ、参考に逐次近似の各回の値を示し収斂する状況を明らかにした。

表面において、弾性応力は  $\sigma_r = 0$ ,  $\sigma_t = \sigma_z$  で、ともに圧縮応力であり、塑性歪が起こつたため弾一塑性応力は極端に小さな値となることがわかる。塑性歪の  $\epsilon_{tp}$ ,  $\epsilon_{zp}$  は負で、 $\epsilon_{rp}$  が正となつている。すなわち 2 軸の圧縮のために 1 軸の方向に押し出された変形であるから、表面では破壊が起こることは考えられない。

中心において、弾性および弾一塑性応力について 3 軸方向とも引張り応力であり、 $\sigma_z = 2\sigma_t = 2\sigma_r$  の値である。

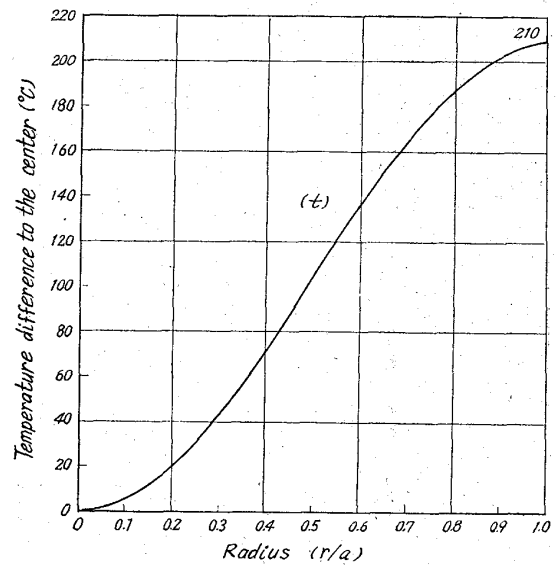


Fig. 4. Temperature distribution on the radius of circular ingot.

Table 1. The calculating conditions for determination of stress, total strain and plastic strain in elastic-plastic range at high temperature.

Specification	Calculation point	Time (h)	Temperature				Temp. const $\lambda_1$	Young's Modulus $E$ ( $\times 10^4$ kg/mm <sup>2</sup> )	Poisson's ratio $\nu$	Coeff. therm. expans. $\alpha$ ( $\times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ )	Note
			Surface $\theta_a$ ( $^\circ\text{C}$ )	Center $\theta_0$ ( $^\circ\text{C}$ )	Mean $\theta_m$ ( $^\circ\text{C}$ )	Surface-center diff. $t_i$ ( $^\circ\text{C}$ )					
a	—	—	970	760	865	210	3.70	1.01	0.332	32.0	$E_q$ (A)
b	1	2.52	740	639	690	101	1.50	1.50	0.383	17.5	" (A)
	2	2.58	760	659	708	104	1.37	1.42	0.324	$\uparrow$	$\gamma_1 = 0.177m$ " (B)
	3	3.12	815	702	759	113	0.60	1.24	0.326	$\alpha_1 = 17.5$ $\alpha_2 = -70.0$	$\gamma_1 = 0.116$ $\gamma_2 = 0.143$ " (C)
	4	3.28	868	740	804	128	0.05	1.12	0.328	$\alpha_3 = 32.0$	$\gamma_2 = 0.076$ " (D)
	5	3.42	915	750	833	165	1.70	1.06	0.330	$\downarrow$	$\gamma_2 = 0.046$ " (D)
	6	3.54	952	760	856	192	3.75	1.02	0.331	32.0	" (A)

Note 1) Steel: High-carbon-chromium steel (SUJ2). 2) Ingot section: 400mm  $\phi$   
3) Transf temp:  $\theta_1 = 740^\circ\text{C}$   $\theta_2 = 760^\circ\text{C}$

また塑性歪も  $\epsilon_{zp} = -2\epsilon_{ip}$   
 $= -2\epsilon_{rp}$  の関係にあり、  
 いわゆる3軸引張りの1軸  
 が大きいために、その方向  
 に引き上げられたという形  
 の変形である。このことか  
 ら、もし破壊が起こるとす  
 れば、軸方向の応力によつ  
 て亀裂が起こる可能性が大  
 きいことがいえる。この中  
 心における応力は非常に注  
 目されるものである。

(2) 変態点を通過する  
 場合の計算例題

鋼塊の加熱過程で表面  
 が変態を開始して中心が完  
 了するまでの範囲において  
 応力は順次変化をするもの  
 であるが、この変化の状況  
 を知るためこの範囲を適当  
 なる6つの時期に分割して  
 計算を行なった。Fig. 6にこの分割の要領を示し、その  
 計算条件を Table 1 (b) に挙げた。ここで、分割点  
 ①は変態開始直前、②は表面変態の完了時、③は中間変  
 態時、④は中心変態開始時、⑤は中心変態の途中、⑥は  
 変態完了直後の6つの時期を選んで計算した。この結果  
 を Fig. 7 にまとめた。

