平行等溫面系の幾何量と圖式

（昭和二年十一月日本鐵鋼協會第三回講演大會講演）

川 崎 舍 恒 三

Geometrical Quantities of a Parallel Isothermal Surface System and Their Graphical Representations.

Dr. Tsunezo Kawasakiya.

This paper deals with the theory of analytical expression of geometrical quantities of casting moulds or furnace walls, in which isothermal surfaces are assumed to be parallel. By introducing a new set of coordinates originated by the author, the distance, area and volume of an isothermal surface system are expressed in the most general forms, containing hyperbolic functions and two constants which the writer calls "form factor" and "discriminating area". The writer defines a geometrical resistance as the definite integral of the reciprocal of area with respect to its distance, and also a geometrical contact resistance as the reciprocal of contact area. Subsequently two integral quantities are given, which are expressed in the most general forms and useful to express the thermal energy stored in an isothermal surface system. Simpler expressions are given for special cases. A universal chart is prepared for representing geometrical quantities and finally a numerical example is given to illustrate the applications of graphical and mathematical calculations.

（一） 緒 言

金屬鑄造用の鑄型又は加熱爐周壁等の內部に於ける熱現象を解析的に硏究する場合に、吾人が最も困難を感ずる事は其の熱を保有する材料の內部に於て等溫面の分布狀態如何と云ふ問題である。斯樣な場合に等溫面をば嚴密に orthogonal surface system として之れを取扱ふことは或る特殊の形狀の場合には可能であるが、一般には其の形狀が複雜である爲めに是れは不可能である。そこで實用を主眼とする解析式を求むるに際して、或る程度の近似省略法を採ることは今日の場合誠に止むを得ない。

以下說述する所は、鑄物の型、爐壁等に於て通常見受けらるゝ如き、數個の異つた幾何學的形狀の集合より成る等溫面系に就き、其の等溫面は常に平行なりとの假定の許に、其の等溫面系の面積とか體積とか、其の他熱現象を硏究するに當つて必要なる二三の幾何量を表示すべき解析式を紹介し、尙ほ是等の幾何量を圖表を以て表示すべき方法に就き述べて見度いと思ふ。

（二） 原標の選び方

今平行等溫面系の最も簡單なる一例として球面系を考ふるに、此の場合の平行等溫面は凡て共同中心を有する球面にして、終局に於て同心に收斂し其の面積は零となること明である。次に圓筒形の等溫面系に就きて考ふるに、若し軸の長さが直徑よりも大なる場合には、平行等溫面は終局に於て一つの直線に收斂し其の面積は零となる。然るに若し圓筒形の軸の長さが直徑よりも小なる場合には、平行等溫面は一つの圓形平面に收斂し、一見其の等溫面の面積が零となるべき位置は明でない。併し此

の場合に若し、面積の意義を擴張し負號の面積を考へることゝし、側面の圓筒面積が零となる圓弧を境とし是れより內側に於ては圓筒面積は負號なりと考へ、負號の面積と正號の面積との代數的合計が零なるべき等溫面の位置を想像すると、斯の如き位置に於ては等溫面の面積は零に等しくなる理である。以上の如き考へ方をすると、如何なる幾何學的形狀の集合より成る等溫面系に於ても只等溫面は常に平行なりとの假定を許容すれば其の等溫面の全面積が代數的に零となるべき位置が存在する、而して斯かる位置に於ては、其の等溫面は一般に面積の代數的總和が零なる數個の面の群なるも坐標の原標として採用し得るものである。斯の如き原標を **等位積系の原面** (**original surfaces of on equipotential surface system**) と名づく。特別の場合に此の原面は線又は點となるものである。

今一般に平行等位面系に屬する任意の等位面積を A を以て表はし、原面より等溫面に到る距離を X を以て表はし、次の二つの關係式に依つて定義せらるゝ双曲函數を考へる。

$$\sqrt{A}\ \cosh\alpha-\sqrt{A}\sinh\alpha=\sqrt{f}\ \mathrm{x} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\sqrt{A}\sinh\alpha=\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{f}} \quad \cdots\cdots (2)$$

