

オーステナイトの混粒の新しい表示方式について

(昭和 28 年 10 月本会講演大会にて発表)

● 堀 川 映 二*

ON THE NEW METHOD OF REPRESENTATION OF THE
MIXTURE OF SEVERAL AUSTENITE GRAIN SIZES

Eiji Horikawa

Synopsis:

In indicating austenite grain size, the hitherto-used method is sufficient in case all the grains are of almost uniform size, but if there are different sizes of grains mixed up, the old method is of no effect at all, and when the author try to use it forcibly, the following faults will come out:-

- (1) Even if it is of uniform grains, there is no way of ascertaining it.
- (2) When grains of large size and of small size are mixed up closely as well as uniformly in the microscopic field, it is to be represented as of uniform grains (microscopic mixed grains), though it seems to be of mixed-up grains.
- (3) As the sample is looked in its section, small-size grains will naturally be seen more than those that actually are, while large size grains are less.
- (4) There is no way of estimating the volume fractions of large-size and small-size grains contained in a sample.

(5) Discrepancy in the number of grain sizes obtained by the hitherto-used method denotes only the differences of average grain sizes in different visual fields, and does not exactly represent the grade of the mixed-up grains. (macroscopic mixed grains.)

In order to make up these shortcomings and to represent mixed-up grains exactly, the author accordingly tried to work out distribution function i. e. $g(r)$ of radii of grains contained in a sample following method:-

Drawing a random line on the top of each microscopic photo of a sample, at the same time making the ensemble of length of intercepts $\{L_i\}$ where L is lineal traverse of length limited by grain boundaries, the distribution function of L_i , i. e. $f(L)$ is to be finally found out.

When applying the theory actually, the intercepts are first classified into three groups (large length of intercept which is denoted by A_0): small intercepts (below $A_0/4$), medium intercepts (from $A_0/4$ to $A_0/2$) and large intercepts (over $A_0/2$) and the author count fractions of these intercepts α' , β' and γ' . And by use of the values of these α' , β' and γ' , the following quantities are obtained.

- (1) Volume fraction of small grains (its diameters extend from $\sqrt{V_0}/8$ to $A_0/4$) α , medium grains (from $A_0/4$ to $A_0/2$) β , and large grains (above $A_0/2$) γ .
- (2) The radius of such sphere as gives the average value of total grains volumes.
- (3) The degree of mixed grains.
- (4) The surfacial area of grains boundaries in the unit volume.
- (5) The average value of lengths of intercepts calculated out theoretically from the $g(r)$ which is obtained by $f(L)$.

In this study, equations and figures or tables giving the above mentioned values are proposed.

Further, if there is the greater discrepancy between (5) and the actual average length of intercept over 5%, the classification into three groups will be at fault, and therefore it should be classified into more groups, and the equation thereof are also here proposed.

I. 序 言

オーステナイトの粒度を表示する場合に、単一の大きさの粒が整つて居る時には従来の学振法でこと足りた。しかし種々の大きさの粒が混在して居る場合には、従来

の粒度表示法では一指も染めることが出来ない。唯、ミクロ的（顕微鏡の一視野内で）には整粒でマクロ的（試料全体として）に混粒の場合には未だ許される点もある。

* 八幡製鐵所技術研究所

うが、その時には視野数に対してもつと検討の要がある。茲ではミクロ的に混粒の場合（マクロ的には勿論適用出来る）にもそれを論ずる方法を呈示しようとする。

近年、area, lineal 及び point analysis の発達と共に試料の中に含まれる異相の量或いは母体中に散布された異相の平均粒の大きさを見出す為若干の論文を見ることは出来る（例えば R. L. Fullman: "Measurement of Particle Sizes in Opaque Bodies" J. of Metals (March 1953) p. 447 一但し茲に提出された論文 "オーステナイトの混粒度の表示方式について" の大部分は 1952 年 6 月の学振 19 小委に報告したものである）。

しかし上記論文中には粒の大きさを分類して各種の大きさの粒の分率を出す様な方法は見出されない。

所で現存する学振法では混粒を取扱う場合に次の欠点がある。

- (1) たとえ整粒であつたとしてもその証明法がない。
- (2) 顕微鏡の視野の範囲で大小の粒が一樣に密に混り合つておる場合には、直観的には混粒であつても整粒として表示される。
- (3) 断面で見るのであるから小粒は実際に含まれるものより多く現われるのであろうし大粒は少く現われる。
- (4) 試料内に含まれる小粒及び大粒の分率を推定する方法がない。
- (5) 学振法で測定した場合の粒度番号のばらつきは異つた視野における平均粒度の違いを示すに止り、混粒を表示していない。

そこで茲では之等の欠点を除き混粒を正しく表示する目的から試料の断面の顕微鏡写真の上に直線を引き、粒界によつて切られる截片の長さの集合 $\{Li\}$ を得、その最大のを A_0 として之等截片を次の三群に分類する：0 乃至 $A_0/4$ の小截片、 $A_0/4$ 乃至 $A_0/2$ の中截片、 $A_0/2$ 以上の大截片。そして之等各種截片の数を勘定し、それ等の占める割合即ち分率 α' , β' 及び γ' を計算する。之等 α' , β' , γ' を基にして

- (1) 直径が $A_0/8$ 乃至 $A_0/4$ の小粒、 $A_0/4$ 乃至 $A_0/2$ の中粒及び $A_0/2$ 以上の大粒の体積分率 α , β , γ
 - (2) 全体の体積の平均値を与える様な球の半径（今後之を平均粒半径と呼ぶ）
 - (3) 混粒度
 - (4) 単位体積中の粒界面積、(5) 平均截片長
- を与える方程式並びに図表を呈出する。

II. 理 論

之より理論を述べるに当り、計算の便宜上截片の長さ

L 自身を探らないで $L/2=l$ を用いる事にする。又計算の都合上問題を次の三段階に分つて取扱う。

- (i) 唯一種の球のみが存在する場合。
- (ii) 三種の球が混合しておる場合。
- (iii) 半径が連続的に変化する場合。

以上の何れの場合も l の分布函数を見出す問題を解く、即ち (ii) では三種の球の混合割合が判つておる場合に l の分布函数を求める事であり、(iii) の場合は球の半径の分布函数が判つておる場合に l の分布函数を求めるのである。

