

鐵 と 鋼 第十八年 第五號

昭和七年五月二十五日發行

論 說

彎曲作用を受ける鑄鐵梁の理論及實驗

(日本鐵鋼協會 第八回講演大會講演)

藤 井 忠 二

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL CONSIDERATION UPON
CAST-IRON BEAM UNDER THE BENDING ACTION.

By Chuji, Fujii.

SYNOPSIS:—In this paper the author introduced the differential equation of deflection of cast iron beam which subjected to the bending action and solved this equation on the beam having rectangular cross-section. Further from these results the author has indicated the certain approximate method to obtain the relational equation of load and deflection.

目 次

緒 言

- (1) 一般微分方程式
- (2) 矩形斷面を有する梁への應用例
- (3) 近似的計算法

結 論

緒 言

鑄鐵の如く彈性係數が一定で無い、即ちフックの法則の成立しない材質の梁が彎曲作用を受ける際の荷重と撓みを表す關係式は既に我々の良く知る次の微分方程式から出發して之を簡単に求める事は出来ない。

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_x \dots \dots \dots (1)$$

但 E = 彈性係數

I = 慣性能率

M_x = 原點から任意の距離 x に於ける截斷面に作用する彎曲隅力

Y = 原點から任意の距離 x に於ける梁の撓み

勿論變形が極く僅少で且其材質が特種鑄鐵の如き場合には近似的に(1)から求められし結果を用ひるも大した誤差を與へぬ事は云ふ迄もない、著者は一昨年来特に鑄鐵の規格問題に就て論議されて居るに鑑みて鑄鐵梁が彎曲作用を受ける際の荷重と撓みの相互關係を表す近似解式を求め之を斯る際に應用しようと試みた、斯様な場合には梁の變形は大であるから精密に考へれば(1)は成立しな

いので有るが然し或程度の近似式を求めると云ふ
 點からすれば(1)に似た微分方程式を導く事が出
 来る、本報文では其研究の一部を極く簡単に記述
 する事にする。

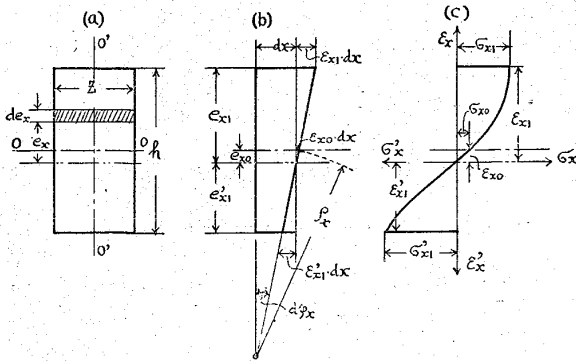
1. 一般微分方程式

一般微分方程式を導くにあたり次の假定を設け
 る、即ち

- (1) 截斷面の任意の一點に於て之に直角なる方
 向に呼起される應力及伸は同じ材料を單に牽
 き又は壓したる場合と同じ關係を保ち、
- (2) 截斷面は變形後も依然として中立軸に直角
 なる平面であつて、
- (3) 外力は截斷面の對稱軸を含む平面内に作用
 するとす。

偕第 1 圖で(a)は任意の截斷面を示し(oo)線は
 斷面の中心を貫く線で(o'o')線は對稱軸で有る、

第 1 圖



同圖(b)は斷面の伸の有様を、又(c)は應力の有
 様を示したものである、此圖で σ_{x1} , ϵ_{x1} 及 σ'_{x1} ,
 ϵ'_{x1} は夫々抗張及壓縮側の最大の應力及伸で σ_{x0} ,
 ϵ_{x0} は(oo)線上の應力及伸を表す、然る時は簡單
 な計算の後我々は次の式を導く事が出来る。

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{1}{h} \cdot \frac{a_x}{1 + \epsilon_{x0}} \dots\dots\dots (2)$$

但、 $a_x = \epsilon_{x1} + \epsilon'_{x1} \dots\dots\dots (3)$

茲に ρ_x は曲率半徑で、hは斷面の高さである、
 今

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\rho_x} \dots\dots\dots (4)$$

で有るから(2)を之に代入する事に依りて次式を
 得る。

$$\pm \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\rho_x} \dots\dots\dots (5)$$