玆に f 及び q は定數である。

坐標の獨立變數として斯くの如く定義せられたる $\sqrt{A}\cosh\alpha$ を採用すると、其の値は等位面の面積が零のときには $\sqrt{A}\sinh\alpha$ 即ち定數に等しくなることは、次に揭ぐる双曲函數の關係式に依つて明である。

$$A=A\cosh^2\alpha-A\sinh^2\alpha \quad \cdots\cdots (3)$$

(三) 原面より等位面に到る距離

(1) 式に (2) 式の關係を當嵌めると

$$\mathrm{x}=\frac{\sqrt{q}}{f}(\coth\alpha-1) \quad \cdots\cdots (4)$$

等位面 A_a より A に到る距離を $\mathrm{x}_{ax}=\mathrm{x}-\mathrm{x}_a$ なる關係を以て表はすと

$$\mathrm{x}_{ax}=\frac{\sqrt{q}}{f}(\coth\alpha-\coth\alpha_a) \quad \cdots\cdots (5)$$

玆に α_a は A_a に相當する α の値である。

(4) 式は原面より等位面への距離を表はすものにして、變數としては双曲函數のみを含む。而して ($\coth\alpha-1$) は dimension を有しないから、之れを距離係數 (**coefficient of distance**) と名づく。

(四) 等位面の面積

等位面の面積は (2) 式より直ちに書下すことが出來る。

$$A=\frac{q}{f}\mathrm{cosech}^2\,\alpha \cdots\cdots (6)$$

二つの等位面の面積の差は $A_{\alpha x}=A-A_\alpha$ を以て表はすと

$$A_{\alpha x}=\frac{q}{f}(\mathrm{cosech}^2\,\alpha-\mathrm{cosech}^2\,\alpha_\alpha) \cdots\cdots (7)$$

玆に $(\mathrm{cosech}^2\,\alpha)$ を**面積係數** (**Coefficient of area**) と名つく。

(五) 等位面に閉鎖せらるゝ體積

任意の等位面に由つて完全に閉鎖されたる空間、若くは等位面の一部と原面に向つて收斂する直線の群より成る面との間に閉鎖されたる空間の體積を V を以て表はすときは、其の體積は、(6) 式を以て表はさるゝ面積を原面よりの距離を微分とし、原面より任意の等位面まで積分することに依つて、直ちに之れを求むることを得。即ち

$$V=\frac{q^{\frac{3}{2}}}{f^2}\left\{\frac{1}{3}(\coth^3\alpha-1)-(\coth\alpha-1)\right\} \cdots\cdots (8)$$

等位面 A_α と A との間に閉鎖せらるゝ空間の體積を $V_{\alpha x}=V-V_\alpha$ を以て表はすと

$$V_{\alpha x}=\frac{q^{\frac{3}{2}}}{f^2}\left\{\left(\frac{1}{3}\coth^3\alpha-\coth\alpha\right)-\left(\frac{1}{3}\coth^3\alpha_\alpha-\coth\alpha_\alpha\right)\right\} \cdots\cdots (9)$$

(8) 式中 $\{\ \}$ 内の式を**體積係數** (**Coefficient of volume**) と名つく。

(8) 式は又次の如く變形することが出來る。

$$V=\frac{A^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{f}}\sin\left(3\sin^{-1}\frac{e^{-\alpha}}{2}\right) \cdots\cdots (10)$$

(六) 定數の決定

第二節乃至第五節の各式中には f 及び q なる二つの定數を含むから、是等の式を應用するには先づ此の二つの定數の値を知ることが必要である。

若し二次等位面系に於て、二つの等位面の面積と其の間隔と其の間に閉鎖せらるゝ體積との値が與へられたる場合には前記二つの定數は決定せられる。

(5)、(7)及び(9)式より双曲函數及び定數 q を消去すると

$$f=\frac{3}{\mathrm{x}_{ab}^2}(A_a+A_b-2A_m) \cdots\cdots (11)$$

玆に $A_m=V_{ab}/\mathrm{x}_{ab}$ $\cdots\cdots (12)$

此の定數 f は dimension を有せず、等位面の幾何學的形狀に關するものであるから、便宜上之れ

を**形狀因數** (form factor) と名づく。

等位面の面積が不變なる場合、若くは原面よりの距離の一次に正比例する場合は、其の形狀因數は零であることは(11)式に依り明である。

次に(5)、(7)及び(9)式より双曲函數及び定數 f を消去すると

$$q=\frac{1}{x_{ab}^2}[\{3A_m-(A_a+A_b)\}^2-A_aA_b] \cdots\cdots (13)$$

茲に $A_m=\dfrac{V_{ab}}{x_{ab}}$ ……(12)