(i) 唯一種の球のみが存在する場合の l の分布函数：半径 r_0 の球を直線で刺した場合に得られる截片の長さを L とする。計算の便宜上 L を論ずる代りに $l=L/2$ を論ずる。然る時 l の値は $[0, r_0]$ 間のあらゆる値を取り得る。 l の値が l 乃至 $l+dl$ の範囲にある確率 $f(l)dl$ ($f(l)$ を l の値の分布函数と云う) を求めよう。一本の直線がある時その直線が球を中心より x だけ離れた距離で切つた時の l の値は

$$l=(r_0^2-x^2)^{1/2} \dots\dots\dots(1)$$

である。球の中心がその直線のまわりに一樣に分布（或る充分に大きい体積中に含まれる中心の数はその体積に比例するの意）しておるものとすれば、球が中心から x 乃至 $x+dx$ で切られる確率は

$$k2\pi x dx \dots\dots\dots(2)$$

である、中心が直線より r_0 以上距れておる球は切られないから

$$\int_0^{r_0} k2\pi x dx = 1$$

なる様に常数 k を決めれば (2) は

$$(2x/r_0^2) dx \dots\dots\dots(3)$$

でなければならない。(1) より変数を x より l に変換すれば、

$$(2l/r_0^2) dl \dots\dots\dots(4)$$

となる。之即ち求むる分布函数である。

(ii) 半径 r_1, r_2, r_3 の三種の球が夫々容積分率 α, β, γ だけ混合しておる時の l の分布函数：

問題にかかる前に次の予備定理を証明しておく

【定理】 上記の場合、各種球の全截片の長さの和への関与率は α, β, γ である。

【証明】 小球の個数を n_1 とし、中球及び大球のそれを n_2 及び n_3 とすれば

$$n_1 r_1^3 : n_2 r_2^3 : n_3 r_3^3 = \alpha : \beta : \gamma \dots\dots\dots(5)$$

である。一本の直線が平均として何個の小球を貫くかを

考える。小球の底面への正射影は πr_1^2 である。従つて小球の全正射影の和は $n_1 \pi r_1^2$ である。容器の底面積を A とすれば、之等正射影は平均として $n_1 \pi r_1^2 / A$ 重に重つておる。従つて一本の直線が刺し貫く直線の数に平均して $n_1 \pi r_1^2 / A$ 個である。又小球によつて切られる l の平均値は (4) より

$$\int_0^{r_0} l f(l) dl = \int_0^{r_0} (2l^2 / r_1^2) dl = 2r_1 / 3 \dots\dots(6)$$

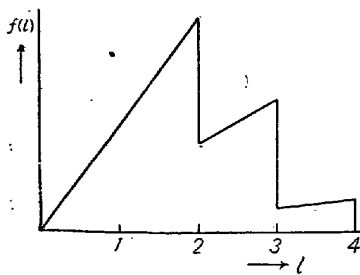
であるから、小球より得られる截片の総和は $4n_1 \pi r_1^3 / (3A)$

となる。同様に中球及び大球より得られる截片の総和は夫々 $4n_2 \pi r_2^3 / (3A)$ 及び $4n_3 \pi r_3^3 / (3A)$ となる。従つて截片の総和への各種球の関与率は $n_1 r_1^3 : n_2 r_2^3 : n_3 r_3^3$ となる。所で (5) の式が成立するから、之で証明終り。

次に $0 < L < 2r_1$ の小截片と $2r_1 < L < 2r_2$ の中截片と $2r_2 < L < 2r_3$ の大截片の数を求めよう。全截片の長さの和を L_s とすれば前の予備定理より小球を切つて得られた截片の長さは αL_s である。小球を切つて得られる平均截片長は (6) より $4r_1 / 3$ であるから、小球を切つて得られる截片の個数は $3\alpha L_s / (4r_1)$ である。同様に中球を切つて得られる截片の個数は $3\beta L_s / (4r_2)$ である。(4) なる形の分布函数より、この中分率 r_1^2 / r_2^2 だけが小截片となり、その他は中截片である。最後に大粒を切つて得られる截片数は $3\gamma L_s / (4r_3)$ であり、その小中截片は分率 r_1^2 / r_3^2 で、中截片は分率 $(r_2^2 - r_1^2) / r_3^2$ で、残りは大截片である。従つて小截片の総数は $3L_s r_1^2 (\alpha / r_1^3 + \beta / r_2^3 + \gamma / r_3^3) / 4$ であり、中截片の数は $3L_s (r_2^2 - r_1^2) (\beta / r_2^3 + \gamma / r_3^3) / 4$ で、大截片の数は $3L_s (r_3^2 - r_2^2) \gamma / r_3^3 / 4$ である。従つて小截片、中截片、大截片の分率を α' , β' , γ' とすれば

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= r_1^2 (\alpha / r_1^3 + \beta / r_2^3 + \gamma / r_3^3) / (\alpha / r_1 + \beta / r_2 + \gamma / r_3) \\ \beta' &= (r_2^2 - r_1^2) (\beta / r_2^3 + \gamma / r_3^3) / (\alpha / r_1 + \beta / r_2 + \gamma / r_3) \\ \gamma' &= (r_3^2 - r_2^2) \gamma / r_3^3 / (\alpha / r_1 + \beta / r_2 + \gamma / r_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots 7$$

となる。 $\alpha = 0.25$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 0.25$ で $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 4$ の場合の l の分布函数 $f(l)$ を第 1 図に示す。



第 1 図

(iii) 色々の半径の球が混在し半径の分布函数 $g(x)$ が与えられておる時の l の分布函数:

容器中の球の数を N とする。半径が x 乃至 $x+dx$ の範囲にある球の数は $Ng(x)dx$ である。一本の直線が之等の球を刺し貫く数 (截片の数) は

$$\pi x^2 Ng(x) dx / A \dots\dots\dots(8)$$

である。之等の截片の中、 l が l 乃至 $l+dl$ の範囲にあるものの数は (4) より

$$(2l/x^2) [\pi x^2 Ng(x) dx / A] dl = 2l [\pi Ng(x) / A] dl \cdot dx$$

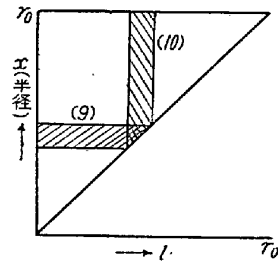
である。全截片の数は最大の球の半径を r_0 とすれば、

$$\int_0^{r_0} dx \int_0^{r_0} 2l [\pi Ng(x) / A] dl = (\pi N / A) \int_0^{r_0} x^2 g(x) dx$$

$$\dots\dots\dots(9)$$

となる。左辺の積分の順序を変換すれば (第 2 図参照)

$$(\pi N / A) \int_0^{r_0} dl \int_l^{r_0} 2l \cdot g(x) \cdot dx \dots\dots\dots(10)$$