即ち之が求むる一般微分方程式で有る、此處に
 $(dy/dx)^2$ が 1 に對して省略出來得る程度のもの
 とすれば(5)は、

$$\pm \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h} \cdot \frac{a_x}{1 + \epsilon_{x0}} \dots\dots\dots (5a)$$

となり更に ϵ_{x0} も 1 に對して省略出來るとせば

$$\pm \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h} \cdot a_x \dots\dots\dots (5b)$$

となり簡単な式となる、偕以上の如く微分方程式
 を導く事が出來たから我々は $1/h \cdot a_x / 1 + \epsilon_{x0}$ を適
 當な x の函數として表す事が出來れば一般には其
 解法も亦求められる事になる。

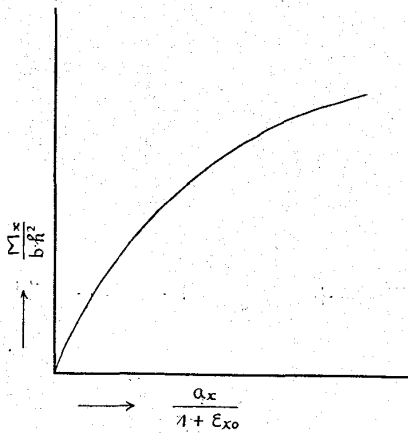
2. 矩形斷面を有する梁への應用例

梁の斷面が矩形で且軸方向に一様である場合は
 大變問題が簡單になり結局我々は次の關係を導く
 事が出来る、即ち

$$\frac{a_x}{1 + \epsilon_{x0}} = \varphi \left(\frac{M_x}{bh^2} \right) \dots\dots\dots (6)$$

茲に $\varphi(M_x/bh^2)$ は M_x/bh^2 の任意の函數で h 及

第 2 圖



b は夫々断面の高さ及幅で有る、従つて今抗張及壓縮試験の結果から之等兩者のストレスストレン線圖を引き此線圖か

ら圖式計算に依りて $a_x/1+\epsilon_{x0}$ に対する M_x/bh^2 を求めると一般に第 2 圖の如き線圖が得られる。此結果から M_x/bh^2 と $a_x/1+\epsilon_{x0}$ との關係を表すに著者の經驗からすれば次の如き關係式で表すのが最も便利で且正確の様で有る、即ち

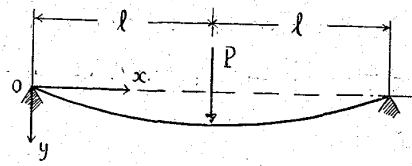
$$1000 \cdot \frac{a_x}{1+\epsilon_{x0}} = c_1 \left(\frac{M_x}{bh^2} \right) + c_2 \left(\frac{M_x}{bh^2} \right)^2 + c_3 \left(\frac{M_x}{bh^2} \right)^3 + c_4 \left(\frac{M_x}{bh^2} \right)^4 \dots \dots (7)$$

茲に c_1, c_2, c_3 及 c_4 は (7) が第 2 圖の線圖に最も近い結果を與へる様に決定さるべき係數で有つて其の決定方法は適當の 4 々の $a_x/1+\epsilon_{x0}$ の値に對する M_x/bh^2 の値を (7) に代入して得られる聯立方程式を解いて求むれば良い、従つて (7) を用ひて (5a) を書換へれば次式を得る。

$$\pm \frac{d^2 y}{dx^2} \cong \frac{1}{1000 \cdot h} \cdot \left\{ c_1 \left(\frac{M_x}{bh^2} \right) + c_2 \left(\frac{M_x}{bh^2} \right)^2 + c_3 \left(\frac{M_x}{bh^2} \right)^3 + c_4 \left(\frac{M_x}{bh^2} \right)^4 \right\} \dots \dots (8)$$

此式で M_x は外力の作用する有様及梁の兩端の條件等が與へられれば x の函數として表されるもので有る。故に梁の支點間の距離が断面の寸法に比して餘り大に失しない場合は微分方程式 (8) の結果は可成正しい。

第 3 圖



今簡単な一例として第 3 圖に示す如く梁の全長は $2l$ で其の兩端は自由に支持され中央に集中荷重を受ける場合に就て考察する。

此の場合は $M_x = P \cdot x/2$ となるから之を (8) に代入して撓みの式を導くと次の様になる。

$$y = \frac{1}{1000 \cdot h} \left\{ c_1 \left(\frac{l^2 x}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \cdot \frac{P}{\lambda} + c_2 \left(\frac{l^3 x}{3} - \frac{x^4}{12} \right) \cdot \frac{P^2}{\lambda^2} + c_3 \left(\frac{l^4 x}{4} - \frac{x^5}{20} \right) \frac{P^3}{\lambda^3} + c_4 \left(\frac{l^5 x}{5} - \frac{x^6}{30} \right) \frac{P^4}{\lambda^4} \right\} \dots \dots (9)$$