等位面の面積が一點に收斂する場合、換言すれば原面が一點となる場合には q の値は零となる。此の事は恰も二次方程式に於ける判別式と全く同一であつて、定數 q は面積の dimension を有するところから、之れを**判別面積** (discriminating area) と名付く。

若し等位面の形狀因數と一つの等位面の面積と其れに依つて閉鎖せらるゝ體積との三つが判つてゐる場合には、判別面積は次の如く之れを求むることが出來る。

(10)及び(2)式より

$$q=fA_a\sinh^2\alpha_a \cdots\cdots (14)$$

茲に $\sinh\alpha_a=\dfrac{1}{4\sin\frac{1}{3}\phi}-\sin\dfrac{1}{3}\phi$ ……(15)

又茲に $\sin\phi=\dfrac{3\sqrt{f}\,V_a}{A_a^{\frac{3}{2}}}$ ……(16)

(七) 幾何學的抵抗

幾何學的抵抗なる術語は著者が曩に公表した論文に於て便宜上斯く命名したものであるが、本編を草するに當り、此の術語の意義を一層明確にする必要があるから、茲に更めて定義を與へて置く。**〔或る等位面系に於て、任意の二等位面間の距離を微分とする、等位面積の逆數の定積分を其の等位面の閉鎖せる空間の幾何學的抵抗** (geometrical resistance) **と謂ふ〕**。

斯の如き幾何學的抵抗は熱又は電氣の等位面系に關する問題を解析的に取扱ふ上に於て必要なる幾何量である。

二つの等位面 A_a 及び A の間に閉鎖せらるゝ空間の幾何學的抵抗を $R_{ax}=R-R_a$ を以て表はすと

$$R_{ax}=\frac{1}{\sqrt{q}}\int_{\coth\alpha_a}^{\coth\alpha}\sinh^2\alpha\,d(\coth\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{q}}\alpha_{ax} \cdots\cdots (17)$$

茲に $\alpha_{ax}=\alpha-\alpha_a$ ……(18)

(18)式中の α を**幾何學的抵抗係數** (coefficient of geometrical resistance) と名づく。

等位面系には前記の他に接觸抵抗が必要である。之れに關しては次の定義を與へる。〔**或る等位**

系に於て等位接觸面積の逆數を其の幾何學的接觸抵抗 (geometrical contact resistance) **と謂ふ**〕。

S を以て幾何學的接觸抵抗を表はすと

$$S=\frac{f}{q}\sinh^2\alpha \quad\cdots\cdots(19)$$

(19) 式中の $\sinh^2\alpha$ を**幾何學的接觸抵抗係數** (**coefficient of geometrical contact resistance**) と名付く。

(八) 體積の積分量

等位面系內に蓄積せらるゝ勢力 (energy) に關する問題を取扱ふに當り種々の積分量が必要であるが、是等は次の二つの積分より導き得るものである。

一、二つの等位面の間に閉鎖せらるゝ空間の幾何學的抵抗を微分とする、其の空間體積の定積分。

二、二つの等位面の間に閉鎖せらるゝ空間の幾何學的抵抗を微分とする、其の空間體積の二重定積分。

是等の積分は(9)式と(17)式とより次の如くなる。

$$\int_0^{R_{ax}} V_{ax}dR_{ax}=\frac{q}{f^2}\left\{\frac{1}{6}\left(\mathrm{cosech}^2\,\alpha\right)_a^x+\alpha_{ax}\left(\frac{1}{3}\coth^3\alpha_a-\coth\alpha_a\right)-\frac{1}{3}\left(\log_e\mathrm{cosech}^2\,\alpha\right)_a^x\right\}\quad\cdots\cdots(20)$$

$$=\frac{1}{6f}A_{ax}-R_{ax}\left(V_a-\frac{2}{3}\,\frac{q^{\frac{3}{2}}}{f^2}\right)-\frac{1}{3}\,\frac{q}{f^2}\,\log_e\frac{A}{A_a}\cdots\cdots(21)$$