第 2 図

となる。(9) の積分は第 2 図中 (9) の様な帯状のものを x について寄せ集めたもので、(10) の積分は図中 (10) の様な帯状のものを寄せ集めたものである。借て (10) の積分はすべての球による l が l 乃至 $l+dl$ の範囲にある截片の数は

$$(\pi N / A) \left\{ 2l \int_l^{r_0} x^2 g(x) dx \right\} dx$$

であることを示しておる。所で一方 (9) より截片の総数は

$$(\pi N / A) \int_0^{r_0} x^2 g(x) dx$$

であるから、 l 乃至 $l+dl$ に含まれるものの分率は

$$f(l) dl = \left\{ 2l \int_l^{r_0} g(x) dx \right\} dl / \int_0^{r_0} x^2 g(x) dx \dots\dots(11)$$

である。之で半径の分布函数 $g(x)$ が与えられた時の截片の分布函数 $f(l)$ が得られた。

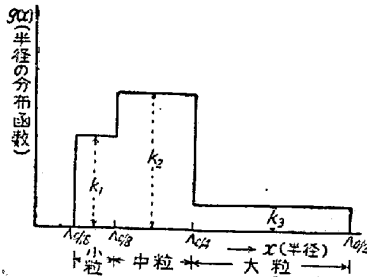
III. 理論 (續き)

之より前述 (iii) に基き、半径の分布函数 $g(x)$ として適当な形を想定して序文に述べた 5 つの問題に解答を与えよう。

倍て $g(x)$ として簡単に (A_0 を最大截片長とする時)

$$g(x) = \begin{cases} k_1 & A_0/16 < x < A_0/8 \\ k_2 & A_0/8 < x < A_0/4 \\ k_3 & A_0/4 < x < A_0/2 \end{cases} \dots\dots\dots(12)$$

を考える。この分布型を第 3 図に示す。



第 3 圖

この時 $g(x)$ は分布函数であるから $\int_0^{A_0/2} g(x)dx = 1$ でなければならない。即ち

$$A_0(k_1/4 + k_2/2 + k_3)/4 = 1 \dots\dots\dots(13)$$

となる。又小粒及び大粒の分率は夫々

$$\frac{\int_{A_0/16}^{A_0/8} x^3 g(x) dx}{\int_{A_0/16}^{A_0/2} x^3 g(x) dx} \text{ 及び } \frac{\int_{A_0/4}^{A_0/2} x^3 g(x) dx}{\int_{A_0/16}^{A_0/2} x^3 g(x) dx} \text{ より}$$

計算される、即ち

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= k_1/256 / (k_1/256 + k_2/16 + k_3) \\ r &= k_3 / (k_1/256 + k_2/16 + k_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

となる。最後に小截片及び大截片の分率は (11) より

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= (7k_1/192 + k_2/8 + k_1/4) / \{7(k_1/64 + k_2/8 + k_3)/3\} \\ r' &= (4k_3/3) / \{7(k_1/64 + k_2/8 + k_3)/3\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

となる。そこで第一の問題、即ち実測で得られた截片分布 α' 及び r' を知つて α , r を推定する問題は (13) 及び (15) の連立方程式より k_1, k_2, k_3 を解いて (14) に代入する事によつて解決される。

第二の体積の平均値を与える様な球の半径 \bar{x} を求める問題は

$$\left\{ \int_0^{A_0/2} x^3 g(x) dx \right\}^{1/3} \text{ で計算される。即ち } \bar{x} = \{15/4 \cdot (k_1/256 + k_2/16 + k_3) \cdot A_0/4\}^{1/3} A_0/4 \dots\dots(16)$$

となる。

第三の混粒度は先ず混粒度から定義してかからなければならぬ。混粒は単に半径の平均値からのバラッキで定義するわけにはゆくまい。何故なら微細な粒であるならば相当な混粒でもバラッキの絶対値は小さかるうし、

巨大な粒であるならば整粒に近かるうともバラッキの絶対値は大きかるう、そこでバラッキを半径の平均値で除したものを以て混粒を表わす事にする。統計的に云うならば変動係数を以て表わすことにする。即ち

$$\text{変動係数} = \sigma_x / \bar{x} \quad (\sigma_x^2 = \text{分散}, \bar{x} = \text{平均値})$$

を以てする。分布函数 (12) を用いた場合に此の値は

$$\begin{aligned} C.V. &= [7(k_1/64 + k_2/8 + k_3)/3 \cdot 4/A_0 \\ &\quad - \{3(k_1/16 + k_2/4 + k_3)/2\}^2]^{1/2} / \\ &\quad \{3(k_1/16 + k_2/4 + k_3)/2\} \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

となる。

今度は便宜上第五の問題を取扱う。即ち平均截片長 \bar{L} を求める。

$$\begin{aligned} \bar{L} &= 2 \int_0^{A_0/2} l f(l) dl \\ &= 15A_0(k_1/256 + k_2/16 + k_3)/28 \\ &\quad / (k_1/64 + k_2/8 + k_3) \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

この量は半径の分布函数 $g(x)$ を想定したならば (11) より計算によつて求める事も出来るし、又勿論実測によつて知る事も出来る。我々は粒を掘り出して篩別する事が出来ないのであるから、此量が想定した分布函数が妥当であるかどうかをチェックする唯一の簡単なしかも敏感な武器であると云える。この事柄については後に適切な実例について触れるであろう。

最後に単位体積当りの粒界面積の問題を取扱う。単位体積中の粒の数を N とすれば半径 x 乃至 $x+dx$ の範囲にある粒の数は $Ng(x)dx$ である。此等の粒の表面積は $4\pi x^2 Ng(x)dx$ である。従つて全粒の表面積は $\int_0^{A_0/2} 4\pi x^2 Ng(x)dx$ である。粒界はすべて2つの粒で共有されておるから之を2で除したものに近いであろう。 N の推定の方法は平均粒の体積 $4\pi \bar{x}^3/3$ で単位体積1中の球の占める体積約0.71を除して置けばよい。即ち単位体積中の粒界面積は

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^{A_0/2} 4\pi x^2 g(x) dx / 2 \right) \cdot (0.71/4\pi \bar{x}^3/3) \\ &\approx \{8(k_1/64 + k_2/8 + k_3)/(3A_0)\} \\ &\quad / (k_1/256 + k_2/16 + k_3) \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