但 $\lambda = 200 \cdot bh^2$

之より $x=l$ 及 $x=l/2$ に於ける撓み y_l 及 $y_{l/2}$ を求めると、

$$y_l = \frac{1}{1000 \cdot h} \left\{ c_1 \frac{l^3 P}{3\lambda} + c_2 \frac{l^4 P^2}{4\lambda^2} + c_3 \frac{l^5 P^3}{5\lambda^3} + c_4 \frac{l^6 P^4}{6\lambda^4} \right\} \dots \dots (9a)$$

$$y_{l/2} = \frac{1}{1000 \cdot h} \left\{ c_1 \frac{11 l^3 P}{48 \lambda} + c_2 \frac{31}{192} \cdot \frac{l^4 P^2}{\lambda^2} + c_3 \frac{79}{640} \frac{l^5 P^3}{\lambda^3} + c_4 \frac{191}{1920} \frac{l^6 P^4}{\lambda^4} \right\} \dots \dots (9b)$$

となる。

之等の式より計算したる結果と實驗により得たる結果とが如何なる程度に一致するか其の一例として抗張力約 29 kg/mm^2 の程度の特種鑄鐵に就て行つた結果を記載する、今此材質の抗張及壓縮に對するストレスストレン線圖を引き之から圖式計算に依り M_x/bh^2 と $a_x/1+\epsilon_{x0}$ との關係を出し

係數 c_1, c_2, c_3 及 c_4 を求めると次の様になつた。

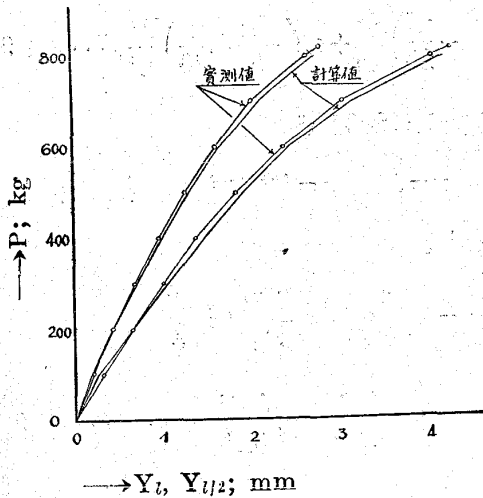
$$\left. \begin{aligned} c_1 &= +0.555629 & c_2 &= +0.398020 \\ c_3 &= -0.111412 & c_4 &= +0.011611 \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

諸 $b=h=20mm, 2l=300mm$ として(9a)及(9b)から計算せる値と之を實驗から求めたものとを比較すれば第 1 表及第 4 圖の様になつた、但此際

第 1 表 撓みの計算値及實測値

P (kg)	$Y_1(mm)$		$Y_2(mm)$	
	計算値	實測値	計算値	實測値
100	0.275	0.321	0.186	0.207
200	0.646	0.650	0.437	0.438
300	1.050	1.010	0.712	0.689
400	1.464	1.370	0.995	0.948
500	1.906	1.821	1.293	1.247
600	2.432	2.359	1.640	1.590
700	3.142	3.038	2.090	2.010
800	4.173	4.027	2.718	2.629
820	—	4.250	—	2.780

第 4 圖



抗張及彎曲試験に於ては特種の装置に依り共に破壊迄の伸及撓みを測定した。

第 1 表から判る様に計算値と實測値は可成良く一致する、故に材質別に係數 c_1, c_2, c_3 及 c_4 の値を大體決定して置けば簡単な計算に依りて荷重と撓みの關係を近似的に見出す事が出来る。