又

$$\int_0^{R_{ax}}\int_0^{R_{ax}} V_{ax}dR_{ax}dR_{ax}=\frac{\sqrt{d}}{f^2}\left\{\frac{1}{6}\left(\coth\,\alpha\right)_a^x+\frac{1}{6}\alpha_{ax}\,\mathrm{cosech}^2\,\alpha_a-\frac{1}{2}\alpha_{ax}^2\left(\frac{1}{3}\coth^3\alpha_a-\coth\alpha_a\right)+\frac{1}{3}\int_{\alpha_a}^{\alpha}\log_e\frac{\mathrm{cosech}^2\,\alpha}{\mathrm{cosech}^2\,\alpha_a}d\,\alpha\right\}\quad\cdots\cdots(22)$$

$$=\frac{1}{6f}X_{ax}-\frac{1}{6f}R_{ax}A_a-\frac{1}{2}R_{ax}^2\left(V_a-\frac{2}{3}\,\frac{q^{\frac{3}{2}}}{f^2}\right)-\frac{q}{3f^2}\int_0^{R_{ax}}\log_e\frac{A}{A_a}dR_{ax}\cdots\cdots(23)$$

玆に

$$\int_{\alpha_a}^{\alpha}\log_e\frac{\mathrm{cosech}^2\,\alpha}{\mathrm{cosech}^2\,\alpha_a}d\alpha=-\alpha_{ax}^2+\alpha_{ax}\log_e(1-e^{-2\alpha_a})^2-\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{1}{n^2}\left(e^{-2n\alpha}\right)_{\alpha_a}^{\alpha}\right\}\quad\cdots\cdots(24)$$

又 $\sqrt{q}\int_0^{R_{ax}}\log_e\frac{A}{A_a}dR_{ax}=qR_{ax}^2+\sqrt{q}\,R_{ax}\log_e(1-e^{-2\alpha a})^2$

$$+\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{1}{n^2}(e^{-2n\alpha})_{\alpha_a}^{\alpha}\right\}\cdots\cdots(25)$$

(24)及び(25)式の無限級數の近似値として次の關係がある。

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{1}{n^2}e^{-2n\alpha})_{\alpha_a}^{\alpha}\right\}\doteqdot\frac{1}{2}(e^{e^{-2\alpha}})_{\alpha_a}^{\alpha}-\frac{1}{2}\left\{(\log_e(1-e^{-2\alpha})\right\}_{\alpha_a}^{\alpha}\cdots\cdots(26)$$

(九) 特別の場合

等位面の判別面積若くは形狀因數の何れかゞ零なる場合には、第三節乃至第五節、第七節及び第八節に揭げたる幾何量の値は不定となる。此の場合の幾何量は一般式中の不定値を微分比の形に直すか又は普通の座標を用ひて容易に關係式を求むることが出來る。其の結果は次の如し。

特別の場合 (I) $q=0$ $f\neq0$

$$X=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{f}}\cdots\cdots(27)$$

$$A=f\mathrm{x}^2\cdots\cdots(28)$$

$$V=\frac{1}{3}f\mathrm{x}^3=\frac{1}{3\sqrt{f}}A^{\frac{3}{2}}\cdots\cdots(29)$$

$$R_{ax}=\frac{\mathrm{x}_{ax}}{\sqrt{A_aA}}\cdots\cdots(30)$$

$$S=\frac{1}{f\mathrm{x}^2}=\frac{1}{A}\cdots\cdots(31)$$

$$\int_0^{R_{ax}}V_{ax}\,dR_{ax}=\frac{1}{6f}A_{ax}-V_a\,R_{ax}\cdots\cdots(32)$$

$$\int_0^{R_{ax}}\int_0^{R_{ax}}V_{ax}\,dR_{ax}\,dR_{ax}=\frac{1}{6f}\mathrm{x}_{ax}-\frac{1}{6f}A_a\,R_{ax}-\frac{1}{2}V_aR_{ax}^2\cdots\cdots(33)$$