となる。之は (18) の結果とにらみ合せて見れば

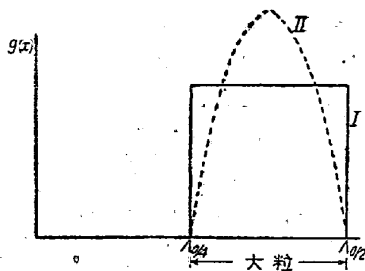
$$\approx 1/(0.7\bar{L}) \dots\dots\dots(20)$$

となる事が了解される。従つて平均截片長 \bar{L} さえ求めて置けば単位体積中の粒界面積は容易に求められる。

IV. 整 粒

整粒とは大粒のみしか存在しない場合を云う。即ち半径の範囲が $A_0/4$ 乃至 $A_0/2$ に亘るものを云う。第4図

に整粒の二種の型の分布函数を示した。



第 4 圖

実線 I は $g(x) = 4/A_0$ ($A_0/4 < x < A_0/2$) の場合を示し、点線 II は

$$g(x) = 384(A_0/2 - x)(x - A_0/4)/A_0^3$$

を示したものである。以上何れの場合も (11) を用いて (15) を求める時と同様の計算により小截片と中截片の分率を求めた結果を第 1 表に示す。何れの場合も結果として大差はない。尚その他にも $g(x)$ を考えて計算してみたが矢張りあまり差はなかつた。

第 1 表

| | 小 截 片 | 中 截 片 |
|----|-------|-------|
| I | 0.107 | 0.322 |
| II | 0.109 | 0.326 |

この場合に平均粒半径は $0.39A_0$ で、C.V. は 0.192 であり、平均截片長は $0.536A_0$ である。

従つて或る試料がある場合にそれが整粒であるかどうかを判定する為には次の如くすればよい。或る試料から N 個の截片を採つた時、小截片は理論的には $0.108N$ 個得られる筈であり、中截片は $0.324N$ 個、大截片は $0.568N$ 個ある筈である。それよりの小截片の誤差を X 、中截片のそれを Y とすれば

$$X^2 = X^2/(0.108N) + Y^2/(0.324N) + (X \pm Y)^2/(0.568N)$$

は自由度 2 の χ^2 分布をする。従つて X^2 の値を計算して、それが例えば 4.6 (或いは 6.0) よりも大きくなつた時には“その様な截片分布を示す試料が整粒である”と云う統計的仮説を 10% (或いは 5%) の危険率で棄却するのである。従つて此様な時には整粒でないと断定を下し理論 (続き) において計算した諸量を計算すればよい。

尚、今迄述べた議論を後に表示しておく。

V. 實驗と推定に必要な截片の個數

實驗結果を明瞭に把握する為に理論の (ii) の場合を採つた。ペントナイトを水でこねて直径 5mm, 10mm,

20mm の三種の球を作り (後には乾燥して稍収縮した) それ等を任意の比に混ぜて蠟で固定して鋸で引いて断面を作りその上に直線を引いて截片の集合を得た。

第一回の實驗においては小粒 20%, 中粒 50%, 大粒 30% を配合して 736 個の截片を得た。その時最大の L の値は 9.5mm で小截片は 354 個、中截片は 296 個、大截片は 86 個となつた。第二回の實驗では小粒 10%, 中粒 60%, 大粒 30% を配合して 210 個の截片を得た。その時小截片 79 個、中截片 102 個、大截片 29 個を数えた。之等の實驗結果より (7) の連立方程式を解き α, β, γ を求めた結果を第 2 表に掲げたが、何れも計算と配合とが可成りうまく一致しておる事が見られる。

第 2 表

| | 第 1 回 | | 第 2 回 | |
|----|-------|-----|-------|-----|
| | 計 算 | 配 合 | 計 算 | 配 合 |
| 小粒 | 17.6 | 20 | 8.0 | 10 |
| 中粒 | 50.7 | 50 | 57.1 | 60 |
| 大粒 | 31.7 | 30 | 34.9 | 30 |

併せてそこで何個の截片を採つたならば粒の分率を $\pm 5\%$ 範囲に 90% の確実さで推定する事が出来るかと云う問題を考究して置く必要がある。截片数が少いと最も偏り易いのが大截片の数である。大截片の数に最も敏感に影響を受けるのは大粒である。従つて大粒に注目する。

問題を具体的に取扱うために前述の實驗の様に $r_1:r_2:r_3 = 1:2:4$ に取り、 $\alpha = 0.25, \beta = 0.50, \gamma = 0.25$ の場合を考える。その時 (7) は

$$\begin{aligned} \alpha' &= (8\alpha + \beta + \gamma/8) / \{4(2\alpha + \beta + \gamma/2)\} \\ \beta' &= 3(\beta + \gamma/8) / \{4(2\alpha + \beta + \gamma/2)\} \\ \gamma' &= (3\gamma/2) / \{4(2\alpha + \beta + \gamma/2)\} \end{aligned}$$

となり、之より α, β, γ を解けば

$$\begin{cases} \alpha = (3\alpha' - \beta') / (3\alpha' + 7\beta' + 14\gamma') \\ \beta = (8\beta' - 2\gamma') / (3\alpha' + 7\beta' + 14\gamma') \\ \gamma = 16\gamma' / (3\alpha' + 7\beta' + 14\gamma') \end{cases} \dots (21)$$

となる。従つて上記配合の場合には $\alpha' = 0.5625, \beta' = 0.3542, \gamma' = 0.0833$ である。その時

$$|d\gamma| \leq \left| \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha'} \right| \cdot |d\alpha'| + \left| \frac{\partial \gamma}{\partial \beta'} \right| \cdot |d\beta'| + \left| \frac{\partial \gamma}{\partial \gamma'} \right| \cdot |d\gamma'|$$

であるから、 $|d\gamma| = 0.05$ になるすべての原因を $|d\gamma'|$ に帰せしめるとするならば、 $|d\gamma'|$ に最大どの位の誤差迄が起きててもよいかを判る。(21) の下段の式を計算して $|d\gamma|$ の最大 0.05 に対応して $|d\gamma'|$ の最大は 0.0213 となる。即ち N 個の截片を取つた時に平均としては $0.0833N$ 個の大截片があるが、標本として 0.0833

$\pm 0.0213N$ 位迄は偏つてもかまわないと云う事である。そこで問題は上述の範囲に大截片が見出される確率が 90% 以上ある様な N を見出せば解決する。標本中の大截片の個数の分散は二項分布の定理より $\sigma^2 = 0.0764N$ である。従つて

$$(0.0213N)/(0.0764N)^{1/2} \geq 1.645$$

を満足する最小の N を見出せばよい。之より $N=456$ を得る。即ち 90% の確実さで r を 5% の誤差の範囲内に推定する為には 456 個の截片があれば充分である。