弾性的計算では、中心の軸方向が最大引張り応力であ  
 り、この応力変化に注目すれば、①から④までは減少  
 し、⑤⑥で急激に増加している。弾一塑性応力も同様な  
 傾向であるが、変態の進行と共に温度が上昇するために  
 応力の値は増加しなくとも破壊に対する危険度は増大す  
 るから、⑥が最も危険だと云える。また、塑性歪も⑤⑥  
 で急激に増大する。このことから、変態完了時に中心付  
 近において、軸方向に直角で円盤状の亀裂が起こるであ  
 ることが明確となった。

V. 結 言

鋼塊の熱応力亀裂を理論的に解明するために、鋼塊内  
 部に発生する温度差ならびに変態の体積変化のために起  
 くる応力を計算によつて求める方法を確立した。

軸受鋼 (SUJ2) についての計算例を挙げ、応力分布  
 の変化を明らかにした。なお、加熱過程では、中心の軸  
 方向が最大引張り応力であり、変態点を通過するときの

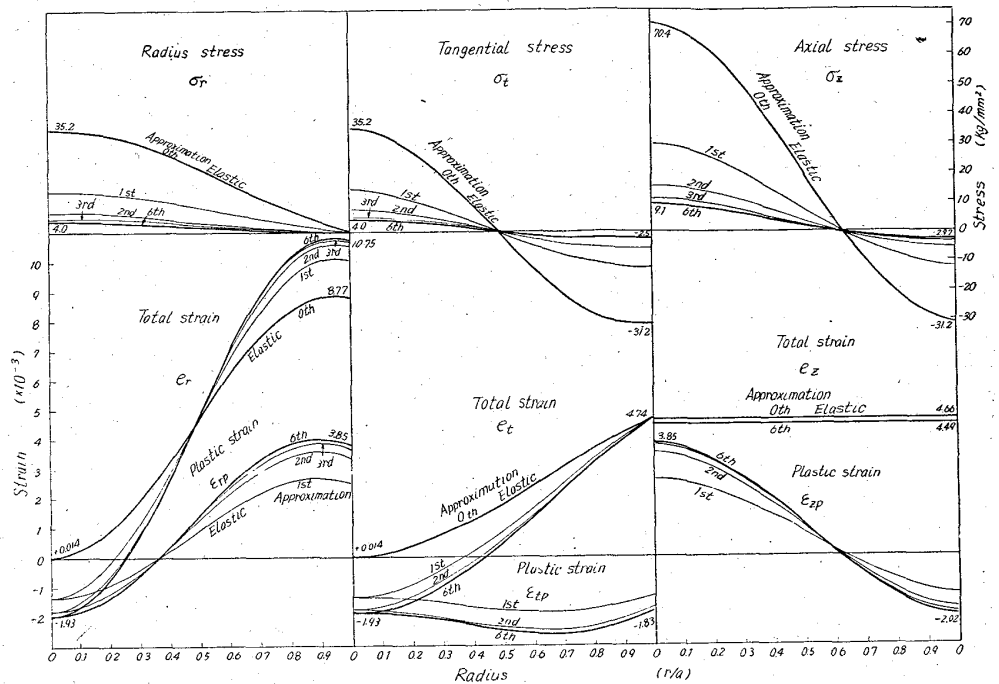


Fig. 5. The results of calculation processes by successive integration method of the stresses, total strains and plastic strains in elastic-plastic range where there is a temperature gradient on the radius under the conditions of Table 1 (a).

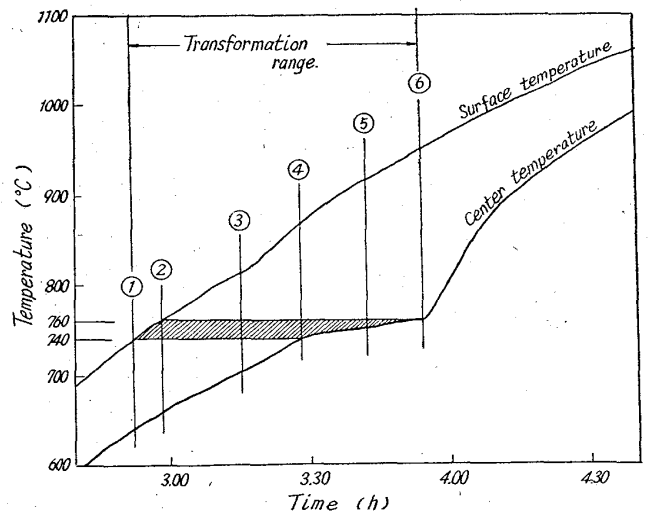


Fig. 6. The dividing points for calculations when an ingot passes the transformation point, where ① and ② are just before and just after the transformation of the surface; ③ transforming stage of the intermediate part between surface and core; ④, ⑤ and ⑥ are just before, during and just after the transformation of the core.