3. 近似的計算法

上記述せる方法は實際に可成面倒な手数を要するから之を今少し簡単に解決する方法を考へねばならぬ、即ち此際は係數 c_1, c_2, c_3 及 c_4 が迅速

に決定出来れば良いので有るから著者は次の方法で之を解決したいと思ふ、今前述せる例を取れば撓みの式(9a)は次の如く書換へらる。

$$y_l = \alpha_1 \left(\frac{P}{100} \right) + \alpha_2 \left(\frac{P}{100} \right)^2 + \alpha_3 \left(\frac{P}{100} \right)^3 + \alpha_4 \left(\frac{P}{100} \right)^4 \dots \dots \dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但、} \alpha_1 &= c_1 \frac{l^3}{3000h\lambda_1} & \alpha_2 &= c_2 \frac{l^4}{4000h\lambda_1^2} \\ \alpha_3 &= c_3 \frac{l^5}{5000h\lambda_1^3} & \alpha_4 &= c_4 \frac{l^6}{6000h\lambda_1^4} \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

今任意の寸法の矩形断面を有する梁に就て彎曲試験を行ひ適當な荷重 P に対する撓み y_l を 4 ケ求めて之等を(11)に代入して $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 及 α_4 を決定すれば係數 c_1, c_2, c_3 及 c_4 は(12)より求める事が出来て迅速に係數が判明する、斯る方法に依りて係數を決定して、計算に依り求めし撓みと實測の結果を比較するために可成澤山の實驗を行つたが何れも良く一致した値を示したと云ふに止めて此處では其結果を記載する事を省略する。

以上の方法は荷重の有様及梁の兩端の條件が異なるも同一に取扱ふ事が出来る。

尙最後に述べて置き度い事は或寸法を有する角梁の破壊荷重及撓みを知つて之と同一材質で他の寸法を有する角梁の最大荷重及最大撓みを計算に依り求むる方法である。

緒本文の最初に述べし假定が成立つとすれば(7)からも判明する如く或與へられたる材質に対しては $M_{x,max}/bh_2$ が常に其材質に特有な一定の値に達せなければ破壊を生ぜぬ、今第 2 圖に示した如き場合を考へ $M_{l,max}, P'_{max}$ を夫々破壊を生ぜる時の彎曲隅力及最大荷重とし又 h', b', l' を

此際の梁の高さ、幅及全長とし

$$\beta_0 = \frac{M'_{l,max}}{b'h'^2} = \frac{P'_{max}l'}{2b'h'^2} \dots\dots\dots (13)$$

と置けば $M'_{l,max}/b'h'^2$ 即 $P'_{max}l'/2b'h'^2$ が常に β_0 に成らなければ破壊を生ぜぬ事になる、従つて或寸法を有する角梁の彎曲試験の結果から β_0 を知つて之と同一材質で他の寸法 h, b 及 l なる角梁の破壊の際の最大荷重 P_{max} は次式から求まる。

$$P_{max} = 2\beta_0 \cdot \frac{bh^2}{l} \dots\dots\dots (14)$$

従つて此 P_{max} の値を (9a) に代入すれば最大撓み y_l を決定する式が得られる、即ち

$$y_l = \frac{1}{1000 \cdot h} \left\{ c_1 \frac{\beta_0 l^2}{3 \times 100} + c_2 \frac{\beta_0^2 l^3}{4 \times 100^2} + c_3 \frac{\beta_0^3 l^4}{5 \times 100^3} + c_4 \frac{\beta_0^4 l^5}{6 \times 100^4} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

となる、唯今は斯る計算方法の一例を示して終りとしたい。

今 $h' = 24.9mm, b' = 49.9mm, 2l' = 300mm$ の角

梁を第2圖の如き状態で破壊せる時の最大荷重は $P'_{max} = 2900kg$ で有つた従つて此際は (13) より $\beta_0 = 7.03$ を得る、次に之と同一材質で $h = 25mm, b = 50mm, 2l = 200mm$ の場合の最大荷重 P_{max} を (14) より求めると $P_{max} = 4394kg$ となり最大撓み y_l は (15) より $y_l = 2,141mm$ となる、此の結果を實驗より求めし値 $P_{max} = 4500kg$ 及 $y_l = 2,250mm$ と比較するに其差違は僅少で可成良く一致する事が判る、以上の方法は斷面が圓形其他の場合にも應用出来るのであるが之等は他日に譲る事にする。

結 論

鑄鐵梁の一般彎曲微分方程式を導き之を角梁に應用して計算の一例を示し尙或角梁の彎曲試験の結果から之と同一材質で他の寸法を有する角梁の撓みと外力の關係式並に最大荷重及最大撓みを求める方法を記述し之等の計算値が實驗結果と可成の程度に一致する事を示した。