配合が異なる場合には勿論この数は変化するが、実際問題として先ず 1,000 個の截片を取れば充分であらう。

VI. 實用化と實例

今迄述べた事に基いて實用化の方法を示そう。先ず粒度試料の四辺より各一枚宛の写真を撮る註¹⁾。そしてこれらの写真上に何本かの直線を引き約 250 宛、全計 1,000 個の截片を採り、その最大のものを A_0 とする。

0 乃至 $A_0/4$ の小截片と $A_0/4$ 乃至 $A_0/2$ の中截片と $A_0/2$ 以上の大截片の数を数える註²⁾此の操作を実施するためには lineal analysis の装置を使用する事は有効であろうが、二個のディバイダーを用意して一方を $A_0/2$ 、他方を $A_0/4$ に開いて直線上にあてがい、 $A_0/2$ 以上の截片の数を大截片の数、 $A_0/4$ 以下のものの数を小截片の数とし、又兩者の間に入る截片の数を中截片の数として採れば、比較的簡単に各截片に分類する事が出来る。

(1) その時小截片及び中截片の数が第 3 表に示した範囲内にある時にはその試料は整粒と見做して宜しい。

第 3 表

| 小截片の数 | 許容される中截片の数 |
|---------|------------|
| 87~89 | 319~343 |
| 92~94 | 305~352 |
| 97~99 | 298~356 |
| 102~104 | 293~357 |
| 107~109 | 291~356 |
| 112~114 | 290~354 |
| 117~119 | 291~349 |
| 122~124 | 295~342 |
| 128~129 | 304~328 |

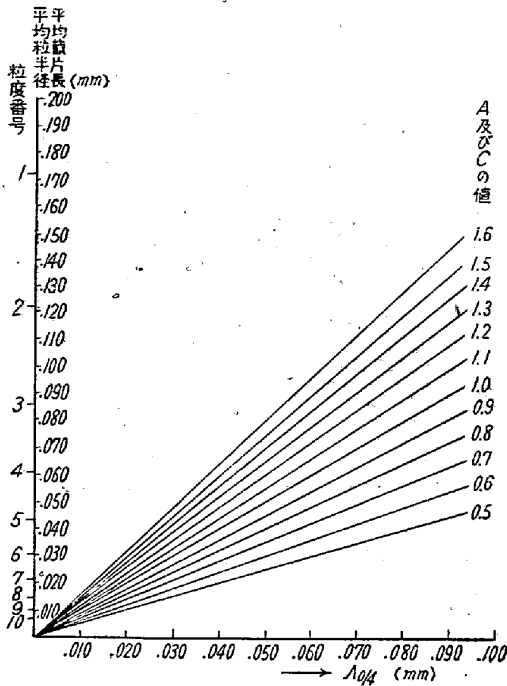
小截片が 86 以下或いは 130 以上ある時には中截片の個数の如何に拘らず整粒とは云えない。もつと難しく、しかしけつきり云えば若し第 3 表の範囲にないならば 10% の危険率で“整粒である”と云う統計的仮設を棄てると云う事である。

(2) 試料が整粒でない場合には第 4 表を用いる。第 4 表には序文に述べた 5 つの問題に対する数値が与えられておる。即ち既知の α' 及び r' に対し、(1) の α 及

第 4 表

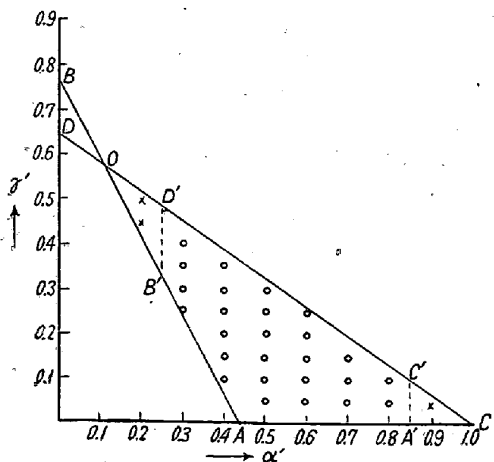
| r' | α' | r' | | | | | |
|------|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | 0.30 | 0.40 | 0.50 | 0.60 | 0.70 | 0.80 |
| 0.05 | α | | | 0.087 | 0.191 | 0.318 | 0.442 |
| | r | | | 0.175 | 0.192 | 0.212 | 0.222 |
| | A | | | 0.685 | 0.600 | 0.536 | 0.493 |
| 0.10 | B | | | 2.22 | 2.36 | 2.25 | 2.04 |
| | C | | | 1.072 | 0.978 | 0.884 | 0.805 |
| | α | | 0.021 | 0.105 | 0.204 | 0.323 | 0.467 |
| 0.15 | r | | 0.304 | 0.329 | 0.359 | 0.394 | 0.437 |
| | A | | 0.810 | 0.686 | 0.605 | 0.544 | 0.494 |
| | B | | 1.94 | 2.54 | 2.58 | 2.42 | 2.16 |
| 0.20 | C | | 1.232 | 1.139 | 1.046 | 0.952 | 0.858 |
| | α | | 0.040 | 0.122 | 0.216 | 0.327 | |
| | r | | 0.433 | 0.466 | 0.505 | 0.552 | |
| 0.25 | A | | 0.804 | 0.688 | 0.610 | 0.551 | |
| | B | | 2.42 | 2.80 | 2.80 | 2.57 | |
| | C | | 1.301 | 1.205 | 1.112 | 1.019 | |
| 0.30 | α | | 0.058 | 0.135 | 0.226 | | |
| | r | | 0.548 | 0.589 | 0.653 | | |
| | A | | 0.798 | 0.689 | 0.614 | | |
| 0.35 | B | | 2.82 | 3.05 | 2.96 | | |
| | C | | 1.367 | 1.275 | 1.191 | | |
| | α | 0.007 | 0.073 | 0.148 | 0.235 | | |
| 0.40 | r | 0.013 | 0.653 | 0.699 | 0.751 | | |
| | A | 0.969 | 0.793 | 0.690 | 0.618 | | |
| | B | 2.23 | 3.16 | 3.27 | 2.60 | | |
| 0.45 | C | 1.530 | 1.435 | 1.342 | 1.248 | | |
| | α | 0.023 | 0.087 | 0.160 | | | |
| | r | 0.705 | 0.749 | 0.799 | | | |
| 0.50 | A | 0.949 | 0.788 | 0.691 | | | |
| | B | 2.84 | 3.46 | 3.47 | | | |
| | C | 1.598 | 1.504 | 1.409 | | | |
| 0.55 | α | 0.038 | 0.101 | | | | |
| | r | 0.789 | 0.836 | | | | |
| | A | 0.932 | 0.784 | | | | |
| 0.60 | B | 3.28 | 3.73 | | | | |
| | C | 1.665 | 1.569 | | | | |
| | α | 0.052 | | | | | |
| 0.65 | r | 0.867 | | | | | |
| | A | 0.917 | | | | | |
| | B | 3.75 | | | | | |
| 0.70 | C | 1.731 | | | | | |