変化は、変態を完了するとき、中心の軸方向の応力が急  
 激に増大し、もし亀裂が発生するとすれば、この時が最  
 も危険であり、亀裂は中心付近に軸方向に直角な円盤状

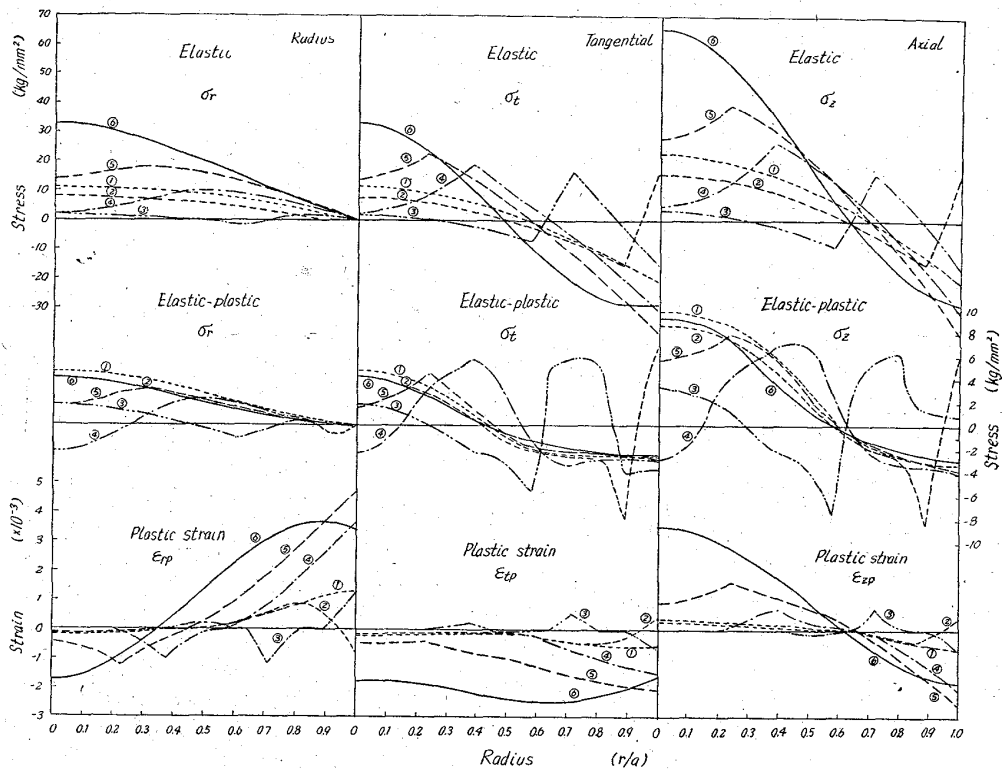


Fig. 7. The calculated results of the change of stresses and plastic strains when an ingot passes the transformation point under the condition of Table 1 (b).

に発生するであろうことを計算により明らかにした。

最後に本研究に御懇切な御指導を賜った九州大学教授工学博士石橋正先生に深甚の感謝を捧げる。また、終始御指導、御援助を賜った山陽特殊製鋼(株)荻野一社長ならび工学博士上杉年一常務取締役ほか幹部の方々、そして実験および計算に協力願った高田正男、太田邦夫、鳥谷徹の三君に厚く感謝の意を表す。

#### 文 献

1) 原 隆啓, 鉄と鋼, 49 (1963) 11, p. 1669

- 2) S. TIMOSHENKO: 材料力学, コロナ社, 昭和30年, p. 178~182
- 3) H. И. BEZYKOB: 弾性塑性論, 日刊工業新聞社 昭和34年, p. 301~325
- 4) A. MENDELSON, S. S. MANSON: NASA Tech. Rep. R-28 (1959) p. 1~24
- 5) 山田嘉昭, 中原益治郎: 塑性学, 日本機械学会編 昭和35年, p. 95~110, p. 312~314
- 6) 山本善之: 弾性塑性, 朝倉書店, 昭和36年 p. 178