特別の場合 (II) $f=0$ $q\neq0$

$$X=\frac{1}{2\sqrt{q}}A\cdots\cdots(34)$$

$$A=2\sqrt{q}\,\mathrm{x}\cdots\cdots(35)$$

$$V=\sqrt{q}\,\mathrm{x}^2=\frac{1}{4\sqrt{q}}A^2\cdots\cdots(36)$$

$$R_{ax}=\frac{1}{2\sqrt{q}}\log_e\frac{A}{A_a}\cdots\cdots(37)$$

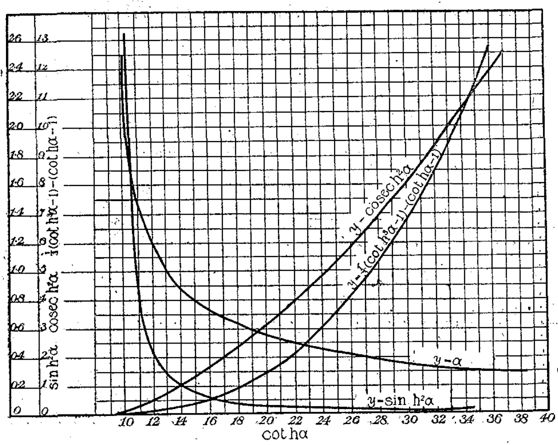
$$S=\frac{1}{2\sqrt{q}\,x}=\frac{1}{A}\cdots\cdots(38)$$

$$\int_0^{R_{ax}}V_{ax}\,dR_{ax}=\frac{1}{4\sqrt{q}}\left(V_{ax}-V_a\log_e\frac{V}{V_a}\right)\cdots\cdots(39)$$

$$\int_0^{R_{ax}}\int_0^{R_{ax}}V_{ax}\,dR_{ax}\,dR_{ax}=\frac{1}{16q}\left\{V_{ax}-V_a\left(1+\log_e\frac{A}{A_a}\right)\log_e\frac{V}{V_a}\right\}\cdots(40)$$

（十）等位面系の幾何量の一般的圖式表示法

第 一 圖



第三節乃至第五節及び第七節に掲げた幾何量を表はす式を列記すると

$$X=\frac{\sqrt{q}}{f}(\coth\alpha-1)\cdots\cdots(4)$$

$$A=\frac{q}{f}\operatorname{cosech}^2\alpha\cdots\cdots(6)$$

$$V=\frac{q^{\frac{3}{2}}}{f^2}\left\{\frac{1}{3}(\coth^3\alpha-1)-(\coth\alpha-1)\right\}\cdots\cdots(8)$$

$$R_{ax}=-\frac{1}{\sqrt{q}}\alpha_{ax}\cdots\cdots(17)$$

$$S=\frac{f}{q}\sinh^2\alpha\cdots\cdots(19)$$

茲に f は形狀因數、q は判別面積である。今若し是等の定數の値が1なる場合に就きて前記諸式の圖表を用意して置けば、其の圖表より距離係數、體積係數及び幾何學的接觸抵抗係數等の値を求め、

夫れ夫れ定數を乘ずれば所要の幾何量は容易に之れを知ることを得、幾何學的抵抗係數は(17)に由つて其儘單一の圖表に表はすことは出來ないが α の値を圖表に表はせば宜しい。

圖表の坐標を決定するに當り、第二節に述べたる獨立變數 $\sqrt{A}\cosh\alpha$ 及び幾何量の係數を其の儘夫れ夫れ横軸及び縱軸に採るときは普遍性を失ふことになり。圖表としての價値は著しく削減さる。然るに。($\sqrt{A}\cosh\alpha$) と ($\sqrt{A}\sinh\alpha=\sqrt{q}/\sqrt{f}$) との比、即ち $\coth\alpha$ の値を横軸上に採り、幾何量の諸係數を縱軸に採ると、斯の如き坐標を以て作られたる線圖は普遍性を有することになり、等位面の形狀如何に拘はらず同一の線圖を使用することを得。

第一圖に於て横軸上の目盛は $\coth\alpha$ の値を示すものである、從つて目盛。(此の位置は圖に明示せず) より 1 に到る距離は $\sqrt{A}\sinh\alpha$ 即ち $\sqrt{q}/\sqrt{f}$ なる定數に比例し、目盛 1 は原面の位置を示す。又 1 より右方への距離は ($\coth\alpha-1$) 即ち距離係數を示し、原面より等位面に到る實際距離に比例し、其の比は ($1:\sqrt{q}/f$) である。