び r は直接数値を与えてある。(2) に対しては (16) の $\{ \}^{1/3}$ の数値を A 欄に記入してある。それより平均粒径半径及び従来の粒度番号を読みとる為には第 5 図を利用するがよい。(3) の混粒度は (17) により C.V. を計算



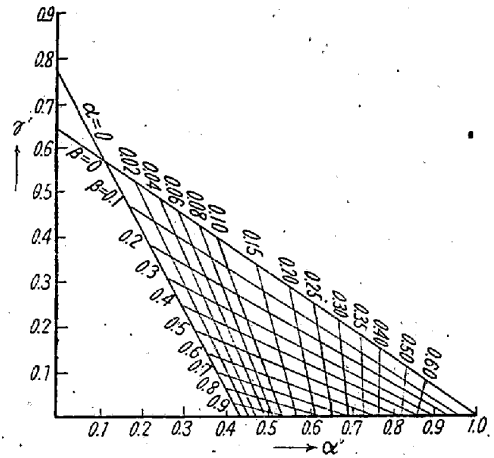
第 5 図

し、それを整粒の時の $C.V.=0.192$ で除したものを第 4 表 B 欄に記入してある。(5) の平均断片長を求める問題に対しては $15(k_1/256+k_2/16+k_3)/7/(k_1/64+k_2+k_3)$ を C 欄に記入してある。此の数値より第 5 図を利用して平均断片長を求めればよい。(4) の単位体積中の粒界面積を求める問題は (5) より得られた平均断片長 \bar{L} を用い(20)より簡単に計算する事が出来るから表中より除外した。茲で第 4 表について若干説明を加えて置こう。実在する α, r に対する α' 及び r' の存在領域は第 6 図に示す三角形 AOC である。図中直線 AB は小粒の分率が 0 になる直線であり、直線 CD は中粒の分率が 0 になる直線である。その交点 O は $\alpha=\beta=0$ になる点で大粒のみしか存在しない整粒点を表わす。此の点は $\alpha'=0.1072$, $r'=0.5714$ に当る。併て第 4 表には領域 AOC の中、

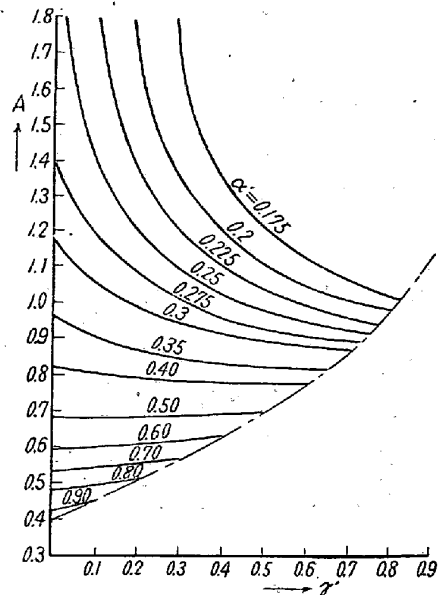


第 6 図

領域 $A' B' D' C'$ 中の点 (○印) の値を表示し、大断片の非常に少ない点 ($r=0.05$ 以下) と小断片の少ない点 ($\alpha'=0.3$ 以下) (×印) とを省略してある。従つて領域 $A' B' D' C'$ の範囲内では各数値は α', r' = 変数に関する内挿法によつて求められる。大方の実用上はこの表で支障はあるまいが尙各数値の大略の値を知るのに便利な様に、 α', r' の種々の値に対する α, β, A, B, C 各値を図示したものが第 7 図、第 8 図、第 9 図、第 10 図である。これらの図を使用すれば α', r' のすべての値に対して α, β, A, B, C の大略の値を直ちに知る事が出来よう。



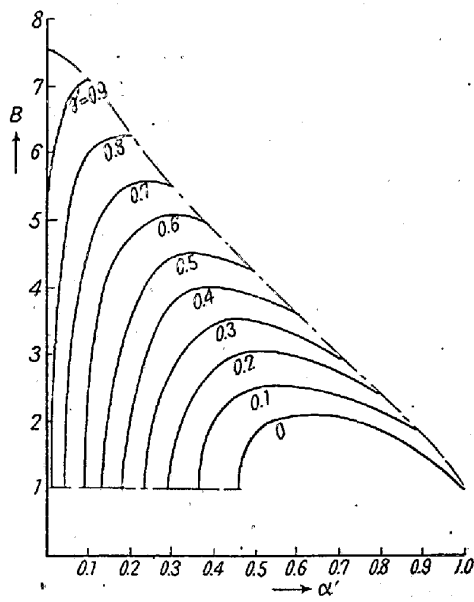
第 7 図



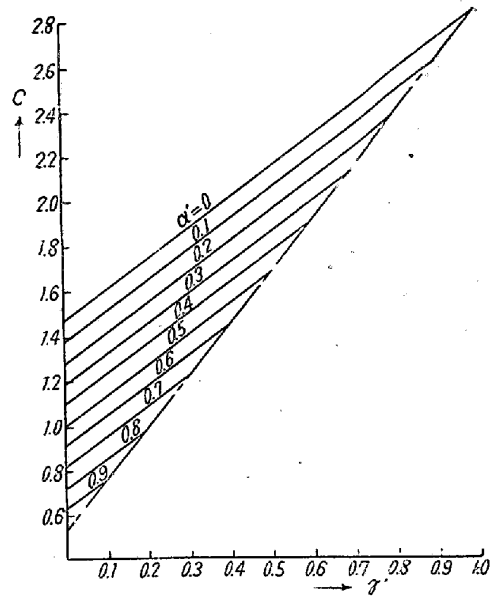
第 8 図

次にこれらの図表を使用して実際の試料について取扱う。

塩基性平炉で熔製された細粒鋼から試料を採取し、これらを夫々 925°C 、 $1,000^{\circ}\text{C}$ 及び $1,050^{\circ}\text{C}$ の温度に 6 時間保定して滲炭した後断面を研磨、腐蝕して 100 倍の



第 9 圖



第 10 圖

顕微鏡写真を4視野(各試料の四隅から撮つた)撮り、この写真上に5mm 間隔に直線を引いて1,000個の截片(写真の関係上1,000個以下しか取れなかつたものもある)を撮つた。写真を撮つたのは特別な装置がない為であつて、適当な装置があれば写真を撮る必要はなからう。

これらの截片の中最大のものを A_0 として $0 \sim A_0/4$ の小截片, $A_0/4 \sim A_0/2$ の中截片及び $A_0/2$ 以上の大截片の三群に分類して、それらの分率 α', β', γ' を求めて第5

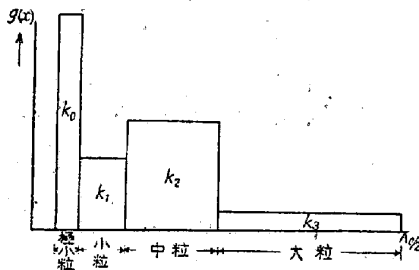
表に示す様な値を得た。これより前載の計算方法により \bar{L} を求めた結果も同表に掲げてある。これを実測で得た \bar{L} と比較すると同表最下段に示した様にNo.2の1,000°Cで滲炭した試料以外はその差は5%以下で、非常に良く一致して居る、よつてこれらの試料は分布函数(1?)でよく説明される事が判る。そこで3節で述べた計算法により得られた数値を第6表に示す。唯No.2, 1,000°Cで滲炭した試料については \bar{L} と \bar{L}_1 の差は大きく分布函数

第 5 表

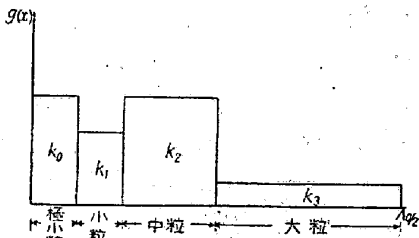
| 試料番號 | No. 1 | | | No. 2 | | |
|--|--------|--------|--------|--------|-------------|--------|
| | 925 | 1,000 | 1,050 | 925 | 1,000 | 1,050 |
| 滲炭温度 (°C) | 925 | 1,000 | 1,050 | 925 | 1,000 | 1,050 |
| {L} の數 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 840 | 1,000 |
| ΣL (mm) | 17.73 | 21.98 | 30.61 | 23.53 | 35.03 | 33.58 |
| A_0 (mm) | 0.072 | 0.070 | 0.170 | 0.074 | 0.368 | 0.104 |
| α' | 0.604 | 0.403 | 0.789 | 0.398 | 0.946 | 0.449 |
| | | | | | α'_0 | 0.772 |
| | | | | | α' | 0.174 |
| β' | 0.340 | 0.448 | 0.198 | 0.445 | 0.030 | 0.401 |
| γ' | 0.056 | 0.149 | 0.013 | 0.147 | 0.024 | 0.150 |
| C | 0.982 | 1.296 | 0.751 | 1.301 | 0.601 | 1.254 |
| L | 0.0177 | 0.0227 | 0.0319 | 0.0241 | 0.0553 | 0.0326 |
| \bar{L} | 0.0177 | 0.0220 | 0.0306 | 0.0235 | 0.0417 | 0.0336 |
| $\frac{1\bar{L} - \bar{L}_1}{\bar{L}}$ | 0 | 0.0395 | 0.0425 | 0.0260 | 0.326 | 0.043 |

第 6 表

| 試料 番号 | No. 1 | | | | No. 2 | |
|--------------------|--------|--------|--------|--------|------------------------|----------------|
| | 925 | 1,000 | 1,050 | 925 | 1,000 | 1,050 |
| A | 0.597 | 0.799 | 0.483 | 0.804 | 0.214 | 0.754 |
| \bar{x}' (mm) | 0.0107 | 0.0140 | 0.0205 | 0.0149 | 0.0197 | 0.0196 |
| α | 0.197 | 0.042 | 0.459 | 0.040 | α_0 α | 0.372 0.349 |
| β | 0.689 | 0.527 | 0.476 | 0.527 | 0.071 | 0.473 |
| r | 0.114 | 0.431 | 0.065 | 0.433 | 0.208 | 0.449 |



第 11 図



第 12 図

(12) を想定したのでは解決がつかない。(換言すれば最大粒の直径は最小粒の直径の 10 倍位のものではなく、もつと激しいものである事が判る)。

即ち学振法の粒度番号で最大と最小との差が 7 以上に亘る時には分布函数の型として (12) は無理なのであつて、その時には分布函数として第 11 図或いは第 12 図の型を想定しなければならない事を意味する。第 11 図の場合は粒度番号 9 以上に亘る場合は無理である。従つて分布函数 (12) を想定して得た (13) (14) (15) (16) (17) (18) (19) (20) の諸式を第 11 図及び第 12 図の場合に拡張しなければならない。所で第 11 図の場合への拡張は上の諸式の型を見れば殆んど計算する事なく容易に拡張する事が出来るであろうから、茲では次節に第 12 図の型の分布函数の場合に上の諸式を拡張しよう。

VII. 拡張された理論

分布函数として第 12 図の型を取扱うに当り、前には大・中・小の三階級に分類したが、今度大・中・小・極小の四階級に分類しなければならない。更に見通しをよくする為に

$$K_0 = k_0/64, K_1 = k_1/64, K_2 = k_2/8, k_3, A_0/4 = r_0$$

と略記する事にする。又比較の為に第 3 図の分布函数 (12) の場合の式を並記して新しい式には相当式にダッシュをつけて表示しよう。

先ず分布型の法化の条件は

$$(16K_1 + 4K_2 + k_3)r_0 = 1 \dots\dots\dots(13)$$

$$(16K_0 + 16K_1 + 4K_2 + k_3)r_0 = 1 \dots\dots\dots(13')$$

次に各種粒の体積分率は

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= (K_1/4) / (K_1/4 + K_2/2 + k_3) \\ \beta &= (K_2/2) / (K_1/4 + K_2/2 + k_3) \\ r &= k_3 / (K_1/4 + K_2/2 + k_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

に対し

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= (K_0/16) / \{ (15/4)(K_0/(4 \cdot 15) + K_1/4 + K_1/2 + k_3) \} \\ \alpha &= (K_1/4) / \{ K_0/(4 \cdot 15) + K_1/4 + K_2/2 + k_3 \} \\ \beta &= (K_2/2) / \{ K_0/(4 \cdot 15) + K_1/4 + K_2/2 + k_3 \} \\ r &= (k_3 / \{ K_0/(4 \cdot 15) + K_1/4 + K_2/2 + k_3 \}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14')$$