線圖 $Y=\operatorname{cosech}^2\alpha$ は面積係數を表はし、其の値の實際面積に對する比は ($1:q/f$) である。線圖 $Y=\frac{1}{3}(\cosh^3\alpha-1)-(\coth\alpha-1)$ は體積係數を表はし、其の實際體積に對する比は ($1:q^{\frac{3}{2}}/f^2$) である。

線圖 $Y=\alpha$ は幾何學的抵抗係數を表はすもので、原面に於て無限大に達す。即ち此の係數は二等位面間に相對的に考へて始めて意義を有するものである。而して此の二つの係數の差と實際の幾何學的抵抗との比は ($1:-1/\sqrt{q}$) である。線圖 $Y=\sinh^2\alpha$ は幾何學的接觸抵抗係數を表はすものにして、其の實際幾何學的接觸抵抗に對する比は ($1:f/q$) である。

次に定積分量に就ては積分の下限の値如何に由つて其の線圖を異にするから、此の場合には單一なる線圖をして普遍性を有せしむることは不可能である。然しながら若し(20)式及び(22)式中に含まるる可變因數の各々に就き線圖を用意して置けば計算の手數を餘程省くことが出來る。前記定積分量を表はす式中に含まるゝ可變因數の中 $\operatorname{cosech}^2\alpha$, α, $\coth\alpha$ は他の幾何量のため用意したる第一圖の線圖を其の儘使用することを得。又 ($\frac{1}{3}\coth^3\alpha-\coth\alpha$) の値は體積係數より $\frac{2}{3}$ を減ずれば直ちに求めらる。其の他の可變因數に就きても線圖を作成することが出來るが茲には省略する。

定數 $\sqrt{q}/f$ の値が小なる場合には大なる圖表を要し、之れに反し此の値が大なる場合には圖表の精密度を低減するから精密なる圖表を必要とす。若し第一圖の 5 倍位の大さ又は精密度を有する線圖を用ひ、尙ほ不便を感ずる樣なる場合には最早第九節の特別の場合と見做して數字計算を行ふも、其の結果は僅少なる誤差を招致するに止まる。

第九節の特別の場合に就きても線圖を作ることは極めて容易であるが、此の場合は數字計算も亦極めて容易である故、寧ろ數字計算法に依るを得策とす。

(十) 結　　論

本編は普通の面線坐標に幾分の工夫を加へ、之れを用ひ平行等位面系の距離、面積、體積、幾何學的抵抗及び體積の積分量等を、其の等位面の幾何學的形狀如何に拘はらず普遍的に表はし得る公式を誘導し、以て之が應用を便宜ならしめたるのみならず、更に凡ての等位面系に共通なる因數のみを以て簡單なる線圖を作成し、數計算に代ふるに線圖計算を行ふべき方法を示したものである。

新坐標の採用に依つて、然らざれば複雜なるべき數式を簡單になし得たることは、是等の關係を基礎として等位面系に關する各般の問題を解析的に取扱ふ上に於て、尠からず便宜を與ふるものであらう。

著者か本編を草するに至つた直接の目的は、電氣爐周壁の熱的特性を成るべく正確なる解析式を以て表はし、以て從來殆んど何等合理的根據の無かつた爐體設計に關し基本的法則を樹立すべき第一基礎を築き上ぐるにある。若し本編に紹介したる諸式が、今後一般熱工學及び電氣工學に關係せらるゝ諸賢に於て、更に補遺せられ、其の結果從來殆んど特殊の幾何學的形狀の場合に局限せられ容易に其の羈絆を脫し得ない狀態にある。熱及び電氣に關する一般等位面系の各種の問題に向つて、新生面を開拓すべき機運を促進するに至らば著者の喜び之れに過ぐるものはない。

正誤表

第十四年　第二號　論說　英國鐵鋼會のストックホルム大會に就て

場	所	正	誤
138 頁	鑛石分析表中	Manganese protoxide	Maganese protoxide
	〃	Loss Ignition	Loss Igniteion

第十四年　第二號　論說　クロム鋼の組織圖

頁	行	正	誤
177	8	第7圖と第8圖又は第9圖と第10圖	第7圖と第9圖又は第8圖と第10圖
177	15	組成範圍	組織範圍
177	19	第7圖と第9圖又は第8圖と第10圖	第7圖と第8圖又は第9圖と第10圖