各種截片の分率は

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= (7K_1/3 + K_2 + k_3/4) / \{ 7(K_1 + K_2 + k_3)/3 \} \\ \beta' &= (4K_2/3 + 3k_3/4) / \{ 7(K_1 + K_2 + k_3)/3 \} \\ r' &= (4k_3/3) / \{ 7(K_1 + K_2 + k_3)/3 \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

に対し

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0' &= (K_0/3 + K_1 + K_2/4 + k_3/16) / \{ K_0/3 + 7(K_1 + K_2 + k_3)/3 \} \\ \alpha' &= (4K_1/3 + 3K_2/4 + 3k_3/16) / \{ K_0/3 + 7(K_1 + K_2 + k_3)/3 \} \\ \beta' &= (4K_2/3 + 3k_3/4) / \{ K_0/3 + 7(K_1 + K_2 + k_3)/3 \} \\ r' &= (4k_3/3) / \{ K_0/3 + 7(K_1 + K_2 + k_3)/3 \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15')$$

が対応する。

平均粒半径については

$$\bar{x}'^3 = (15/4)(K_1/4 + K_2/2 + k_3)r_0^3 / (16K_1 + 4K_2 + k_3) \dots\dots\dots(16)$$

に対し

$$\bar{x}'^3 = (15/4) \{ K_0/(4 \cdot 15) + K_1/4 + K_2/2 + k_3 \} r_0^3 / (16K_0 + 16K_1 + 4K_2 + k_3) \dots\dots\dots(16')$$

が対応する。

平均截片長に対しては

$$\tilde{L} = (15/7)(K_1/4 + K_2/2 + k_3)r_0 / (K_1 + K_2 + k_3) \dots\dots\dots(18)$$

に対し

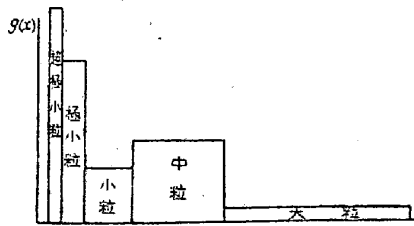
$$\tilde{L} = \{K_0/4 + 15(K_1/4 + K_2/2 + k_3)\}r_0 / \{K_0 + 7(K_1 + K_2 + k_3)\} \dots\dots\dots(18')$$

となる。

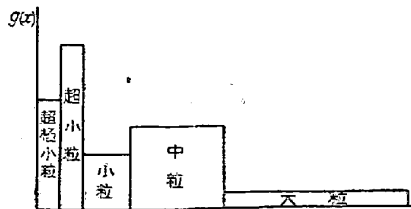
最後に単位体積当りの粒界面積に対しては (19) の式は変わるが (20) 式は変化なくそのまま成立して $1/(0.7\tilde{L})$ となる。

以上の結果を前節に引用した No.2 の 1,000°C で滲炭した試料に適用した結果を第 5 表及び第 6 表に示してある。即ち \tilde{L} と \bar{L} の差について見れば第 5 表最下段に示す様に分布函数として (12) を想定した場合には 32.6% もあつたが第 12 図の型の分布函数で求めた場合には 4.3% となり一致は良好である。従つて第 6 表の各数値はこの試料に対するものには截片を四階級に分類した場合の値を示してある。

高低の試料は四階級まで分類した (13') (14') (15') (16') (18') の各式を用いれば充分であるが若しも最大粒の直径が最小粒の直径の 30 倍以上もある様な試料を取扱う時には四階級の分類でも不充分であつて、この場合には第 13 図或いは第 14 図に示す様な五階級に分類した分布函数を想定しなければならないが、恐らく斯様な試料は稀であろう。



第 13 圖



第 14 圖

VIII. 結 論

粒度表示方法として現存する学振法には序言で述べた様な種々の欠点があるが、之等の欠点を除いて混粒を正しく表示する目的で截片を半分宛の長さに分類し、その

数を数える事によつて試料内の各種粒の体積分率・平均粒半径・混粒度・単位体積中の粒界面積・平均截片長 (Check する為に) を求める方程式及び図表を作成した。

1,000 個の截片を得る為に顕微鏡写真を撮り、更にその上に直線を引いて各階級に分類するには一個の試料に対して約 30 分の時間を必要するが、若しも適当な装置を考案するならば斯様な手数もかからず、各截片の分率さえ早く知る事が出来ればその後は第 5 図、第 7 図、第 8 図、第 9 図及び第 10 図を見て直ちに各数値を求める事が出来よう。

尙ここでは混粒度について粒一粒一粒を同じ重さに取つた点がすつきりしないかも知れない。従つて混粒度の定義として考えられる別の方法を述べるに、

(1) 単位体積中の粒界面積と平均粒の半径の球の整粒の場合の粒界面積との差を整粒の場合の粒界面積で割つた値を取る。

(2) 上記の方法では小粒と大粒とが適当に打消し合う程度に混つておると、単位体積中の粒界面積と平均粒半径の球で同じ単位体積を埋めた場合の粒界面積との差が小さくなる事もあり得る欠点があるから、この欠点を避ける為に平均粒半径より大きい粒の領域と小さい粒の領域とに分けて、小さい粒の領域の粒界面積を S_1 、大きい粒の領域の粒界面積を S_2 、平均粒半径の粒の場合の粒界面積を S_0 とし平均粒半径より小さい粒の体積分率を a 、大きい粒の体積分率を b とした時

$$B = \{(S_1 - aS_0) + (bS_0 - S_2)\} / S_0$$

を以て定義する方法を採用した方がよいかも知れない。目下此の方法を用いて実験結果を記述して見ておるが、可成り具合がいい様に思われる。

本報告の図表の作成、实例の計算に尽力して下さつた伊藤第二氏に深く感謝致します。(昭和 29 年 5 月寄稿)

註

- 1) 四邊より 1 枚宛取つた根拠は實際の試料を見た場合に各邊毎の粒度に有意差が認められた事があるからである。
- 2) 截片は澤山あるのに取る値の範囲は限られておるので同じ數値が澤山出て来るから、境界上の値について數をどう數えるか問題になる。例えば $A_0 = 13.5\text{mm}$ であつたとすると $A_0/2 = 6.75\text{mm}$ 、 $A_0/4 = 3.375\text{mm}$ となる。實際には小數點以下 1 桁迄しか讀めない。従つて 6.8mm と 3.4mm とが境界になる。その時 6.8mm と讀まれたものは全部大截片に屬する。又 3.4mm と讀まれたものは 1/4 が小截片に數えられるのである。